

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ФИШБЕРНА: НЕОБХОДИМОСТЬ И ПРЕИМУЩЕСТВА¹

Сигал А. В.², Ремесник Е. С.³

(Крымский федеральный университет имени
В.И. Вернадского, Симферополь)

В статье вводится понятие последовательностей Фишберна, одним из важнейших свойств которых является то, что они всегда удовлетворяют простому линейному отношению порядка, а при определенных условиях и частично усиленному линейному отношению порядка. Обосновывается необходимость применения последовательностей Фишберна для оценки распределения вероятностей в экономических исследованиях. Особое внимание уделяется применению последовательностей Фишберна в современной теории портфеля. Проведенное исследование позволяет прийти к выводу о наличии преимуществ применения в экономических исследованиях (например, при решении статистических игр, характеризующих ситуацию принятия решений) последовательностей Фишберна как оценки распределения вероятностей по сравнению с традиционными статистическими методами оценки распределения вероятностей. Результаты решения задачи поиска эффективного портфеля с использованием различных оценок распределения вероятностей показали, что используемая оценка распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) существенно влияет на значения числовых характеристик активов и портфелей, на вид (как на состав, так и на структуру) множеств допустимых и эффективных портфелей, а также на вид областей критериальной плоскости, соответствующих этим двум множествам. Применение последовательностей Фишберна, отличных от равномерного закона, для оценки распределения вероятностей влечет потерю статистических свойств, в том числе и свойства несмещенности, точечных оценок числовых характеристик случайных величин, но в экономических исследованиях позволяет учесть различную степень влияния на будущее развитие экономических систем, которое оказывают события, происходившие в различные прошлые моменты времени.

Ключевые слова: последовательность Фишберна; линейные отношения порядка; оценка распределения вероятностей; задача поиска эффективного портфеля.

¹ Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-010-00688.

² Анатолий Викторович Сигал, д.э.н., профессор (ksavo3@gmail.com).

³ Елена Сергеевна Ремесник, ассистент (es2704@mail.ru).

1. Введение

При обосновании и принятии управленческих решений в различных областях экономики в условиях неопределенности особую роль играет статическая модель принятия решений [26, с. 9-14], которую еще называют статистической игрой. *Статическая игра* представляет собой игру двух участников, в которой первый игрок является *лицом, принимающим решения (ЛПР)*, активно и осмысленно выбирающим свои стратегии, а второй – *«природой»*, т. е. экономической средой. «Природа» случайным образом, пассивно, оказывается в одном из своих возможных состояний.

При моделировании поиска оптимального решения в условиях неопределенности наиболее естественным является установление определенного типа отношения порядка на множестве состояний, задаваемого «органом принятия решения U на основе имеющейся в его распоряжении информации, его опыта, интуиции и условий обстановки принятия решений» [26, с. 77]. Согласно классификации информационных ситуаций (ИС), предложенной Р.И. Трухаевым [26, с. 13], задание отношений порядка на компонентах множества состояний экономической среды характерно для принятия решений в поле третьей ИС.

В статье рассматривается случай, когда на компонентах вектора, характеризующего выбранную оценку априорного распределения вероятностей состояний экономической среды, задано то или иное линейное отношение порядка (ЛОП). Эти отношения порядка были подробно изучены П. Фишберном [29-31], в которых П. Фишберн предложил простые и удобные формулы для вычисления точечных оценок значений компонент векторов, удовлетворяющих основным типам ЛОП. Эти точечные оценки П. Фишберна, приведенные, например, в монографии Р.И. Трухаева [26, с. 77-80], а также их обобщения, вводимые в статье и названные последовательностями Фишберна (в т. ч. наиболее важный класс последовательностей Фишберна – обобщенные прогрессии Фишберна) можно применять, например, для вычисления значений компонент вектора, характеризующего априорное распределение вероятностей возможных

состояний экономической среды. Этот подход, в частности, позволяет [12] приводить обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля, заданные в поле третьей ИС, к классической модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля.

Итак, в поле третьей ИС на основе вербальной и/или статистической информации можно на качественном уровне установить приоритетность (отношения порядка) состояний экономической среды. Это означает, что для каждой пары состояний экономической среды можно указать, какое из них имеет больший приоритет (собственно, характеризуется большим значением вероятности своей реализации), или, что они являются эквивалентными (имеют одинаковую вероятность своей реализации). Кроме того, следует учитывать, что компоненты вектора, характеризующего распределение вероятностей возможных состояний экономической среды, обязаны удовлетворять следующим ограничениям:

условию нормировки

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

и требованиям неотрицательности всех вероятностей

$$(2) \quad q_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Цель статьи – обобщить формулы Фишберна и, в частности, изучить энтропийные свойства соответствующих последовательностей, обосновать необходимость и преимущества их применения в экономических исследованиях. В статистических исследованиях в качестве оценки распределения вероятностей применяют, по сути, равномерный закон, что обеспечивает наличие желаемых свойств (например, свойства несмещенности) точечных статистических оценок. Статья посвящена случаям, когда требуется применять оценки распределения вероятностей, подчиняющиеся таким ЛОП, которым равномерный закон не удовлетворяет.

Подчеркнем, в отличие от подхода П. Фишберна и его последователей (см., например, [33, 34]), которые опираются в своих исследованиях на теорию аддитивной полезности, в ста-

тые рассматриваемые последовательности изучаются с позиций их энтропийных свойств, т. е. с точки зрения их соответствия принципу Гиббса–Джейнса максимума энтропии, согласно которому наиболее характерным распределением вероятностей возможных состояний экономической среды следует считать вектор $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1; \hat{q}_2; \dots; \hat{q}_j; \dots \hat{q}_n)$, максимизирующий значение энтропии Шеннона $H(\mathbf{q}) = -\sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln q_j$ и удовлетворяющий имеющимся ограничениям.

2. Линейные отношения порядка и оценки Фишберна

Пусть $\mathbf{q} = (q_1; q_2; \dots; q_j; \dots; q_n)$ – вектор, характеризующий распределение вероятностей состояний экономической среды, для компонент которого не известны их точные истинные значения. Приведем определения основных ЛОП [26, с. 78].

Простое ЛОП задается неравенствами вида $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_j \geq \dots \geq q_n$ или $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_j \leq \dots \leq q_n$. *Частично усиленное ЛОП* задается неравенствами $q_j \geq q_{j+1} + \dots + q_n$, $j = 1, \dots, n-1$, или $q_j \geq q_1 + \dots + q_{j-1}$, $j = 2, \dots, n$. *Усиленное ЛОП* задается неравенствами

$q_{j-\alpha(j)} + \dots + q_{j-1} \leq q_j \leq q_{j-\alpha(j)-1} + q_{j-\alpha(j)} + \dots + q_{j-1}$, $j = 3, \dots, n$, $\alpha(j) \in \{1; 2; \dots; j-2\}$ или

$q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha(j)} \leq q_j \leq q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha(j)} + q_{j+\alpha(j)+1}$, $j = 1, \dots, n-2$, $\alpha(j) \in \{1; 2; \dots; n-1-j\}$, где $\alpha(j)$ – заданные натуральные числа, принимающие значения из указанных множеств. *Однородное ЛОП* задается неравенствами $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T \leq \mathbf{q}^T \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^T$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – заданные неотрицательные матрицы. Наконец, *полное ЛОП* задается неравенствами $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T + \mathbf{a} \leq \mathbf{q}^T \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^T + \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – заданные квадратные матрицы соответствующего порядка, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные векторы-столбцы соответствующей размерности. Частным случаем полного ЛОП является *интервальное ЛОП*, согласно которому справедливы соотношения $a_j \leq q_j \leq b_j$,

$j=1, \dots, n$, где a_j, b_j – заданные числа такие, что $0 \leq a_j < b_j \leq 1$, $j=1, \dots, n$.

