

УДК 519.713+519.718.7  
ББК 22.18

## **РАЗРАБОТКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ**

**Епифанов А.С.<sup>1</sup>**

*(Институт проблем точной механики и  
управления РАН, Саратов)*

*В статье анализируются законы функционирования программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Математические модели ПЛИС являются базовой информацией для решения задач разработки схем, анализа и технического диагностирования, оптимизации структур и законов функционирования. ПЛИС относятся к техническим устройствам со сложной структурой, сложными законами функционирования и большой размерностью множеств сигналов и памяти. Имеющиеся в настоящее время математические модели ПЛИС, в частности, конечные детерминированные автоматы, оказываются не достаточными не только для решения задач, но даже для явного представления ПЛИС. В статье изложен метод построения математической модели ПЛИС в виде символического и числового графиков, а также метод диагностирования ПЛИС, основанный на использовании аппарата геометрических образов законов функционирования автоматов.*

Программируемая логическая интегральная схема, конечный детерминированный автомат, геометрический образ законов функционирования автомата, техническое диагностирование

---

<sup>1</sup> Епифанов Антон Сергеевич, аспирант, г.Саратов, ул.Рабочая д.24 (epifanovas@list.ru)

## 1. Введение

Объекты технического диагностирования в форме ПЛИС являются сложными и не допускают полного, явного и компактного представления таблицей, матрицей, графом и т.п. В связи с этим предлагается использовать в качестве математических моделей ПЛИС геометрические образы законов функционирования автоматов. При задании автомата геометрическим образом соответствующее автоматное отображение преобразуется в точечный числовой график с точками, расположенными на геометрических кривых линиях (см.[5-7]). При таком задании законов функционирования автомата мощности множеств состояний и сигналов автомата могут быть бесконечными или, для удобства математических вычислений, полагаться бесконечными.

## 2. Геометрические образы законов функционирования автоматов

В работах [5-7] Твердохлебовым В.А. предложен и развит формальный аппарат замены символьных автоматных моделей в форме таблиц, графов, логических уравнений, числовыми структурами в форме геометрических фигур, числовых уравнений и последовательностей. Этот подход предназначен для поиска новых идей и методов организации технического диагностирования сложных систем. Преобразование символьной формы автоматной модели в числовую структуру (геометрический образ законов функционирования автомата) включает линейное упорядочивание автоматного отображения  $\rho_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s, p))\}$ ,

для инициального автомата  $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ , где  $S, X$  и  $Y$  – соответственно множества состояний, входных и выходных сигналов, а  $\delta: S \times X \rightarrow S$  – функция переходов,  $\lambda: S \times X \rightarrow Y$  – функция выходов. Автоматное отображение  $\rho_s$  взаимнооднозначно преобразуется в автоматное отображение вида

$\rho'_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s, p))\}$  , где  $\lambda'(s, p)$  – последний знак выход-

ной последовательности  $\lambda(s, p)$  . Для преобразования множества пар  $\rho_s$  и  $\rho'_s$  в графики на множестве слов  $X^*$  в алфавите  $X$  вводится линейный порядок  $\omega_1$  (см. монографию [7]). Упорядоченные множества пар  $(\rho_s, \omega_1)$  и  $(\rho'_s, \omega_1)$  дополняются линейными порядками  $\omega_0$  на  $Y^*$  и  $\omega_2$  на  $Y$  . В результате получаем графики  $(\rho_s, \omega_1, \omega_0)$  и  $(\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$ . Построенные графики размещены в системе координат с осью абсцисс  $(X^*, \omega_1)$  и осями ординат соответственно  $(Y^*, \omega_0)$  и  $(Y, \omega_2)$ . Линейные порядки  $\omega_0$  и  $\omega_2$  выбираются на основе учитываемых свойств выходных сигналов, а линейный порядок  $\omega_1$  определяется условиями и ограничениями, предполагаемыми для взаиморасположения на оси абсцисс последовательностей входных сигналов. Замена элементов множеств  $X^*$  и  $Y$  в графике  $\gamma_s = (\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$  их номерами по порядкам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  позволяет преобразовать символьный график  $\gamma_s$  в числовой график в системе координат с осью абсцисс  $N^+$  и осью ординат  $\{1, 2, \dots, l\}$ , где  $|Y|=l$ .

