

УДК 621**Моделирование логических функций в нейросетевом базисе**

В.М. Гиниятуллин

(Уфимский государственный нефтяной технический университет)

V.M. Ghiniattullin

(Ufa State Petroleum Technical University)

Реализован алгоритм обучения комплексных, паракомплексных и дуальных однослойных персептронов при моделировании логических функций. Показана квадратичная (эллиптическая, гиперболическая и параболическая) делимость всех функций булевой логики, а также гиперболическая делимость функций 3-х мерной булевой и функций смешанной (троичной на входе и двоичной на выходе) логик. Для многослойного паракомплексного персептрона описан способ перехода к эквивалентному вещественнозначному персептрону, моделирующему троичную логическую функцию. Комплект полученных результатов имеется в приложении.

In the paper discussed one learning algorithm for implementing arbitrary Boolean functions using complex, paracomplex and dual simple (single layer) perceptrons. There is showed that all Boolean functions of the 2 variables are quadratic separable and all logic functions of the 3 variables are hyperbolic separable and all mixed logic functions are hyperbolic separable. For paracomplex multi-layer perceptron is showed the method of transition to equal real perceptron implemented the model of the ternary logical function.

Введение

Актуальной проблемой нейрокомпьютерных технологий является построение оптимальной структуры нейронной сети. Для персептронов наличие скрытых слоев, считается необходимым, но задача определения количества скрытых слоев в общем виде не решена. Кроме того, требуется определить количество нейронов в каждом скрытом слое.

В данной работе решается задача моделирования логических функций нескольких переменных с использованием комплекснозначных (комплексных,

паракомплексных и дуальных) персептронов и рассматриваются преимущества этих персептронов перед вещественнозначными персептронами.

В работе [1] показано, что однослойный персептрон не может аппроксимировать 2 из 16 функций булевой логики (XOR и её отрицание – PARITY), изображенных на рисунке 1. Очевидно, что невозможно одной прямой линией разделить области с разными значениями функций (отделить все «квадраты» от всех «кругов»), для этого необходимы, как минимум, 2 прямых.

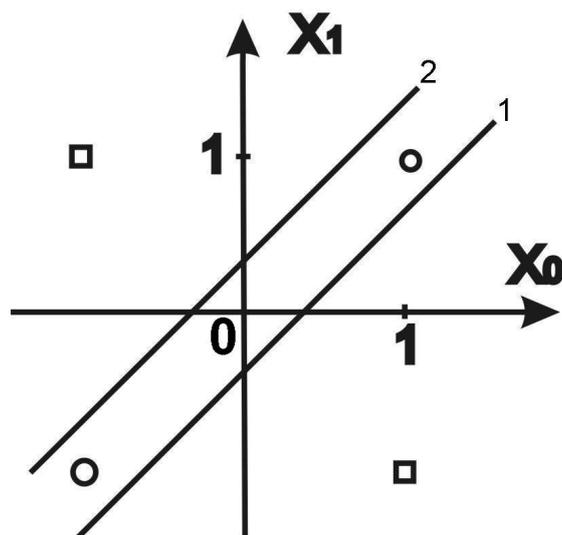


Рис. 1. Линейная неразделимость функций XOR и PARITY.

Для аппроксимации функций XOR/PARITY обычно используют персептрон с одним скрытым слоем. На рисунке 2 представлена структура персептрона со значениями весов связей (а) и график сигмоидальной функции активации (б). Функция активации может быть различной, в том числе и пороговой [2].

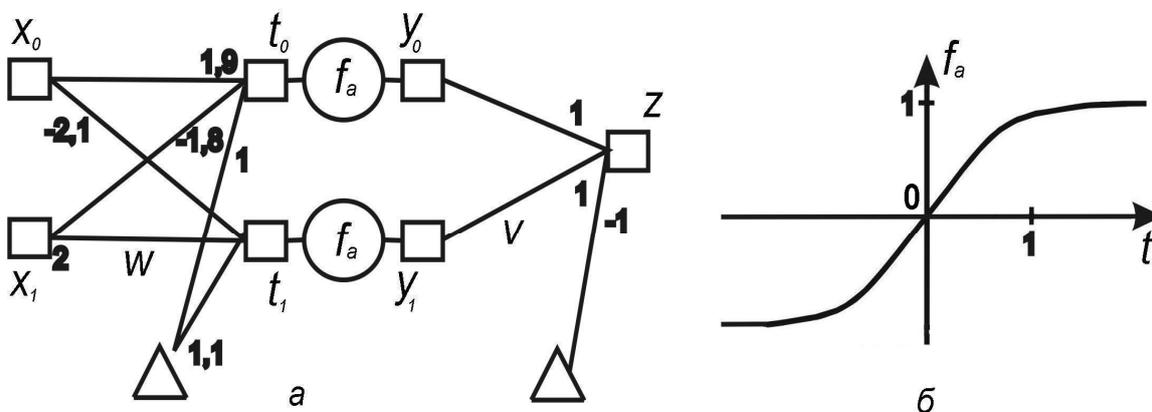


Рис. 2. Треугольниками обозначены константные входы нейронов - смещения.