Р.И. Трухаев приводит основные точечные оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в поле третьей ИС, т. е. для приведенных выше отношений порядка [26, с. 84-85]. Эти оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в монографии Р.И. Трухаева названы *точечными оценками Фишберна*, точнее *точечными оценками Фишборна*. Дело в том, что Р.И. Трухаев применял написание фамилии Питера Фишберна через букву «о»: Фишборн. Однако, начиная с 1978 года, когда в СССР был издан перевод [28] на русский язык монографии [33] этого автора, в русскоязычной литературе принято написание этой фамилии через букву «е»: Фишберн. Формулы для точечных оценок Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений вероятностей состояний экономической среды, если для этих вероятностей задан вектор приоритетов, т. е. соответствующее ЛОП.

Пусть $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$ – оценки неизвестных значений компонент вектора $\mathbf{q} = (q_1; q_2; \dots; q_j; \dots; q_n)$, характеризующего распределение вероятностей возможных состояний экономической среды. Для случая простого ЛОП П. Фишберн предложил считать, что оценки $\hat{q}_j$ неизвестных значений вероятностей образуют арифметическую прогрессию, а для случая частично усиленного ЛОП – монотонную геометрическую прогрессию. Если соответствующие последовательности представляют собой убывающие прогрессии, то оценки, вычисляемые по формулам

$$(3) \quad \hat{q}_j = \frac{2 \cdot (n - j + 1)}{n \cdot (n + 1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(4) \quad \hat{q}_j = \frac{2^{n-j}}{2^n - 1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и принято называть [26, с. 84] *точечными оценками Фишберна*. Далее для определенности и удобства формулу (3) будем называть первой формулой Фишберна, а формулу (4) – второй фор-

мулой Фишберна. Кроме того, введем следующую удобную терминологию [18].

Прогрессиями Фишберна будем называть последовательности (3) или (4): *арифметическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (3), *геометрическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (4).

Приведем примеры (18) прогрессий Фишберна (таблицы 1 и 2).

Таблица 1. Примеры арифметических прогрессий Фишберна

$j \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	–	–
4	0,4	0,3	0,2	0,1	–
5	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Таблица 2. Примеры геометрических прогрессий Фишберна

$j \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	–	–
4	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	–
5	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$

Если соответствующие последовательности представляют собой возрастающие прогрессии, то оценки, вычисляемые по формулам

$$(5) \quad \hat{q}_j = \frac{2 \cdot j}{n \cdot (n+1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(6) \quad \hat{q}_j = \frac{2^{j-1}}{2^n - 1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

В экономических исследованиях принято считать, что формула (3) отражает тот факт, что об уровне значимости альтернатив (например, возможных состояний экономической среды; моделируемых систем; рассматриваемых показателей; анализируемых проектов и т. п.) неизвестно ничего, кроме того, что они расположены в порядке убывания уровня значимости. Формула (4) отражает тот факт, что уровень значимости очередной альтернативы не меньше совокупного (суммарного) уровня значимости всех последующих альтернатив, вместе взятых. Аналогично можно интерпретировать формулы (5) и (6). **В определенных случаях, например, при исследовании динамических рядов, когда значения индекса j задают дискретные моменты времени, применение формул (5) и (6) предпочтительнее применения формул (3) и (4), соответственно.**

В литературе часто применяют прогрессии Фишберна. К примеру, А.О. Недосекиным [4] была предложена нечетко-множественная модель корпоративного финансового менеджмента, в которой для комплексной оценки финансового состояния предприятия разработаны две системы весов для свертки отдельных элементов матрицы в единый комплексный показатель, при этом в качестве одной из этих систем им предложена система весов Фишберна, вычисляемых согласно формуле (3).

А в статье [9] предлагается использовать первую формулу Фишберна для построения нечетких множеств с целью оценки уровня совершенства систем управления безопасностью морских судов.

Е.Б. Тютюкина, Л.Д. Капанова, Т.Н. Седаш в статье [27] для определения приоритетных направлений экономического развития России предлагают использовать индикатор базовости

видов экономической деятельности (отраслей), представляющий собой интегрированный комплексный показатель, который учитывает девять критериев базовости отрасли, рассчитанный по методике точечных оценок Фишберна.

Д.К. Потапов и В.В. Евстафьева, анализируя в работе [5] различные методики определения весовых коэффициентов на примере конкретных коммерческих банков, рассматривают, в частности, определение весов с помощью шкалы Фишберна, основанной на первой формуле Фишберна.

В работе [3] И.Л. Макаровой проведен анализ различных методов определения весовых коэффициентов при построении интегрального показателя, который может быть применен к различным процессам или явлениям (в том числе и к экономическим) и рекомендованы формулы Фишберна к использованию в дальнейших исследованиях.

В статье [25] В.Л. Сомов и М.Н. Толмачев применяют веса Фишберна (формулы (5) и (6) для соответствующих возрастающих прогрессий) при рассмотрении методов определения коэффициентов весомости динамических интегральных показателей, т. к. «с точки зрения динамики, первый (наиболее ранний) период времени обладает меньшей информативностью и, соответственно, меньшим весом» [25].

Эти и другие исследования свидетельствуют, что точечные оценки Фишберна представляют интерес для математического моделирования систем самой разной природы.

3. Обобщенные прогрессии Фишберна и их свойства

Формулы (3)-(6) несложно обобщить, что впервые было предложено в статье [18], на случай монотонных прогрессий.

Обобщенными прогрессиями Фишберна будем называть прогрессии $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, удовлетворяющие всем ограничениям (1) и (2): обобщенными арифметическими прогрессиями Фишберна – арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (1) и (2), обобщенными геометрическими прогрессиями

Фишберна – геометрические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (1) и (2).

Как показано в статье [18], обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна представляет собой арифметическую прогрессию вида

$$(7) \quad \hat{q}_j = \frac{1}{n} - \frac{(n-1) \cdot x}{2} + (j-1) \cdot x = \frac{2 - n \cdot (n-2 \cdot j + 1) \cdot x}{2 \cdot n},$$

$$j = 1, \dots, n,$$

разность которой удовлетворяет соотношениям

$$(8) \quad |x| \leq \frac{2}{n \cdot (n-1)},$$

а обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой геометрическую прогрессию вида

$$(9) \quad \hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n-1} \cdot x^{j-1} = \frac{1-x}{1-x^n} \cdot x^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

знаменатель которой удовлетворяет соотношению

$$(10) \quad x > 0.$$

Обобщенные прогрессии Фишберна могут быть применены при математическом моделировании разнообразных явлений и процессов экономики и техники, в т. ч. при моделировании статистическими играми процессов принятия решений в условиях неопределенности. Например, в статье А.В. Сигала [12] рассмотрены обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле третьей ИС, которые представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом система ограничений одной из них содержала простое ЛОП, а другой – частично усиленное ЛОП. В статье [12] указанные обобщенные модели Марковица в поле третьей ИС были приведены к классической модели Марковица на основе оценки вероятностей значениями элементов соответствующих обобщенных прогрессий Фишберна.

Заметим, вырожденный случай, когда знаменатель геометрической прогрессии (9) равен единице ($x=1$), требует отдельного рассмотрения. В этом случае для поиска значения первого

члена геометрической прогрессии можно выполнить предельный переход, применяя правило Лопиталя:

$$\hat{q}_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x^n - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, если $x = 1$, то можно считать, что для элементов обобщенной геометрической прогрессии Фишберна справедливы равенства $\hat{q}_j = \frac{1}{n} \equiv \text{const}$, $j = 1, \dots, n$.

Простейшие свойства обобщенных прогрессий Фишберна впервые были подробно рассмотрены в статье [18], а впоследствии приведены, например, в публикациях [11, 12, 20-22]. Примеры обобщенных прогрессий Фишберна для первых значений n и некоторых значений x приведены в статье А.В. Сигала и Г.Н. Макеевой [18].