Из геометрического образа  $\gamma_s$  автомата  $A_s$  выделяется последовательность вторых координат точек геометрического образа, которая взаимнооднозначно соответствует полному геометрическому образу (при выбранной величине  $m=|X|$  и порядке  $\omega_1$  на множестве  $X^*$ ). В результате законы функционирования автомата (то есть, фазовая картина) и конкретные процессы функционирования автомата (то есть, фазовые траектории) оказываются взаимнооднозначно определёнными последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Произвольная последовательность элементов из конечного множества может рассматриваться как последовательность вторых координат точек геометрического образа и, следовательно, как задание законов функционирования автомата. Это позволяет некоторые свойства законов функционирования автомата представлять свойствами последовательностей.

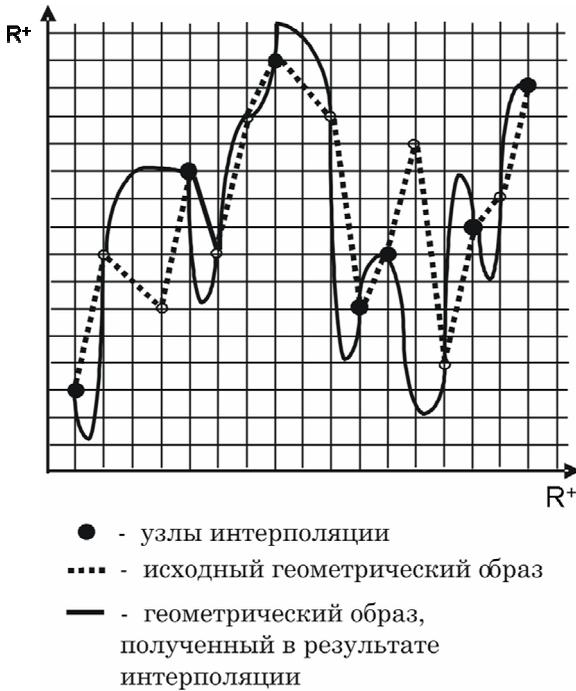
### **3. Построение геометрической формы математических моделей программируемых логических интегральных схем**

ПЛИС представляют собой сложные технические объекты, для которых имеется только частично определенная модель. Использование средств технического диагностирования для таких сложных систем ограничено по выделенным интервалам времени, также по выделенным интервалам времени ограничено приложение рабочих воздействий на объект диагностирования. При использовании предложенного В.А.Твердохлебовым подхода (применение числовых структур - геометрических образов), возможно доопределение частично определенной модели объекта технического диагностирования с использованием классических методов интерполяции и экстраполяции.

В данной работе осуществляется построение и анализ математической модели в форме геометрического образа программируемых логических интегральных схем семейства Spartan II фирмы Xilinx, включающее разработку геометрических образов на основе классических методов интерполяции Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Бесселя и Стирлинга. Рассматривается несколько классов алгоритмов, реализуемых с помощью ПЛИС - алгоритмы цифровой обработки сигналов, основанные на применении ортогональных преобразований: быстрые преобразования Фурье (БПФ), Хартли, Уолша, Адамара, преобразование Карунена - Лоэва и др., алгоритмы кодирования/декодирования информации, сжатия данных и быстрые алгоритмы поиска по решетке и по дереву.

ПЛИС программируется на реализацию указанных алгоритмов с использованием системы Xilinx Web Pack ISE 9.2i. Анализируется эффективность указанных методов интерполяции для восстановления частично заданных геометрических образов законов функционирования при различном расположении и числе узлов интерполяции. На рис.1 приведен пример сравнения на начальном интервале исходного геометрического

образа и геометрического образа, построенного с использованием метода интерполяции Ньютона (в данном примере при программировании ПЛИС в качестве выходных используются 32 канала).