Выход скрытого слоя – вектор y_i

$$t_i = \sum_{k=0}^n w_{ik} x_k, \text{ где } w_{ik} - \text{вес } k\text{-го входа } i\text{-го нейрона скрытого слоя};$$

$$y_i = f_a(t_i), \quad w_{in} - \text{вес смещения } i\text{-го нейрона скрытого слоя } (x_n = 1);$$

$$f_a - \text{функция активации.}$$

В данном случае, на выходе персептрона используется линейная функция активации:

$$z = \sum_{k=0}^n v_k y_k; \quad \text{где } v_k - \text{вес } k\text{-го входа выходного нейрона};$$

$$v_n - \text{вес смещения выходного нейрона и } y_n = 1;$$

Для решения задачи XOR персептрон необходимо обучить. После обучения матрица весов связей скрытого слоя – w_{ik} , может иметь вид:

$$w_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты матрицы задают уравнений разделяющих прямых (рис. 1):

$$2 x_1 - 2 x_0 + 1 = 0 \quad (\text{прямая 1});$$

$$2 x_1 - 2 x_0 - 1 = 0 \quad (\text{прямая 2}).$$

Для проверки устойчивости функционирования персептрона можно изменить значения коэффициентов в первом знаке после запятой:

$$w_{ik} = \begin{pmatrix} 1.9 & -2.1 \\ -1.8 & 2 \\ 1 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Матрица весов выходного слоя:

$$v_k = (1 \quad 1 \quad -1).$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений, производимых персептроном над входным вектором. Элементы векторов x_2 и y_2 реализуют смещения (bias) нейронов.

Таблица 1.

Вектор входов, x_i	Вектор результатов матричного умножения, t_i	Вектор выходов скрытого слоя, y_i	Выход персептрона, z
(-1 -1 1)	(0.9 1.2)	(1 1 1)	1
(-1 1 1)	(-2.7 5.2)	(-1 1 1)	-1
(1 -1 1)	(4.7 -3.0)	(1 -1 1)	-1
(1 1 1)	(1.1 1.0)	(1 1 1)	1

Сравнение входов/выходов персептрона с таблицей истинности XOR показывает, что персептрон справляется с поставленной задачей.

Булева логика (двоичная логика 2 аргументов)

Очевидно, что можно разделить все области с разными значениями логической функции (рис. 1) одной линией II порядка. Всего линий II порядка существует три вида: эллипсы, гиперболы и параболы [3]. Следовательно, необходимо найти способ моделирования функций булевой логики используя, в качестве разделяющей, одну линию II порядка.

Если в составе функции активации использовать модули комплексных, паракомплексных и дуальных чисел, то разделяющие линии должны быть эллипсами, гиперболами и параболоми соответственно [4]. При этом вещественнозначный вектор входов умножается на комплекснозначный вектор весов связей, в результате получается комплексное число, которое является аргументом функции активации. Функция активации представляет собой композицию модуля с пороговой функцией активации, её значение – вещественное число.

Функция, обратная модулю комплексного числа, не является однозначной, поэтому известные алгоритмы обучения нейронных сетей, в том числе и ранее использованный нами алгоритм Сударикова [5, 6], требуют модификации. Так как по результату суммирования невозможно определить слагаемые, поэтому значение аргумента функции активации необходимо симулировать.

Симуляция значения аргумента функции активации выполняется следующим образом: обозначим требуемое значение модуля через t , действительную компоненту аргумента через a , мнимую через b , тогда можно записать:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} = m; & \quad a^2 + b^2 = m^2; \\ a^2 = \gamma * m^2; & \quad b^2 = \beta * m^2.\end{aligned}$$

Выбор значений коэффициентов γ и β производится так, чтобы их сумма была равна единице ($\gamma = 0,75, \beta = 0,25$). Чтобы не потерять знаки перед компонентами комплексного числа, перечисляются все возможные комбинации:

$$a + i*b; \quad a - i*b; \quad -a + i*b; \quad -a - i*b$$

Таким образом, формируются 4 возможных значения аргумента, и на каждой итерации алгоритма обучения осуществляется проверка всех комбинаций.

Алгоритм обучения реализован с использованием шаблона комплексного числа (размещенного на сайте karataev.nm.ru). С его помощью получены весовые коэффициенты для 16 булевых функций, и тем самым создан работоспособный комплекснозначный нейрон.

Шаблон комплексного числа был модифицирован для реализации паракомплексных и дуальных нейронов. Паракомплексная симуляция аргумента:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b^2} = m; & \quad a^2 - b^2 = m^2; \\ a^2 = \gamma * m^2; & \quad b^2 = m^2.\end{aligned}$$

Значение коэффициента γ принимается равным 2.

Дуальная симуляция аргумента:

$$\sqrt{a^2} = m; \quad a^2 = m^2$$

Результаты симуляции показывают, что булевые функции можно моделировать и комплексными и паракомплексными и дуальными числами (рис. 3..8). Комплект полученных результатов имеется в приложении.

На рисунках 3-8 представлены результаты моделирования булевых функций с использованием разделяющих линий II порядка. Светлые области соответствуют значениям модуля меньше 0,8, в самых темных областях значение модуля больше 1,0 («круги» должны находиться в светлых областях). В верхнем левом углу рисунка приведены номер функции, название алгебры и моделируемой логики, внизу – соответствующие весовые коэффициенты.

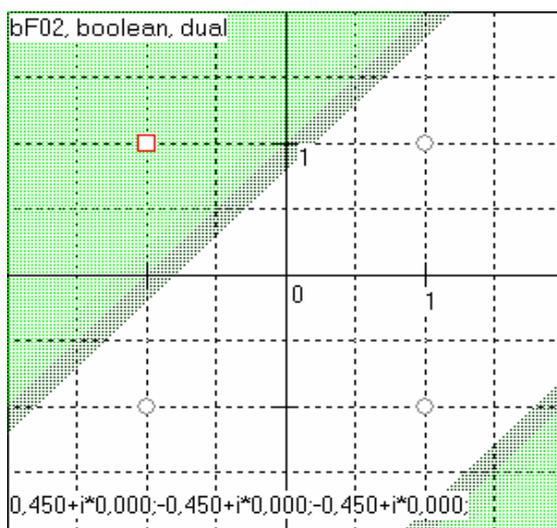


Рис. 3.