В случаях оценки неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды по формулам (7)-(10) корректность принятия управленческих решений зависит от ответов на несколько существенных вопросов. Наиболее важными из этих вопросов являются следующие два. 1. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна соответствующему ЛОП? 2. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна принципу Гиббса–Джейнса?

Подчеркнем, предположение П. Фишберна о том, что величины (оценки) $\hat{q}_j$ в случае простого ЛОП образуют арифметическую прогрессию, а в случае частично усиленного ЛОП – монотонную геометрическую прогрессию, приводящее к удобным оценкам, задаваемым формулами (3)-(6), не базируется на принципе Гиббса–Джейнса максимума энтропии. Однако некоторые исследователи высказывают мнение, что формула (3) «отвечает максимуму энтропии наличной информационной неопределенности об объекте исследования» [4, с. 14]. Точку зрения, аналогичную приведенному мнению А.О. Недосекина, на энтропийный смысл формул Фишберна высказывают, например, Д.В. Рач [6] и Л.Ж. Сидоренко [24]. Но, такое суждение следует признать ошибочным. Р.И. Трухаев отмечает, что «Фишборн основывал

свои оценки неконструктивным способом на основе аксиом теории аддитивной полезности» [26, с. 85]. Кроме того, хорошо известно, что если выполняется условие нормировки (1), то энтропия Шеннона

$$H(\mathbf{q}) = -\sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln q_j \text{ достигает своего максималь-$$

ного значения для равномерного распределения $q_j^* = \frac{1}{n}$,

$j = 1, \dots, n$, которое, очевидно, удовлетворяет простому ЛОП. Как показано в статье В.Н. Лившица и А.В. Сигала [2], для $n=5$ энтропия Шеннона равна $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,48975$ для оценок $\hat{q}_j$, вычисленных по формуле (3), и $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,24275$ для оценок $\hat{q}_j$, вычисленных по формуле (4), в то время как для $n=5$ максимальное значение энтропии Шеннона равно

$$H(\mathbf{q}^*) = -\sum_{j=1}^5 \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{1}{5} = \ln 5 \approx 1,60944. \text{ Таким образом, действитель-$$

но предположение П. Фишберна о том, что величины (оценки) $\hat{q}_j$ образуют арифметическую прогрессию для случая простого ЛОП и монотонную геометрическую прогрессию для случая частично усиленного ЛОП, не базируется на принципе Гиббса–Джейнса максимума энтропии.

Очевидно, среди всех обобщенных прогрессий Фишберна принципу максимума энтропии соответствует лишь частный случай, когда обобщенная прогрессия Фишберна вырождается в

$$\text{постоянную величину } \hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n} \equiv \text{const}, j = 1, \dots, n.$$

Если обобщенные арифметические прогрессии Фишберна всегда удовлетворяют соответствующему простому ЛОП, то обобщенные геометрические прогрессии Фишберна не всегда удовлетворяют соответствующему частично усиленному ЛОП.

Теорема 1. Произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ удовлетворяет соответствующему частично усиленному ЛОП тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (9) удовлетворяет со-

отношениям $x \in (0; \alpha_n] \cup \left[\frac{1}{\alpha_n}; +\infty \right)$, где α_n – корень уравнения $x^n - 2 \cdot x + 1 = 0$, удовлетворяющий соотношениям $0,5 < \alpha_n \leq 1$. Последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ представляет собой строго убывающую ограниченную последовательность, предел которой равен $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0,5$.

Формулировка теоремы 1 уточняет (в частности, для случая $n=1$) соответствующий результат, приведенный в работе [12].

Ответ на второй основной вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет единственное оптимальное решение: $x^* = \alpha_n \in (0,5; 1]$, где α_n – корень уравнения $x^n - 2 \cdot x + 1 = 0$, удовлетворяющий соотношениям $0,5 < \alpha_n \leq 1$. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет единственное оптимальное решение $x^* = \frac{1}{\alpha_n} = \beta_n \in [1; 2)$. При достаточно

больших натуральных значениях n геометрическая прогрессия Фишберна задает приближительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП. Для геометрических прогрессий Фишберна справедливо предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\hat{\mathbf{q}}) = \ln 4 \approx 1,386294$.

Формулировка теоремы 2 уточняет (для случая $n=1$) соответствующий результат, приведенный в работе [20].

Как видно из таблицы 3, значения элементов последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ весьма быстро приближаются к своим предельным значениям.

Таблица 3. Значения элементов последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ для $n = \overline{1, 5}$

n	α_n	β_n
1	1	1
2	1	1
3	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618034$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$
4	$\frac{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1}{3} \approx 0,543689$	$\frac{3}{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1} \approx 1,839287$
5	0,518790	1,927562

Интересно, что значение β_3 совпало со значением отношения «золотого сечения», которое еще в античности считалось самым эстетически благоприятным отношением.

Приведем примеры обобщенных геометрических прогрессий Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ для случаев, когда знаменатели геометрических прогрессий (9) равняются α_n или β_n (таблица 4), где все вычисления выполнены с точностью до 0,0001.

Таблица 4. Примеры обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, максимизирующих значение энтропии Шеннона

n		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$H(\hat{q})$
1	$x = \alpha_1$	1	—	—	—	0
	$x = \beta_1$	1	—	—	—	0

$n \backslash$		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$H(\hat{\mathbf{q}})$
2	$x = \alpha_2$	0,5	0,5	–	–	0,6931
	$x = \beta_2$	0,5	0,5	–	–	0,6931
3	$x = \alpha_3$	0,5	0,3090	0,1910	–	1,0257
	$x = \beta_3$	0,1910	0,3090	0,5	–	1,0257
4	$x = \alpha_4$	0,5	0,2718	0,1478	0,0804	1,1858
	$x = \beta_4$	0,0804	0,1478	0,2718	0,5	1,1858

4. Последовательности Фишберна

Рассмотрим метод построения произвольной последовательности, удовлетворяющей простому ЛОП и задающей распределение вероятностей, который был предложен в работе А.В. Сигала [13]. Пусть $\{a_j\}_{j=1}^n$ – произвольная монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, т. е. справедливы соотношения $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_j \geq \dots \geq a_n \geq 0$ или $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_j \leq \dots \leq a_n$, при этом $\sum_{j=1}^n a_j > 0$, тогда последовательность $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, где

$$(11) \quad \hat{q}_j = \frac{a_j}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad j=1, \dots, n,$$

удовлетворяет и простому ЛОП, и всем требованиям (1) и (2).

Определение. Последовательностью Фишберна будем называть последовательности $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, значения элементов которых задаются формулами (11), в которых участвуют элементы монотонной последовательности неотрицательных чисел $\{a_j\}_{j=1}^n$, сумма которых является положительным числом, при этом последовательность $\{a_j\}_{j=1}^n$ будем называть *последова-*

тельностью, производящей последовательность Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$.

Очевидно, свойства последовательности Фишберна и последовательности, ее производящей, совпадают. В частности, последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно обладают одноименным свойством монотонности. Например, последовательность Фишберна является неубывающей (возрастающей) последовательностью тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, является неубывающей (возрастающей, соответственно) последовательностью. Аналогичное утверждение справедливо про невозрастание (убывание) последовательности Фишберна. Последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно могут представлять собой прогрессию (арифметическую или геометрическую, соответственно). Кроме того, любая последовательность Фишберна и любая последовательность, производящая последовательность Фишберна, всегда удовлетворяет простому ЛОП. Наконец, последовательность Фишберна удовлетворяет частично усиленному ЛОП тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, удовлетворяет частично усиленному ЛОП.