*Рис.1. Начальные отрезки исходного геометрического образа и восстановленного с помощью метода интерполяции Ньютона.*

Недостатком методов интерполяции Гаусса, Бесселя и Стирлинга в отличие от рассмотренных методов интерполяции Ньютона и Лагранжа является возможность их использования только для случая равноотстоящих узлов интерполяции. Данное свойство накладывает дополнительные ограничения на выделение узлов интерполяции. На основе проведенного вычислительного эксперимента показано, что для рассматриваемого класса

алгоритмов, реализованных на ПЛИС, метод интерполяции Гаусса дает лучшие результаты, чем методы интерполяции Ньютона и Лагранжа. Для каждого из рассмотренных алгоритмов из 2-х методов интерполяции (Ньютона и Лагранжа) определен наиболее эффективный метод.

Эффективность методов интерполяции исследована при различном расположении и числе узлов интерполяции (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100 узлов). При зафиксированном числе узлов интерполяции рассматривается 2000 вариантов выделения узлов, в том числе 3 следующих способа выбора узлов интерполяции:

1) узлы интерполяции определяются на основе выделения автономных подавтоматов (например, для случая  $|X|=2$  первым координатам выделенных узлов интерполяции соответствуют входные слова 0, 1, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111, 00000, 11111 и т.д.);

2) Узлы интерполяции выделяются с постоянным шагом;

3) Узлами интерполяции (при выбранном числе узлов  $n$ ) являются первые  $n$  точек геометрического образа (данные узлы формально могут считаться набором узлов для экстраполяции).

Эффективность методов интерполяции Гаусса, Стирлинга и Бесселя ввиду ограничений на их применение, анализировалась только при равноотстоящих узлах интерполяции. В результате анализа полученных данных отмечено, что в целом по отношению ко всем рассматриваемым алгоритмам из указанных выше классов алгоритмов метод интерполяции Лагранжа дает практически одинаковые результаты при всех 10 проанализированных значениях числа узлов и всех 2000 наборах узлов. Метод интерполяции Ньютона по отношению ко всем рассматриваемым алгоритмам из класса алгоритмов ортогональных преобразований дал практически одинаковые результаты (для всех значений числа узлов и всех вариантов выбора узлов разница между алгоритмами менее 2%).

В целом по отношению ко всему рассматриваемому классу алгоритмов метод Ньютона оказался эффективнее метода Лагранжа по числу правильно восстановленных точек геометрических образов на 5%.

#### **4. Специфика технического диагностирования ПЛИС с использованием геометрической формы математической модели ПЛИС**

ПЛИС представляют собой сложные цифровые интегральные микросхемы, состоящие из программируемых логических блоков и программируемых соединений между этими блоками. В настоящее время ПЛИС используется для построения различных по сложности и возможностям цифровых устройств (современные образцы ПЛИС содержат до 10 млн. логических вентилях, имеют более 1000 выводов и десятки мегабайт встроенной блочной памяти).

Существующие математические модели ПЛИС, в частности, конечные детерминированные автоматы, не позволяют явно представлять ПЛИС ввиду их большой размерности. В данной работе предлагается использовать аппарат геометрических образов автоматов для задания и анализа законов функционирования ПЛИС.

В работе [7] Твердохлебовым В.А. показано, что техническое диагностирование систем, которые характеризуются как большие или сложные системы, осуществляется в условиях существенных ограничений на математические модели и средства диагностирования. ПЛИС как объект диагностирования не допускает достаточно полного и точного интуитивного обозрения и формального представления традиционными средствами: таблицами, графами, логическими уравнениями. Кроме того, возможности средств диагностирования в каждом используемом интервале времени ограничены наблюдением только части структуры ПЛИС и наблюдением только некоторых функций, реализуемых ПЛИС. Анализ работоспособности и локализация

дефектов ПЛИС могут потребоваться на интервале времени, как угодно удаленном от начала функционирования объекта. Техническое диагностирование ПЛИС не может быть осуществлено однородными средствами диагностирования. Только совмещение тестирования, измерения физических параметров, анализ процессов "решения" объектами диагностических задач, оптическая инспекция, сигнализация и т.п. должно образовывать средства диагностирования. Ввиду указанных особенностей для задания и исследования законов функционирования ПЛИС предлагается использовать аппарат геометрических образов автоматов (см.[7]), в том числе для решения задач технического диагностирования.