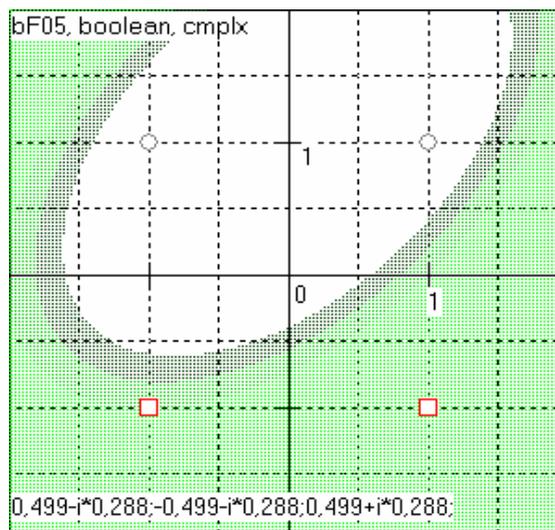


Рис. 4.

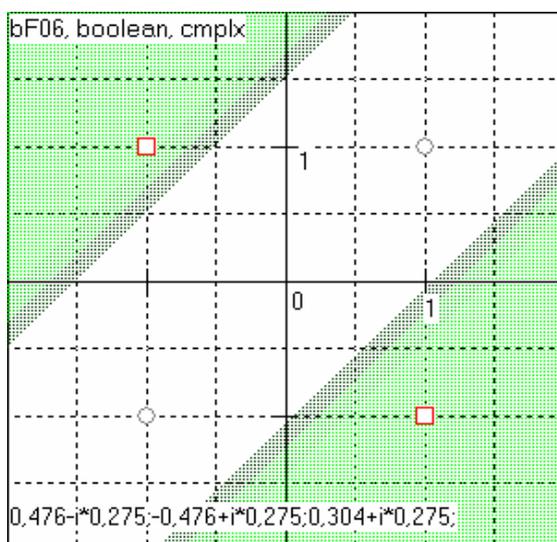


Рис. 5.

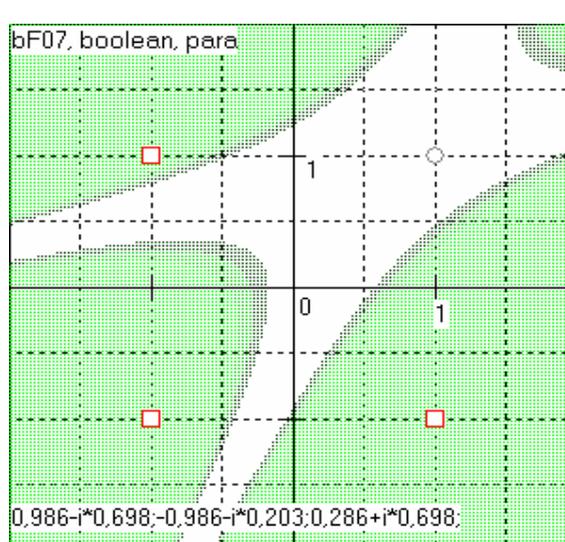


Рис. 6.

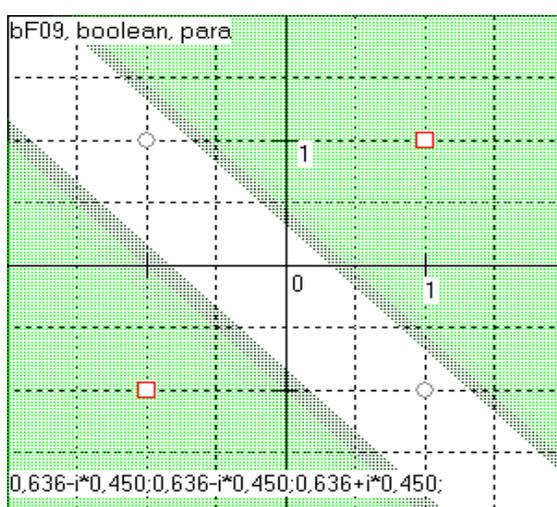


Рис. 7.

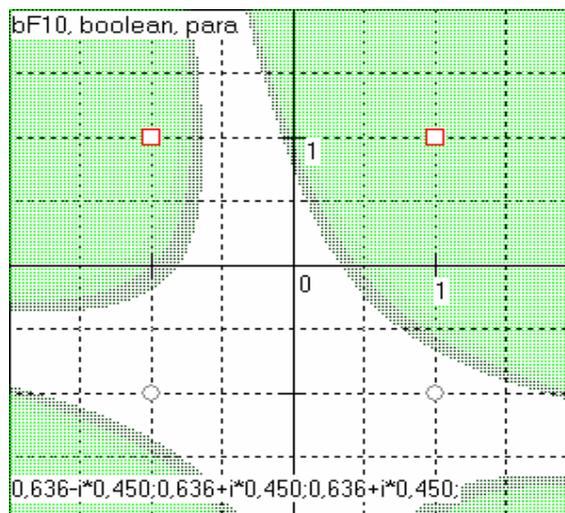


Рис. 8.