На первый взгляд формула (11) полностью совпадает с третьей формулой Фишберна (см., например, [26, с. 85]), применяемой для вычисления значений точечных оценок Фишберна, удовлетворяющих усиленному ЛОП. На самом деле, введенное понятие последовательностей Фишберна определяет класс последовательностей, являющийся гораздо более широким, чем класс последовательностей, элементы которых вычисляются по третьей формуле Фишберна. Во-первых, значения $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$, вычисленные согласно третьей формуле Фишберна, обязательно будут удовлетворять усиленному ЛОП, а для последовательностей Фишберна этого не требуется. Во-вторых, третья формула Фишберна (кстати, как и вторая формула Фишберна) применяется совместно с дополнительными предположениями о справедливости соотношений, в которых участвуют

величины $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$ и некий параметр λ , а для последовательностей Фишберна этого не требуется. В-третьих, любые значения $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$, вычисленные по первой формуле Фишберна (т. е. элементы арифметических прогрессий Фишберна), или по второй формуле Фишберна (т. е. элементы геометрических прогрессий Фишберна), или по третьей формуле Фишберна (т. е. оценки Фишберна для случая усиленного ЛОП) – это частные случаи последовательностей Фишберна. В-четвертых, класс последовательностей Фишберна содержит последовательности, не являющиеся ни прогрессиями Фишберна (элементы которых вычисляются по первой или второй формуле Фишберна), ни последовательностями, элементы которых вычисляются по формуле точечных оценок Фишберна для случая усиленного ЛОП (т. е. вычисляются по третьей формуле Фишберна).

Именно последовательности Фишберна можно использовать в качестве оценок распределения вероятностей состояний экономической среды, при этом в качестве последовательности, производящей последовательность Фишберна с желаемыми свойствами, ЛПР следует выбирать последовательность, обладающую этими же желаемыми свойствами. В качестве таких последовательностей, производящих последовательности Фишберна, можно выбирать, например, прогрессии, числа Фибоначчи и другие известные последовательности натуральных чисел.

Понятно, что и прогрессии Фишберна, и обобщенные прогрессии Фишберна – это частные случаи последовательностей Фишберна.

В таблице 5 приведены примеры (для $n=4$) последовательностей Фишберна, порожденных производящими последовательностями, элементами которых являются 1) константа (равная, например, числу 1); последовательные первые 2) натуральные числа; 3) числа Фибоначчи [23, с. 98]; 4) числа Мерсенна [23, с. 32-33]; 5) числа Евклида [23, с. 32]; 6) числа Ферма [23, с. 33]. В таблице 5 последовательности упорядочены по убыванию значений энтропии.

Таблица 5. Примеры (для $n = 4$) последовательностей Фишберна

№ п/п	Производящая последовательность	Последовательность Фиш- берна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^4$, найденная по формуле (11)	$H(\hat{\mathbf{q}})$
1.	{ 1; 1; 1; 1 }	{ 0,25; 0,25; 0,25; 0,25 }	$\ln 4 \approx 1,3863$
2.	{ 1; 2; 3; 4 }	{ 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 }	1,2799
3.	{ 1; 1; 2; 3 }	$\left\{ \frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7} \right\}$	1,2770
4.	{ 1; 3; 7; 15 }	$\left\{ \frac{1}{26}; \frac{3}{26}; \frac{7}{26}; \frac{15}{26} \right\}$	1,0451
5.	{ 2; 3; 7; 43 }	$\left\{ \frac{2}{55}; \frac{3}{55}; \frac{7}{55}; \frac{43}{55} \right\}$	0,7340
6.	{ 3; 5; 17; 257 }	$\left\{ \frac{3}{282}; \frac{5}{282}; \frac{17}{282}; \frac{257}{282} \right\}$	0,3738

Легко заметить, что все последовательности Фишберна, приведенные в таблице 5, удовлетворяют простому ЛОП, в то время, как частично усиленному ЛОП удовлетворяют только три последние из них.

Следует учитывать, что монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, однозначно определяет соответствующую последовательность Фишберна, но для любой последовательности Фишберна последовательность, ее порождающая, определена неоднозначно. Справедливо следующее утверждение [21].

Теорема 3. Для любой последовательности Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ существует единственная с точностью до постоянного положительного множителя последовательность $\{a_j\}_{j=1}^n$, производящая последовательность Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$, т. е. монотонная последовательность $\{a_j\}_{j=1}^n$ неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, с использованием

которой по формуле (11) можно построить последовательность Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$.

5. Модельные ситуации принятия решений о формировании эффективного портфеля

Модель принятия управленческих решений в экономике почти всегда представляет собой задачу оптимального распределения ресурсов, т. е. диверсификацию того или иного типа. Научной основой диверсификации является современная теория портфеля (СТП), начавшаяся с работ Г. Марковица [35, 36]. СТП базируется на применении теории вероятностей и математической статистики для выбора среди эффективных портфелей такого портфеля, который обладает с точки зрения ЛПР, т. е. инвестора, оптимальным сочетанием значения доходности, измеряемой ожидаемой нормой прибыли, и значения уровня экономического риска (ЭР), измеряемого дисперсией случайной величины (СВ), характеризующей норму прибыли портфеля, или ее среднеквадратичным отклонением (СКО).

Далее везде будем использовать следующие обозначения: k – количество активов, составляющих портфель; x_i – доля актива i -го вида в портфеле; $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k)$ – портфель (точнее, его структура); R_i – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли актива i -го вида; $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i$ – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли портфеля $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k)$; $m_i = \mathbf{M}(R_i)$ и $m_{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(R_{\mathbf{x}})$ – ожидаемые нормы прибыли активов и портфеля, т. е. математические ожидания соответствующих СВ; $\sigma_i^2 = \mathbf{D}(R_i)$ и $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}})$ – уровни ЭР активов и портфеля, измеренные значениями дисперсий соответствующих СВ; σ_i , $\sigma_{\mathbf{x}}$ – СКО соответствующих СВ.

Если закон распределения вероятностей СВ R_i , характеризующей норму прибыли актива i -го вида, известен полностью, то это означает, что имеет место первая ИС [26, с. 13], когда известны точные истинные значения и возможных значений r_{ij}

соответствующих дискретных СВ, и вероятностей $q_j = P(R_i = r_{ij})$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$. В этом случае точные истинные значения числовых характеристик всех дискретных СВ R_i могут быть вычислены по формулам, хорошо известным из теории вероятностей.

Т. к. для реальных активов точные истинные значения r_{ij} и q_j неизвестны, то на практике вместо неизвестных значений r_{ij} используют значения норм прибыли этих активов, наблюдавшиеся в прошлые периоды времени, а вместо неизвестных значений числовых характеристик соответствующих СВ используют значения их точечных оценок, что, по сути, означает использование равномерного закона: $\hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n}$, $j = 1, \dots, n$.

С точки зрения математической статистики, использование оценки распределения вероятностей, представляющей собой равномерный закон, является общепринятым и обоснованным. В частности, в этом случае статистические оценки значений числовых характеристик обладают хорошо известными статистическими свойствами. Например, выборочное среднее и исправленная выборочная дисперсия являются несмещенными точечными оценками соответствующих параметров. Более того, как отмечалось выше, среди всех возможных оценок законов распределения вероятностей значение энтропии Шеннона максимизирует именно последовательность $\hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n}$, $j = 1, \dots, n$,

т. е. равномерный закон отвечает принципу Гиббса–Джейнса.

Однако в экономических исследованиях необходимо учитывать тот факт, что ситуация, сложившаяся в более поздний момент времени, оказывает большее влияние на нынешнюю и/или будущую ситуацию, чем ситуация, сложившаяся в более ранний момент времени. Следовательно, используя статистические данные, собранные в прошлые моменты времени, для оценки распределения вероятностей целесообразно использовать законы, отличные от равномерного, при этом оценки значений вероятностей должны удовлетворять простому ЛОП, а в случае, когда состояние экономики характеризуется высокой

динамичностью (т. е. быстрой изменчивостью), – частично усиленному ЛОП.