Метод технического диагностирования сложных систем с использованием аппарата геометрических образов (см.[7]) включает построение математических моделей средств технического диагностирования в форме связи диагностических взаимодействий с реакциями на них объекта диагностирования; построение математических моделей в форме геометрических образов для объекта диагностирования, включающее разработку геометрических образов на основе интерполяции и экстраполяции; разработку стратегии проведения диагностического эксперимента на основе анализа геометрических образов и реализацию диагностического эксперимента в соответствии с разработанной стратегией.

Использование аппарата геометрических образов для задания законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем позволяет эффективно осуществлять поиск диагностических последовательностей. Для этого каждой неисправности из множества рассматриваемых и учитываемых неисправностей и работоспособному состоянию системы сопоставляется математическая модель в виде геометрического образа законов функционирования автомата. Точки геометрических образов предполагаются расположенными на кривых, заданных аналитически. При таком способе задания диагностической модели поиск диагностических последовательностей сводится к

нахождению интервалов на оси абсцисс, в которых геометрические кривые, представляющие математические модели неисправностей, не имеют общих точек. Эффективный поиск таких интервалов может быть осуществлен на основе решения системы неравенств (или системы равенств).

### ***5. Метод диагностирования ПЛИС, основанный на декомпозиции геометрических образов***

Используемый аппарат геометрических образов позволяет задавать законы функционирования программируемых логических интегральных схем как с помощью геометрических кривых, так и с помощью числовых последовательностей. В работах [1-4] содержатся результаты исследований классов дискретных детерминированных динамических систем, законы функционирования которых заданы числовыми последовательностями. Законы функционирования ПЛИС при неисправностях из множества учитываемых неисправностей и в работоспособном состоянии представляются геометрическими образами. Поиск диагностических последовательностей при таком способе задания законов функционирования сводится к нахождению таких интервалов на оси абсцисс, в которых геометрические образы, соответствующие различным неисправностям, не совпадают. В работе [7] показано, что при зафиксированном числе входных сигналов автомата и порядке на множестве входных слов геометрическому образу взаимно-однозначно соответствует последовательность вторых координат точек геометрического образа. Ввиду этого эффективный поиск диагностических воздействий возможен на основе анализа числовых последовательностей. Множеству рассматриваемых и учитываемых неисправностей сопоставляется множество числовых последовательностей. Необходимо найти такие номера элементов, значения которых различны в каждой из рассматриваемых последовательностей. При большом числе последовательностей и увеличении длины последовательностей данная задача имеет сложное решение и

требует больших объемов вычислительных ресурсов. Поэтому предлагается осуществлять распознавание исходных (числовых) последовательностей на основе анализа характеристических (бинарных) последовательностей, отражающих расположение значений элементов в исходных последовательностях. Метод диагностирования ПЛИС на основе декомпозиции геометрических образов включает следующие этапы:

1. Построение математической модели работоспособной ПЛИС и математических моделей законов функционирования ПЛИС при неисправностях в форме частично заданных геометрических образов;

2. Доопределение частично заданных геометрических образов до полных с использованием методов интерполяции;

3. Извлечение из разработанных на основе интерполяции полных геометрических образов числовых последовательностей (последовательностей вторых координат точек);

4. Декомпозиция каждой последовательности в набор характеристических последовательностей без потери информации;

5. Анализ полученного множества характеристических последовательностей с целью выявления такого минимального набора характеристических последовательностей, который покрывает все неисправности из множества рассматриваемых и учитываемых неисправностей ПЛИС.