Дуальные числа всегда порождают полосы (рис. 3), комплексные числа могут порождать эллипсы (рис. 4), а паракомплексные могут порождать семейство сопряженных гипербол (рис. 6 и 8). Функции XOR/PARITY (рис. 5 и 7) во всех алгебрах смоделированы полосами. Можно предположить, что в этих случаях у гипербол центр, а у эллипсов фокусы удалены в бесконечность.

Таким образом, функции булевой логики квадратично делимы, с помощью однослойного комплекснозначного персептрона:

- эллипсами (эллиптическая делимость);
- гиперболами (гиперболическая делимость);
- парабололами (параболическая делимость).

Двоичная логика 3-х аргументов

Описанный выше алгоритм обобщается и на 3-х мерный случай. В двоичной логике 3-х аргументов имеется $2^3 = 2^8 = 256$ логических функций. С помощью однослойных дуальных персептронов удалось разделить 191 функцию, разделяющая поверхность представляется в виде двух параллельных плоскостей (рис. 9).

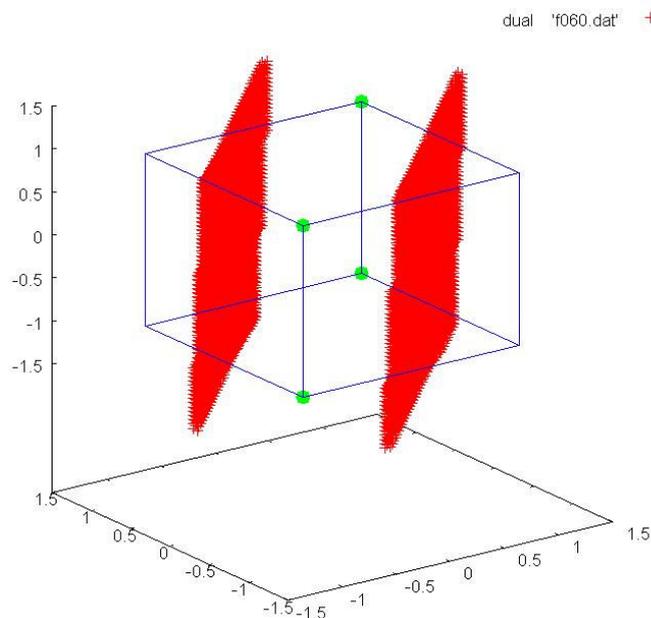


Рис. 9.

На рисунках 9-12 представлены результаты моделирования 3-х мерной двоичной логики. Совокупность красных «крестиков» обозначает разделяющую

поверхность (значение модуля функции активации 0,9), зелёные «круги», в углах единичного куба соответствуют значению логической функции 0, «пустые» углы куба – значению логической функции 1. Кроме того, на рисунках показаны: оси координат, название алгебры и номер функции. Номера функций 3-х мерной двоичной логики формируются перебором 8 разрядного двоичного числа, причем:

- точке (1;1;1) ставится в соответствие 0 разряд;
- точке (1;1;-1) ставится в соответствие 1 разряд;
- точке (1;-1;1) ставится в соответствие 2 разряд;
- точке (1;-1;-1) ставится в соответствие 3 разряд;
- точке (-1;1;1) ставится в соответствие 4 разряд;
- точке (-1;1;-1) ставится в соответствие 5 разряд;
- точке (-1;-1;1) ставится в соответствие 6 разряд;
- точке (-1;-1;-1) ставится в соответствие 7 разряд.

С помощью однослойных комплексных персептронов удалось разделить 246 функций, разделяющей поверхностью служит эллиптический цилиндр (рис. 10).

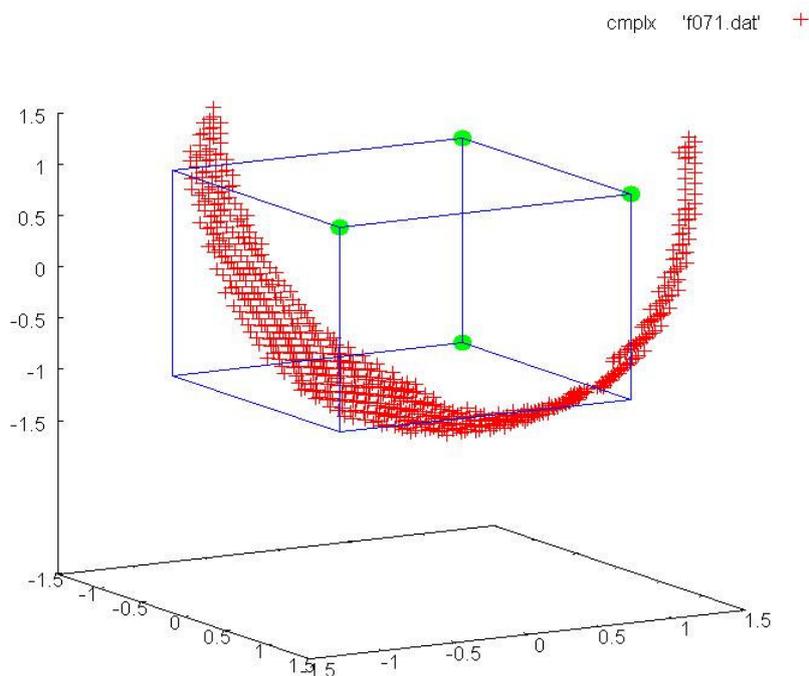


Рис. 10.