Согласно СТП традиционная модель Марковица задачи поиска эффективного портфеля представляет собой задачу двухкритериальной оптимизации. Как показано в работах А.В. Сигала [10; 12; 14-17], теория игр (в конечномерном случае теория матричных игр) позволяет обобщить традиционную модель Марковица на случай, когда не известны значения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка). Обобщенные модели задачи поиска эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом их вид зависит от имеющей место ИС относительно неопределенности поведения экономической среды. Если имеет место четвертая ИС, когда о возможных значениях вероятностей состояний экономической среды нет никакой математической информации, то можно применить энтропийный подход [15, с. 35]. В работе А.В. Сигала [14] введено понятие *эффективного портфеля в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения вероятностей состояний*, а также обоснована возможность теоретико-игрового поиска структуры такого портфеля (разумеется, в случае выполнения определенных требований).

Обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле третьей ИС [10] представляют собой, по сути, обобщенную модель Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле четвертой ИС с дополнительными ограничениями для возможных значений вероятностей $q_1, \dots, q_n$. Обобщенная модель Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле третьей ИС может быть приведена к традиционной модели Марковица именно за счет применения последовательностей Фишберна.

Рассмотрим модельную ситуацию. Имеются результаты наблюдений за значениями норм прибылей активов $k=2$ видов за $n=4$ периода:

$$(12) \mathbf{R} = \mathbf{R}_{2 \times 4} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти множества эффективных портфелей для случаев, когда в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) используются последовательности Фишберна, приведенные в таблице 5.

Здесь ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует статистическая игра, заданная матрицей (12).

Эта модельная ситуация кратко разобрана в статьях [7, 19]. Полученные результаты приведены в таблице 6, при этом точка $A(\sigma_1; m_1)$ соответствует однородному портфелю $e_1 = (1; 0)$, состоящему только из первого актива, точка $B(\sigma_2; m_2)$ – однородному портфелю $e_2 = (0; 1)$, точка $C(\sigma_x^*; m_x^*)$ – портфелю $x^* = (x^*; 1 - x^*)$ с наименьшим уровнем ЭР.

Таблица 6. Результаты расчетов для портфелей из двух активов

№ (i)		Координаты точек			x^*	Множество эффективных портфелей $X^{\text{эфф.}}$
		A	B	C		
1.	σ	12,19	12,72	3,28	0,5115	$\{x = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^*\}$
	m	15,01	23,74	19,27		
2.	σ	10,76	11,75	3,30	0,5239	$\{x = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^*\}$
	m	15,22	22,44	18,66		
3.	σ	9,94	10,28	3,34	0,5096	$\{x = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^*\}$
	m	17,11	20,90	18,97		
4.	σ	8,92	9,32	3,17	0,5128	$\{x = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^*\}$
	m	17,52	20,45	18,95		
5.	σ	6,76	6,47	2,39	0,4875	$\{x = (x; 1 - x) \mid x^* \leq x \leq 1\}$
	m	20,47	19,54	19,99		
6.	σ	4,18	3,78	1,68	0,4693	$\{x = (x; 1 - x) \mid x^* \leq x \leq 1\}$
	m	21,97	18,94	20,36		

Очевидно, результаты, полученные для $i=5$ и $i=6$, когда множества эффективных портфелей имеют вид

$X^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid x^* \leq x \leq 1 \right\}$, кардинально отличаются (по составу и структуре множеств эффективных портфелей) от первых четырех случаев, в которых множества эффективных портфелей имеют вид $X^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \right\}$.

Для наглядности изобразим на плоскости $\sigma_x 0 m_x$ области, соответствующие множествам допустимых портфелей, для случаев, когда в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) используются последовательности Фишберна, порожденные производящими последовательностями, элементами которых являются константа ($i = 1$), числа Ферма ($i = 6$), см. рис. 1 и 2.

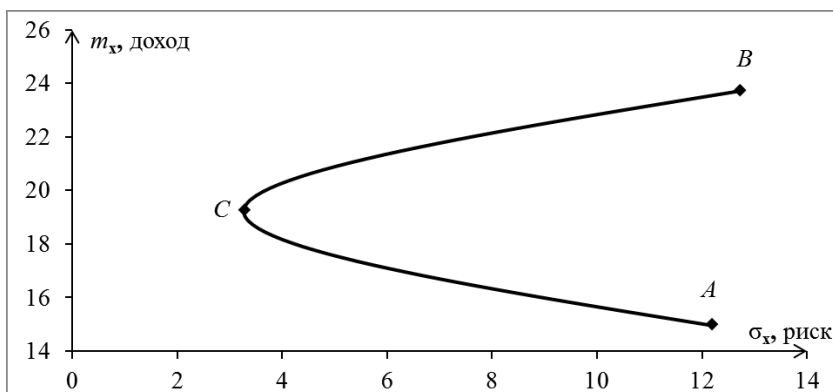


Рис. 1. Допустимые (гипербола ACB) и эффективные (дуга CB этой гиперболы) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – константа

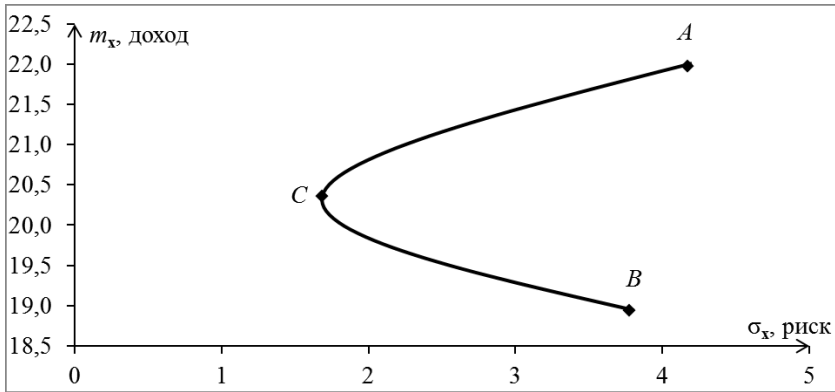


Рис. 2. Допустимые (гипербола ВСА) и эффективные (дуга СА этой гиперболы) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые числа Ферма

Рассмотрим еще одну модельную ситуацию. Имеются результаты наблюдений норм прибылей активов $k=6$ видов за $n=4$ периода:

$$(13) \mathbf{R} = \mathbf{R}_{6 \times 4} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 6,67 & -5,00 & 7,89 & -2,44 \\ 2,00 & 17,65 & 11,67 & 31,34 \\ 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \\ 40,19 & 7,33 & 42,86 & -8,70 \\ -16,67 & 50,00 & -6,67 & 28,57 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить на плоскости σ_x и m_x области, соответствующие множествам допустимых портфелей, для случаев, когда в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) используются последовательности Фишберна, приведенные в таблице 5.

Здесь ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует статистическая игра, заданная матрицей (13).

Эта модельная ситуация кратко разобрана в статье Е.С. Ремесник [8], а с точки зрения применения теоретико-игрового подхода – в работе А.В. Сигала [14]. Применяя теорию игр, находим портфель $\mathbf{x}^* \approx (0; 0,3321; 0,2091; 0,2687; 0,1901; 0)$ без риска, который является эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения вероятностей состояний экономической среды. На критериальной плоскости $\sigma_x 0 m_x$ этому портфелю $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ соответствует точка $C_0(\sigma_x^*; m_x^*) \approx (0; 18,602)$.

На рис. 3-8 на критериальной плоскости $\sigma_x 0 m_x$ отмечены 8 точек: точки $A_1(\sigma_1; m_1), \dots, A_6(\sigma_6; m_6)$, соответствующие однородным портфелям $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0; 0; 0; 0), \dots, \mathbf{e}_6 = (0; 0; 0; 0; 0; 1)$ (их расположение зависит от применяемой оценки распределения вероятностей), а также 2 точки, расположенные, на оси $0 m_x$, $C_0(\sigma_x^*; m_x^*) \approx (0; 18,602)$ и $C_1(0; m_x^{**})$, соответствующая портфелю без риска, обладающему наименьшим значением ожидаемой нормы прибыли среди всех безрисковых портфелей. Отрезок $C_0 C_1$ соответствует множеству всех безрисковых портфелей, при этом расположение нижней точки $C_1(0; m_x^{**})$ этого отрезка зависит от применяемой оценки распределения вероятностей, а расположение верхней точки $C_0(\sigma_x^*; m_x^*) = (0; 18,602)$ этого отрезка остается неизменным и не зависит от применяемой оценки распределения вероятностей. Очевидно, для любой оценки распределения вероятностей справедливо неравенство $m_x^{**} \leq m_x^* \approx 18,602$.