Для иллюстрации описанного метода диагностирования с сокращением общности рассуждений в качестве предполагаемых конфигураций ПЛИС в данной работе предложено рассматривать такие конфигурации, при которых законы функционирования ПЛИС задаются последовательностью  $H$  вторых координат точек геометрического образа (при выбранном значении мощности входного алфавита). Предлагается новый тип программируемых логических интегральных схем -  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС, где  $H$  - последовательность вторых координат точек геометрического образа законов функционирования ПЛИС,  $u$  - число разъемов ПЛИС, запрограммированных в качестве входных,  $w$  - число разъемов ПЛИС, запрограммированных в качестве

ве выходных, а  $d(H)$  - длина начального отрезка последовательности  $H$ . Мощность входного алфавита  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС равна  $2^u$ , а выходного, соответственно  $2^w$ . Минимальное значение величины  $w$  может быть определено на основе анализа специфики рассматриваемого начального отрезка последовательности  $H$  (определения числа различных элементов в начальном отрезке последовательности  $H$ ). Допустим, что множество рассматриваемых и учитываемых неисправностей ПЛИС состоит из 999 неисправностей и в результате реализации этапов 1-3 предлагаемого метода диагностирования получено следующее семейство числовых последовательностей  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{999}$ , где  $H_0$  - последовательность вторых координат точек геометрического образа работоспособной ПЛИС, а  $H_1, H_2, \dots, H_{999}$  - последовательности вторых координат точек геометрических образов ПЛИС при неисправностях.

Для иллюстрации предлагаемого метода проводится серия из 10 вычислительных экспериментов. В каждом из 10 экспериментов осуществляется построение и анализ 1000 вариантов законов функционирования  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС. В качестве последовательностей  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{999}$  рассматриваются 10 различных наборов последовательностей длины  $d(H_i) = k \cdot 1000$ , где  $k=1, 2, 3, \dots, 10$ , (т.е.  $1000 \leq d(H_i) \leq 10000$ ), выделенные из начального отрезка числа  $\pi$  по следующему правилу: первый знак последовательности  $H_i$ , ( $0 \leq i \leq 999$ ) длины  $d(H_i)$  имеет номер  $(i \cdot d(H_i)) + 1$  в десятичном представлении числа  $\pi$  последовательностью, а последний знак последовательности  $H_i$  номер  $(i+1) \cdot d(H_i)$ , т.е. в эксперименте с номером  $k$ ,  $1 \leq k \leq 10$ , из начального отрезка числа  $\pi$  последовательно выделяется 1000 последовательностей длины  $d(H_i) = k \cdot 1000$ , где  $k=1, 2, 3, \dots, 10$ . Таким образом, проводится серия из 10 вычислительных экспериментов при зафиксированной для каждого эксперимента длине последовательностей  $d(H_i) = 1000, 2000, 3000, \dots, 10000$ . На построенных указанным образом 10000 вариантах законов функционирования  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС проводится иллюстрация этапов 4-5 предлагаемого метода диагностирования. Также

для иллюстрации этапов 4 - 5 предлагаемого метода с использованием указанных выше правил осуществлено построение 10000  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС по первым 10000000 знакам числа  $e$ .

В результате реализации этапа 4 для всех указанных 20000  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС построены соответствующие множества характеристических последовательностей. Проведенный вычислительный эксперимент, реализующий этап 5 предложенного метода диагностирования, выявил следующие специфические свойства рассматриваемого множества характеристических последовательностей. Распознавание всех 1000 вариантов законов функционирования  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС при любом из 10 выбранных для анализа значений величины  $d(H)$  ( $d(H) = k \cdot 1000$ , где  $k=1, 2, 3, \dots, 10$ ) возможно с использованием любой из характеристических последовательностей длины  $d(H)$ . Данное свойство выполняется как для всех  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС построенных по первым 10000000 знакам числа  $\pi$ , так и для всех  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС построенных по первым 10000000 знакам числа  $e$ . Таким образом, объем диагностической информации может быть сокращен (т.к. вместо хранения всех 1000 исходных последовательностей достаточно хранить 1000 характеристических (бинарных) последовательностей). Кроме того, для каждого анализируемого значения величины  $d(H_i)$  отмечены специфические свойства  $((H, u, w, d(H))$  - ПЛИС, позволяющее более существенно сократить диагностическую информацию. Например, в классе  $(\pi, u, w, d(\pi))$  - ПЛИС при  $d(H)=1000$  выявлены следующие свойства:

1. при использовании всего 10 первых точек характеристических последовательностей распознается 85% пар последовательностей;

2. при использовании 20 первых точек характеристических последовательностей распознается более 97% пар последовательностей;

3. при использовании 25 первых точек характеристических последовательностей распознается более 99% последовательностей;

4. для распознавания всех 1000 последовательностей достаточно 60 первых точек характеристических последовательностей, выделяющих расположение цифры 8 в последовательностях  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{999}$ ;

5. использование любого из 10 сечений геометрического образа для распознавания всех 1000 последовательностей возможно при использовании 80 первых точек характеристических последовательностей.

Проведенный вычислительный эксперимент показывает, что использование метода диагностирования с использованием декомпозиции геометрических образов (на примере  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС, построенных по первым 10000000 знакам чисел  $\pi$  и  $e$ ) позволяет существенно сократить объем диагностической информации.

## **6. Краткие выводы**

Использование аппарата геометрических образов законов функционирования автоматов (см.[5-7]) позволяет исследовать свойства законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем на основе анализа свойств последовательностей из элементов конечного множества. На основе использования аппарата геометрических образов автоматов, предложен новый тип программируемых логических интегральных схем -  $(H, u, w, d(H))$  - ПЛИС, законы функционирования которых представляются числовыми последовательностями. Приведен метод диагностирования ПЛИС с использованием декомпозиции геометрических образов, позволяющего существенно сократить объем диагностической информации, приведена иллюстрация этого метода на примере классов  $(\pi, u, w, d(\pi))$ -ПЛИС и  $(e, u, w, d(e))$ - ПЛИС, построенных по первым 10000000 знакам чисел  $\pi$  и  $e$ .

## **Литература**

1. ЕПИФАНОВ А.С. *Анализ фазовых картин дискретных динамических систем*. - Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. - 156с.
2. ЕПИФАНОВ А.С. *Анализ геометрических образов законов функционирования автоматов* // Управление большими системами. 2009. Вып.24. С.81-98.
3. ЕПИФАНОВ А.С. *Построение и анализ классов  $(H, m, d(H))$ -автоматов* // V Всероссийская школа-семинар молодых ученых "Управление большими системами". Липецк, 2008. С.23-30.
4. ЕПИФАНОВ А.С. *Построение и анализ математических моделей интегральных схем в геометрической форме* // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар.науч.конф. - Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2009. С.91-95.
5. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы поведения дискретных детерминированных систем* // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2006, №5. С. 161-165.
6. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Методы интерполяции в техническом диагностировании* // Ж-л «Проблемы управления». М. №2 2007. С.28-34.
7. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы законов функционирования автоматов*. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 183с.

## **THE DEVELOPMENT OF GEOMETRICAL FORM OF MATHEMATICAL MODELS OF FIELD PROGRAMMABLE GATE ARRAY**

**Anton Epifanov**, Institute of problems of precision mechanics and Control Sciences of RAS, Saratov, PhD student (epifanovas@list.ru).

*In article are considered laws of functioning of Field Programmable Gate Array (FPGA). Mathematical models of FPGA are the base information for the decision of problems of development of chips, of the analysis and technical diagnosing, optimization of structures and laws of functioning. Field Programmable Gate Array (FPGA) concern to technical devices with complex structure, complex laws of functioning and the big dimension of sets of signals and memories. Mathematical models of FPGA, available now, particularly, the finite state machines, are not sufficient not only for the decision of problems, but even for explicit representation of FPGA. In these clause is stated the method of construction of mathematical model of FPGA in the form of symbolical and numerical graph and also a method of diagnosing of FPGA based on use of the apparatus of geometrical images of laws of functioning of state machines.*

**Keywords:** field-programmable gate array, finite state machine, geometrical image of laws of functioning of state machine, technical diagnosis