Среди неразделенных 10 функций находятся 3-х мерные аналоги PARITY, XOR и их вариации (в одной из плоскостей имеется не 2 «круга», а 3).

С помощью однослойных паракомплексных перцептронов удалось разделить все 256 функций, разделяющей поверхностью служат сопряженные гиперболические цилиндры (рис. 11 и 12).

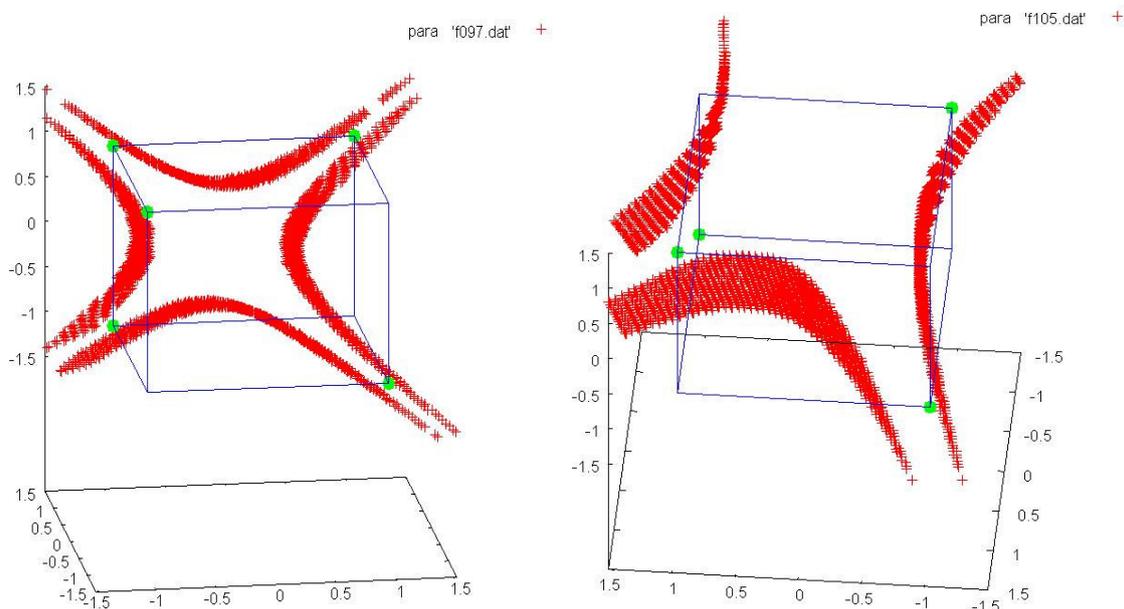


Рис. 11. Рис. 12.

Визуализация полученных результатов проводилась в пакете gnuplot, файлы данных и сценариев находятся в сопроводительных материалах.

Таким образом, функции трехмерной логики гиперболически разделимы, однослойным перцептроном.

В работе [7] описан аналогичный результат аппроксимации трехмерного PARITY, полученный с помощью алгебры кватернионов.

Обсуждаемый алгоритм реализует полный перебор, и поэтому для 4-х и более мерных пространств входов, на доступной нам вычислительной технике, затраты машинного времени становятся неприемлемыми.

Троичная логика 2 аргументов

Троичная логика содержит $3^3 = 3^9 = 19683$ функции. На рисунке 13 представлена одна из интересных функций троичной логики, это поразрядное сложение троично-сбалансированной системы счисления [8]. Можно показать, что никакая одна линия II порядка не может разделить значения этой функции (отделить все «квадраты» от всех «кругов» и всех «треугольников»).

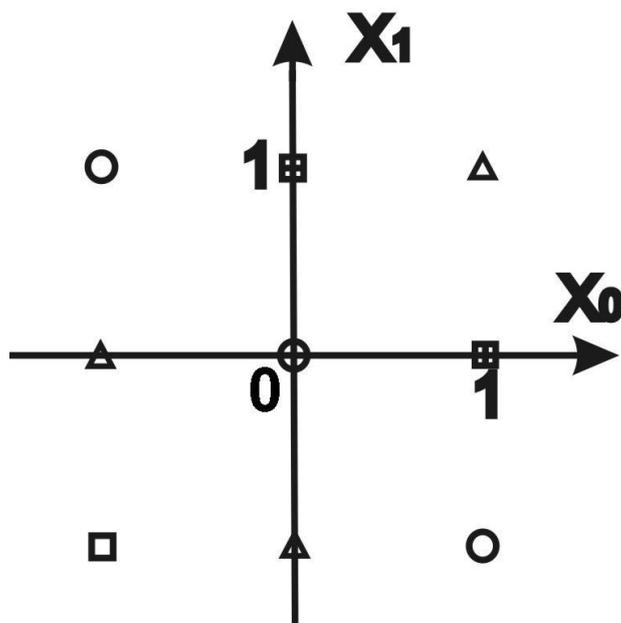


Рис. 13. Треугольниками обозначены значение логической функции минус единица, кругами – ноль, а квадратами – плюс единица

Тем не менее, для этой функции, можно гиперболически отделить все «квадраты» от всех «не квадратов». Полученная смешанная логика (троичная на входе и двоичная на выходе (рис. 14)) содержит $2^{3^2} = 2^9 = 512$ функций. Эллиптически удалось разделить около 180 таких функций, параболически – и того меньше.