На рис. 3-8 граница области, соответствующей множеству допустимых портфелей, определяется пятью-шестью точками из восьми отмеченных точек и представляет собой совокупность дуг нескольких гипербол и отрезка $C_0 C_1$, а область, соответствующая множеству эффективных портфелей, определяются дугой гиперболы, расположенной на северо-западной границе области, соответствующей множеству допустимых портфелей.

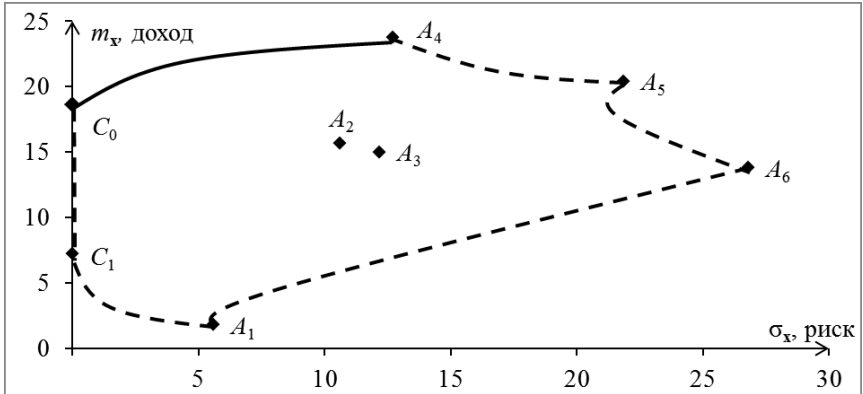


Рис. 3. Допустимые (область $A_1 A_6 A_5 A_4 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_4$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – константа

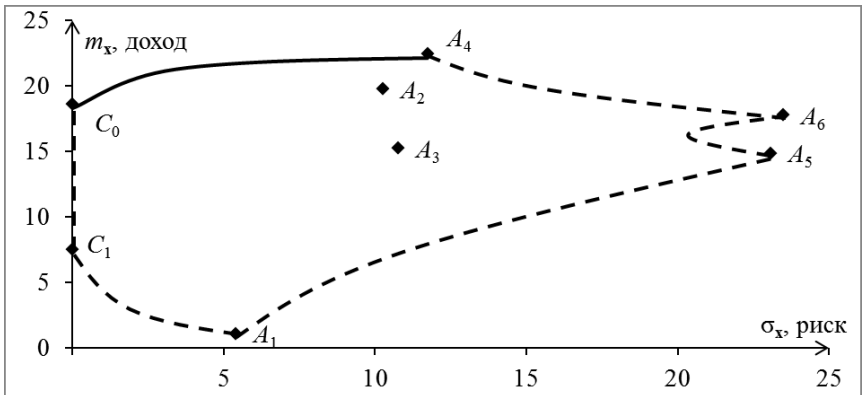


Рис. 4. Допустимые (область $A_1 A_5 A_6 A_4 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_4$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые натуральные числа

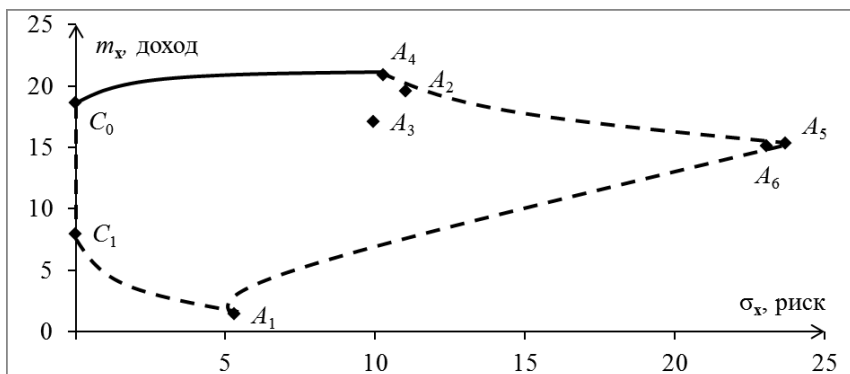


Рис. 5. Допустимые (область $A_1 A_5 A_4 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_4$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые числа Фибоначчи

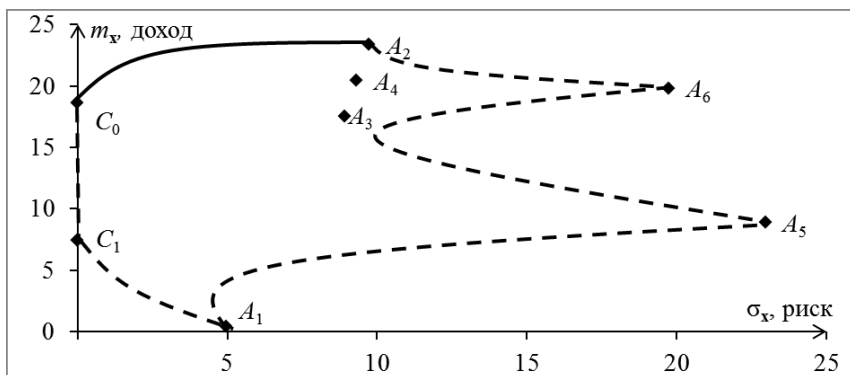


Рис. 6. Допустимые (область $A_1 A_5 A_6 A_2 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_2$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые числа Мерсенна

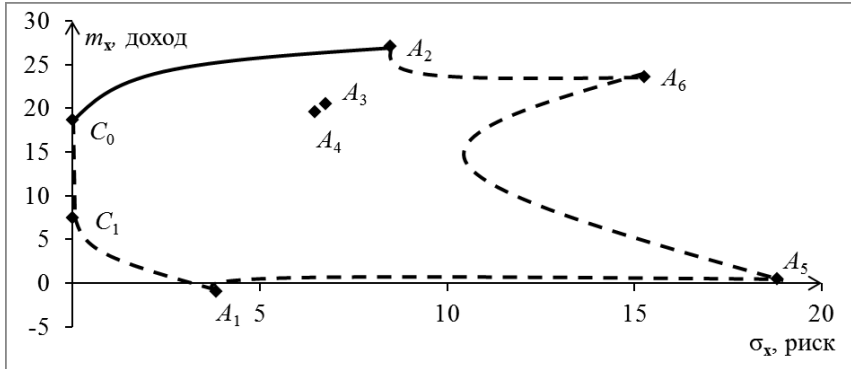


Рис. 7. Допустимые (область $A_1 A_5 A_6 A_2 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_2$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые числа Евклида

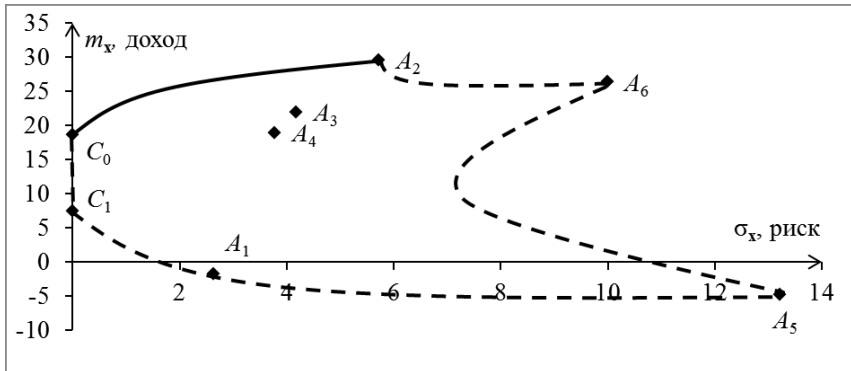


Рис. 8. Допустимые (область $A_5 A_6 A_2 C_0 C_1$) и эффективные (дуга $C_0 A_2$ границы этой области) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой – первые числа Ферма

Итак, в рассмотренных задачах ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует

статистическая игра. Абрахам Вальд, основоположник последовательного анализа [1], основной моделью теоретико-игрового принятия решений считал статическую модель принятия решений, которая, собственно, и является статистической игрой. При решении статистической игры важно корректно оценить распределение априорных вероятностей состояний «природы», т. е. экономической среды. Для корректной оценки распределения априорных вероятностей можно применять последовательности Фишберна, при этом окончательный выбор конкретной оценки распределения априорных вероятностей зависит от мнения ЛПР относительно того, какими свойствами должна обладать применяемая оценка вероятностей и, в частности, того, какому типу ЛОП должна удовлетворять эта оценка. Кроме того, в ситуациях принятия решений о формировании эффективного портфеля целесообразно применять концепцию комбинированного применения статистических и антагонистических игр подобно подходу, изложенному в статье [14], например, с целью поиска портфеля, эффективного для любого распределения вероятностей. Наиболее полно концепция комбинированного применения статистических и антагонистических игр изложена в монографии А.В. Сигал [17].

6. Заключение

В статье введено несколько новых понятий, наиболее важными из которых являются следующие два: последовательность Фишберна и последовательность, производящая последовательность Фишберна. Последовательность Фишберна – это монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых равна 1, а последовательность, производящая последовательность Фишберна, – это монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом. В случае, когда принятие решений характеризует статистическая игра, требуется корректно оценить распределение вероятностей состояний экономической среды. Для корректной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды возможно применение последовательностей Фишберна.

Собственно, корректную оценку распределения вероятностей состояний экономической среды можно осуществлять следующим образом. На первом этапе лицо, принимающее решения (ЛПР), согласно своему собственному мнению определяет, какому типу линейных отношений порядка (ЛОП) должны удовлетворять неизвестные значения вероятностей. На втором этапе ЛПР (согласно своему собственному мнению) определяет, какую известную последовательность целесообразно использовать в качестве последовательности, порождающей последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами. На третьем этапе ЛПР оценивает распределение вероятностей соответствующей последовательностью Фишберна. На четвертом этапе, применяя построенную последовательность Фишберна как оценку неизвестного распределения вероятностей, ЛПР вычисляет значения оценок числовых характеристик случайных величин, характеризующих выбранные показатели экономической эффективности. На пятом, заключительном, этапе ЛПР (согласно своему собственному мнению) выбирает оптимальное решение, обладающее наилучшим сочетанием вычисленных значений числовых характеристик случайных величин, характеризующих выбранные показатели экономической эффективности.

Выбирая последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться рассмотрением такого наиболее важного и достаточно обширного класса, как обобщенные прогрессии Фишберна: в случае простого ЛОП можно ограничиться рассмотрением обобщенных арифметических прогрессий Фишберна, а в случае частично усиленного ЛОП – обобщенных геометрических прогрессий Фишберна. Наконец, если ЛПР считает необходимым придерживаться принципа Гиббса–Джейнса максимума энтропии, то в качестве оценки неизвестного распределения вероятностей следует использовать или соответствующий равномерный закон (частный случай обобщенной арифметической прогрессии Фишберна) в случае простого ЛОП, или соответствующую обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна, максимизирующую значение энтропии Шеннона, в случае частично усиленного ЛОП.

Авторы считают, что понятия, введенные в статье, можно применять в современной теории портфеля. Последовательности Фишберна обобщают формулы, предложенные в середине 60-х годов прошлого века Питером Фишберном. Показательно и в чем-то символично, что именно в результате попытки применения теории Питера Фишберна, изложенной им в статье (32), в 80-90-е годы прошлого века возникло обобщение современной теории портфеля (*MPT* от *Modern Portfolio Theory*), называемое постмодернистской теорией портфеля (*PMPT* от *Post-Modern Portfolio Theory*).

В качестве последовательностей, производящих последовательности Фишберна, можно использовать не только прогрессии, но и такие последовательности, как числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма. ЛПР может применить в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды такую последовательность Фишберна, порожденную выбранной им последовательностью, которая с его собственной точки зрения представляет собой наилучшую оценку распределения вероятностей.

Заметим, что к случаям, когда целесообразно применять последовательности Фишберна, удовлетворяющие частично усиленному ЛОП, можно отнести ситуации, когда в качестве статистических данных используются динамические ряды, а сами динамические изменения характеризуются быстрыми темпами. К таким случаям можно отнести, например, кризисные и предкризисные ситуации, ситуации резкого роста национальной экономики или соответствующего сектора экономики, а в случае задачи поиска эффективного портфеля ситуации, когда деятельность эмитентов выбранных активов характеризуется резкими преобразованиями.

Используемая оценка распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) существенно влияет на значения числовых характеристик активов и портфелей, на вид (как на состав, так и на структуру) множеств допустимых и эффективных портфелей, а также на вид областей критериальной плоскости, соответствующих этим двум множествам. Следовательно, выбор оптимального решения существенно

зависит от используемой оценки распределения вероятностей. Даже в случае существования портфеля, эффективного для любого распределения вероятностей, если уровень доходности портфеля, эффективного для любого распределения вероятностей, не удовлетворяет ЛПР, то ему следует продолжить поиск эффективного портфеля, сочетание значений числовых характеристик которого является для него наиболее предпочтительным. Но оптимальный (с точки зрения ЛПР) портфель следует выбирать из множества эффективных портфелей а, как отмечалось выше, используемая оценка распределения вероятностей состояний экономической среды существенно влияет на вид (как на состав, так и на структуру) множества эффективных портфелей.

Применение последовательностей Фишберна, отличных от равномерного закона, для оценки распределения вероятностей влечет потерю статистических свойств, в том числе и свойства несмещенности, точечных оценок числовых характеристик случайных величин, но в экономических исследованиях позволяет учесть различную степень влияния на будущее развитие экономических систем, которое оказывают события, происходившие в различные прошлые моменты времени.

Проведенное исследование позволяет прийти к выводу о наличии преимуществ применения в экономических исследованиях (например, при решении статистических игр, характеризующих ситуацию принятия решений) последовательностей Фишберна, отличных от равномерного закона, как оценки распределения вероятностей состояний экономической среды.

Окончательный выбор конкретной последовательности Фишберна, которую следует использовать в качестве оценки распределения вероятностей, осуществляет ЛПР. Этот выбор зависит от рассматриваемой задачи принятия решений, имеющей место ситуации, собственных предпочтений ЛПР и его представлений (мнения) о том, какими свойствами должна обладать оценка распределения вероятностей и, в частности, какому типу ЛОП она должна подчиняться.