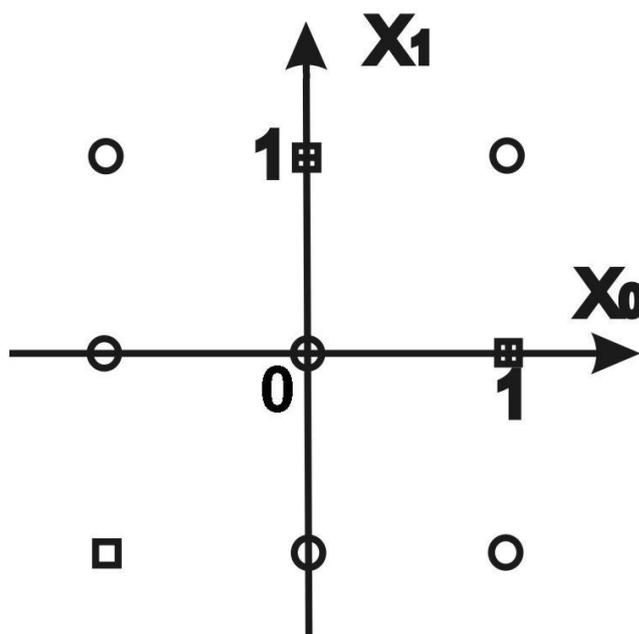


Рис. 14.

Гиперболически удалось разделить 470 функций, причем для каждой из оставшихся 42 функций можно подобрать её гиперболически разделимое отрицание. Например, функция №496 гиперболически не разделима, а её отрицание – функция №015 разделима (рис. 15).

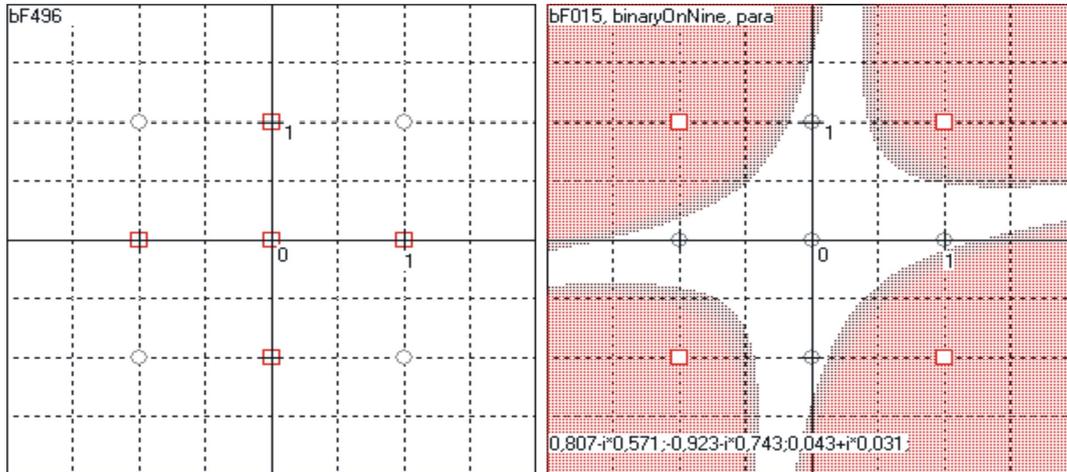


Рис. 15.

Таким образом, для всех функций смешанной, а значит и полной троичной логики можно подобрать комбинацию разделяющих гипербол.

Номера функций смешанной логики формируются перебором 9 разрядного двоичного числа, причем:

- точке $(-1;-1)$ ставится в соответствие 0 разряд;
- точке $(-1;1)$ ставится в соответствие 1 разряд;
- точке $(1;-1)$ ставится в соответствие 2 разряд;
- точке $(1;1)$ ставится в соответствие 3 разряд;
- точке $(-1;0)$ ставится в соответствие 4 разряд;
- точке $(0;-1)$ ставится в соответствие 5 разряд;
- точке $(0;1)$ ставится в соответствие 6 разряд;
- точке $(1;0)$ ставится в соответствие 7 разряд;
- точке $(0;0)$ ставится в соответствие 8 разряд.

Для функции, показанной на рисунке 14 (назовем её половиной троичного сложения), можно построить разные варианты гиперболического деления, на рисунке 16 приведен один из них.

Найдем уравнения асимптот для этого семейства гипербол. Вещественнозначный вектор входов умножаем на паракомплексный вектор весов,

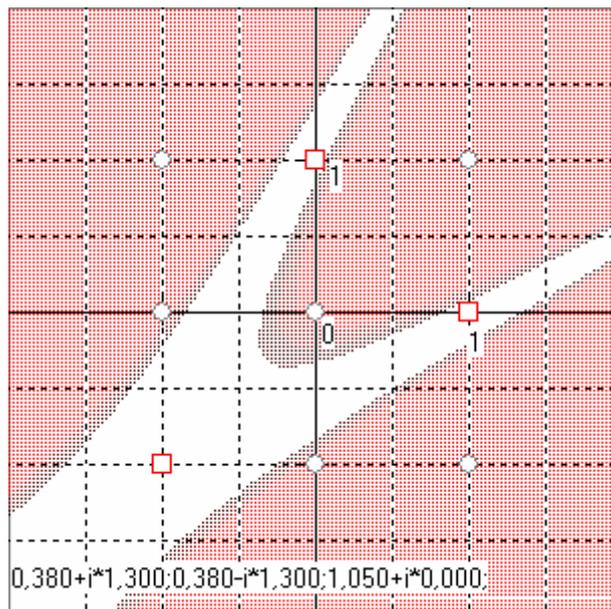


Рис. 16.