Литература

1. ВАЛЬД А. *Последовательный анализ*; пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1960. – 328 с.
2. ЛИВШИЦ В.Н., СИГАЛ А.В. *Об энтропийном анализе переходной экономики* // Экономика и математические методы. – 2014. – Т. 50. – № 3. – С. 86-104.
3. МАКАРОВА И.Л. *Анализ методов определения весовых коэффициентов в интегральном показателе общественного здоровья* // Международный научный журнал «Символ науки». – 2015. – № 7. – С. 87-94.
4. НЕДОСЕКИН А.О. *Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний*: Автореф. ... д-ра экон. наук: 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики». – СПб, 2003. – 37 с.
5. ПОТАПОВ Д.К., ЕВСТАФЬЕВА В.В. *О методиках определения весовых коэффициентов в задаче оценки надежности коммерческих банков* [Электронный ресурс]. – 2015. – URL: <http://www.ibl.ru/konf/041208/60.pdf>.
6. РАЧ Д.В. *Метод освоенного объема в задачах управления рисками в проектах* // Управление проектами и развитие производства. – 2011. – № 4 (40). – С. 124-134.
7. РЕМЕСНИК Е.С. *Зависимость множества эффективных портфелей от оценки распределения вероятностей экономической среды* // Научный вестник: финансы, банки, инвестиции. – 2018. – № 3 (44). – С. 165-173.
8. РЕМЕСНИК Е.С. *Зависимость множества эффективных портфелей, допустимых в модели Марковица, от оценки распределения вероятностей экономической среды* // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем (АМУР-2018): сб. науч. тр. XII Межд. школы-симпозиума АМУР-2018 (Судак, 14-27 сентября 2018). – 2018. – С. 381-391.
9. САЗОНОВ А.Е., ОСИПОВ Г.С., КЛИМЕНКО В.Д. *Использование метода экспертных отношений предпочтения для оценки уровня совершенства системы управления безопас-*

- ностью морского судна // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2013. – № 3 (20). – С. 94-104.
10. СИГАЛ А.В. *Комбинированное применение статистических и антагонистических игр в теории портфеля* // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – № 6. – С. 91-112.
 11. СИГАЛ А.В. *О последовательностях, удовлетворяющих простому и частично усиленному линейным отношениям порядка* // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: труды Междунар. науч. школы МА БР-2015 (СПб, 17-19 ноября, 2015). – 2015. – С. 77-84.
 12. СИГАЛ А.В. *О приведении обобщенной модели Марковица в поле третьей информационной ситуации к классической модели Марковица* // Системный анализ и информационные технологии: Труды Седьмой Международной конференции САИТ-2017 (13-18 июня 2017, Светлогорск). – 2017. – С. 159-167.
 13. СИГАЛ А.В. *О произвольной последовательности, удовлетворяющей простому линейному отношению порядка* // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики. Труды XVI Международной научно-практической конференции. Симферополь-Гурзуф, 19-21 октября 2017. – 2017. – С. 67.
 14. СИГАЛ А.В. *Об эффективности портфелей, найденных теоретико-игровым методом* // Экономика и математические методы. – 2018. – Т. 54. – Вып. 1. – С. 125-144.
 15. СИГАЛ А.В. *Основы современной теории портфеля ценных бумаг: Учебное пособие.* – Симферополь: КЭИ КНЭУ, 1998. – 60 с.
 16. СИГАЛ А.В. *Применение теории игр в теории портфеля* // Машинная обработка информации: Межвед. научн. сборн. – 1998. – Вып. 61. Киев: КНЭУ. – С. 154-160. (на укр. яз.)
 17. СИГАЛ А.В. *Теория игр для принятия решений в экономике: монография.* – Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 308 с.
 18. СИГАЛ А.В., МАКЕЕВА Г.Н. *Обобщенные прогрессии Фишберна* // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем (АМУР-2015): сб. науч.

- тр. IX Межд. школы-симпозиума АМУР-2015 (Севастополь, 12-21 сентября 2015). – 2015. – С. 343-350.
19. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *Зависимость множества эффективных портфелей от применяемого закона распределения вероятностей* // Теория и практика экономики и предпринимательства / Труды Юбилейной XV Междунар. науч.-практ. конф. Симферополь-Гурзуф, 19-21 апреля 2018. – 2018. – С. 66-70.
 20. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *О корректном применении обобщенных прогрессий Фишберна для принятия решений в экономике на основе принципа Гиббса–Джейнса* // Аудит и финансовый анализ. – 2017. – № 5-6. – С. 568-581.
 21. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *Последовательности, удовлетворяющие линейным отношениям порядка: применение в экономике и свойства* // Друkerовский вестник. 2018. – № 1. – С. 44-58.
 22. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *Последовательности Фишберна и их применение в современной теории портфеля: монография.* – Симферополь: Корниенко А. А., 2018. – 204 с.
 23. СИГАЛ А.В., ЯЦЕНКО Л.Ф. *Конкретная математика: учебное пособие.* – Симферополь: ДИАЙПИ, 2012. – 204 с.
 24. СИДОРЕНКО Л.Ж. *Методы оценки финансовой устойчивости предприятий малого бизнеса и факторов, влияющих на нее, в условиях современной России: Автореф. ... канд. экон. наук: 08.00.10 – «Финансы, денежное обращение и кредит».* – Майкоп, 2011. – 27 с.
 25. СОМОВ В.Л., ТОЛМАЧЕВ М.Н. *Методы определения коэффициентов весомости динамических интегральных показателей* // Вопросы статистики. – 2017. – № 6. – С. 74-79.
 26. ТРУХАЕВ Р.И. *Модели принятия решений в условиях неопределенности.* – М.: Наука, 1981. – 258 с.
 27. ТЮТЮКИНА Е.Б., КАПРАНОВА Л.Д., СЕДАШ Т.Н. *Определение приоритетных направлений и инвестиционной поддержки развития российской экономики* // Экономический анализ: теория и практика. – 2014. – № 38 (389). – С. 2-11.

28. ФИШБЕРН П. *Теория полезности для принятия решений*; пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
29. FISHBURN P.C. *Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities* // *Operations Research*. – 1965. – Vol. 13. – No. 2. – P. 217-237.
30. FISHBURN P.C. *Decision and Value Theory*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1964. – 451 p.
31. FISHBURN P.C. *Independence in Utility Theory with Whole Product Sets* // *Operations Research*. – 1965. – Vol. 13. – No. 1. – P. 28-45.
32. FISHBURN P.C. *Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns* // *The American Economic Review*. 1977. – Iss. 67 (2). – P. 116–126.
33. FISHBURN P.C. *Utility Theory for Decision Making*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1970. – 234 p.
34. MACHINA M., SINISCALCHI M. *Ambiguity and Ambiguity Aversion* // *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty*. – Vol. 1. – 2014. – P. 729-807.
35. MARKOWITZ H.M. *Portfolio Selection* // *Journal of Finance*. 1952. March. – Vol. 7. – No. 1. – P. 77-91.
36. MARKOWITZ H.M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1959. – 384 p.

ESTIMATES OF PROBABILITY DISTRIBUTION BY FISHBURNE SEQUENCES: NECESSITY AND BENEFITS

Anatoliy Sigal, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Doct.Sc., professor (ksavo3@gmail.com).

Elena Remesnik, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, assistant (es2704@mail.ru).

Abstract: The concept of Fishburn sequences is introduced in the paper, one of the most important properties of which is that they always satisfy a simple linear order relation, and under certain conditions, a partially strengthened linear order relation. The necessity of using Fishburn sequences to estimate the probability distribution in economic research is substantiated. Special attention is paid to the use of Fishburn sequences in modern portfolio theory. The study allows us to conclude

that there are advantages of using economic studies (for example, when solving statistical games that characterize a decision-making situation) of Fishburn sequences as estimates of the probability distribution compared to traditional statistical methods for estimating the probability distribution. The results of solving the problem of finding an effective portfolio using various estimates of the probability distribution showed that the used estimate of the probability distribution of the states of the economic environment (the stock market) significantly affects the values of the numerical characteristics of assets and portfolios, in the form (both the composition and the structure) of sets of admissible and effective portfolios, as well as the area of the criterion plane corresponding to these two sets. Using Fishburn sequences other than the uniform law to estimate the probability distribution implies a loss of statistical properties, including unbiasedness, point estimates of numerical characteristics of random variables, but in economic studies it allows to take into account the different degrees of influence on future development of economic systems that events have occurring at different past times.

Keywords: Fishburn sequence; linear order relations; estimate of the probability distribution; efficient portfolio search problem.

УДК 519.83

ББК 22.18

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...