получим некоторое паракомплексное число:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} * (a_0 + i*b_0 \quad a_1 + i*b_1 \quad a_2 + i*b_2) = y + i*z$$

учитывая, что умножение вещественных чисел на паракомплексные числа производится покомпонентно [9], запишем:

$$(x_0*a_0 + i*x_0*b_0) + (x_1*a_1 + i*x_1*b_1) + (x_2*a_2 + i*x_2*b_2) = y + i*z.$$

Сложение паракомплексных чисел также осуществляется покомпонентно.

Опуская символ мнимой единицы, имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_0 * a_0 + x_1 * a_1 + x_2 * a_2 = y; \\ x_0 * b_0 + x_1 * b_1 + x_2 * b_2 = z, \end{cases}$$

на асимптотах модуль паракомплексного числа равен нулю, значит:

$$\sqrt{y^2 - z^2} = 0; \quad y^2 = z^2; \quad y = \pm z.$$

Кроме того, x_2 – это константа равная 1, тогда

$$x_0*a_0 + x_1*a_1 + a_2 = \pm(x_0*b_0 + x_1*b_1 + b_2).$$

Подставляя значения весов (рис. 13) и приводя подобные, получим уравнения асимптот:

$$x_1 - 0.55*x_0 + 0.63 = 0;$$

$$x_1 - 1.83*x_0 - 1.14 = 0.$$

Расположив пересечение асимптот в точке (-1;-1) и проведя из неё одну линию через точку (0;1), а вторую через точку (1;0), погрешность аппроксимации, для функции «половина троичного сложения», можно свести к нулю. Подмена гипербол на асимптоты возможна не для всех функций смешанной логики, в общем случае семейство гипербол подменяется на объединение 2 полос.

Таким образом, для аппроксимации функций троичной логики нужен персептрон с 2 паракомплексными нейронами в промежуточном слое, или персептрон с 8 вещественнозначными нейронами в промежуточном слое.

Моделирование функций троичной логики

Для реализации троичного сложения (рис. 13) создадим многослойный персептрон на паракомплексных нейронах. В промежуточном слое имеется два паракомплексных нейрона, каждый из которых реализует свою «половину троичного сложения». Паракомплексная матрица весов промежуточного слоя

$$w_{ik} = \begin{pmatrix} 0.38 + i * 1.30 & 0.38 - i * 1.30 & 1.05 + i * 0.00 \\ 0.38 + i * 1.30 & 0.38 - i * 1.30 & -1.05 + i * 0.00 \end{pmatrix}$$

реализует симметричные друг другу семейства гипербол, поэтому вторая строка отличается от первой только знаком действительной компоненты смещения.

Функция активации модуля паракомплексного числа:

$$f_a(m_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } |m_i| < 0.8; \\ 0, & \text{если } |m_i| > 1.0, \end{cases}$$

в выходном слое функция активации и смещение отсутствуют, матрица весов выходного слоя:

$$v_i = (1 \ -1).$$

В таблице 2 приведены результаты вычислений, производимых паракомплексным персептроном над входным вектором.

Сравнение входов/выходов персептрона с требуемыми значениями функции (рис. 13) показывает, что паракомплексный персептрон справляется с поставленной задачей.

Заменяв каждый паракомплексный нейрон на 4 вещественнозначных, получим вещественнозначный персептрон с 8 нейронами в промежуточном слое.

На рисунке 17 представлена замена 2 семейств гипербол на эквивалентные им 4 полосы.

Таблица 2.

Вектор входов, x_i	Вектор аргументов функции активации, t_i	Вектор модулей аргумента, m_i	Вектор выходов промежуточного слоя, y_i	Выход персептрона, z
(-1 -1 1)	$\begin{pmatrix} 0.29 + i * 0.00 \\ -1.81 + i * 0.00 \end{pmatrix}$	(0.29 1.81)	(1 0)	1
(-1 0 1)	$\begin{pmatrix} 0.67 - i * 1.30 \\ -1.43 - i * 1.30 \end{pmatrix}$	(1.11 0.60)	(0 1)	-1
(-1 1 1)	$\begin{pmatrix} 1.05 - i * 2.60 \\ -1.05 - i * 2.60 \end{pmatrix}$	(2.38 2.38)	(0 0)	0
(0 -1 1)	$\begin{pmatrix} 0.67 + i * 1.30 \\ -1.43 + i * 1.30 \end{pmatrix}$	(1.11 0.60)	(0 1)	-1
(0 0 1)	$\begin{pmatrix} 1.05 + i * 0.00 \\ -1.05 + i * 0.00 \end{pmatrix}$	(1.05 1.05)	(0 0)	0
(0 1 1)	$\begin{pmatrix} 1.43 - i * 1.30 \\ -0.67 - i * 1.30 \end{pmatrix}$	(0.60 1.11)	(1 0)	1
(1 -1 1)	$\begin{pmatrix} 1.05 + i * 2.60 \\ -1.05 + i * 2.60 \end{pmatrix}$	(2.38 2.38)	(0 0)	0
(1 0 1)	$\begin{pmatrix} 1.43 + i * 1.30 \\ -0.67 + i * 1.30 \end{pmatrix}$	(0.60 1.11)	(1 0)	1
(1 1 1)	$\begin{pmatrix} 1.81 + i * 0.00 \\ -0.29 + i * 0.00 \end{pmatrix}$	(1.81 0.29)	(0 1)	-1

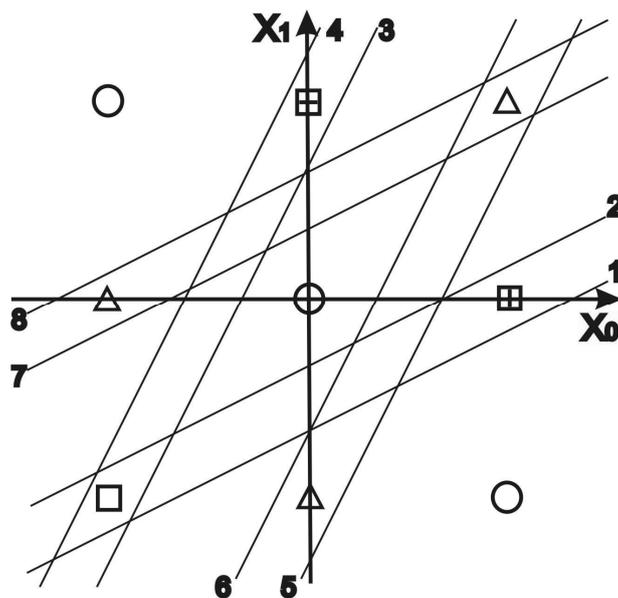


Рис. 17.

Формулы прямых:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 - 0.55 \cdot x_0 + 0.62 = 0 & \text{(прямая 1);} \\
 x_1 - 1.82 \cdot x_0 - 0.76 = 0 & \text{(прямая 3);} \\
 x_1 - 1.81 \cdot x_0 + 1.14 = 0 & \text{(прямая 5);} \\
 x_1 - 0.52 \cdot x_0 - 0.43 = 0 & \text{(прямая 7);} \\
 x_1 - 0.54 \cdot x_0 + 0.42 = 0 & \text{(прямая 2);} \\
 x_1 - 1.83 \cdot x_0 - 1.13 = 0 & \text{(прямая 4);} \\
 x_1 - 1.84 \cdot x_0 + 0.77 = 0 & \text{(прямая 6);} \\
 x_1 - 0.53 \cdot x_0 - 0.63 = 0 & \text{(прямая 8),}
 \end{array}$$

получены из уравнений асимптот (коэффициенты при моделировании изменены во 2 знаке после запятой).

Матрица весов промежуточного слоя:

$$w_{ik} = \begin{pmatrix} 0.53 & -0.52 & 1.84 & -1.81 & 1.83 & -1.82 & 0.54 & -0.55 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0.63 & -0.43 & -0.77 & 1.14 & 1.13 & -0.76 & -0.42 & 0.62 \end{pmatrix}$$

Матрица весов выходного слоя:

$$v_k = (-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

Функции активации промежуточного (I) и выходного (II) слоя одинаковые и имеют вид:

$$f_a(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{если } t_i > 0; \\ 0, & \text{если } t_i = 0; \\ -1, & \text{если } t_i < 0. \end{cases}$$

В таблице 3 приведены результаты вычислений, производимых персептроном над входным вектором.

Таблица 3.

Вектор входов, x_i	Вектор аргументов функции активации I, t_i	Вектор выходов промежуточного слоя, y_i	Аргумент функции активации II	Выход персептрона z
(-1 -1 1)	(1.1 -0.91 -1.61 1.95 0.3 0.06 0.04 0.17)	(1 -1 -1 1 1 1 1 1)	4	1
(-1 0 1)	(0.1 0.09 -2.61 2.95 -0.7 1.06 -0.96 1.17)	(1 1 -1 1 -1 1 -1 1)	-2	-1
(-1 1 1)	(-0.9 1.09 -3.61 3.95 -1.7 2.06 -1.96 2.17)	(-1 1 -1 1 -1 1 -1 1)	0	0
(0 -1 1)	(1.63 -1.43 0.23 0.14 2.13 -1.76 0.58 -0.38)	(1 -1 1 1 1 -1 1 -1)	-2	-1
(0 0 1)	(0.63 -0.43 -0.77 1.14 1.13 -0.76 -0.42 0.62)	(1 -1 -1 1 1 -1 -1 1)	0	0
(0 1 1)	(-0.37 0.57 -1.77 2.14 0.13 0.24 -1.42 1.62)	(-1 1 -1 1 1 1 -1 1)	2	1
(1 -1 1)	(2.16 -1.95 2.07 -1.67 3.96 -3.58 1.12 -0.93)	(1 -1 1 -1 1 -1 1 -1)	0	0
(1 0 1)	(1.16 -0.95 1.07 -0.67 2.96 -2.58 0.12 0.07)	(1 -1 1 -1 1 -1 1 1)	2	1
(1 1 1)	(0.16 0.05 0.07 0.33 1.96 -1.58 -0.88 1.07)	(1 1 1 1 1 -1 -1 1)	-4	-1

Таким образом, замена паракомплексных нейронов на вещественнозначные не требует переобучения эквивалентного персептрона.

Выводы: Создан алгоритм обучения комплексных, паракомплексных и дуальных однослойных персептронов, основанный на поиске подходящих значений аргумента модульной функции активации. Показана квадратичная (эллиптическая, гиперболическая и параболическая) разделимость функций булевой логики. Показана гиперболическая разделимость функций 3-х мерной двоичной и смешанной (троичной на входе и двоичной на выходе) логик. Реализован многослойный паракомплексный персептрон, аппроксимирующий функцию троичной логики и описан способ перехода к эквивалентному вещественнозначному персептрону.

Литература

1. Минский М., Пайперт С. Персептроны. – М.: Мир, 1971.
2. Руденко О.Г., Бодянский Е.В. Основы теории искусственных нейронных сетей. – Харьков, 2002.
3. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1966.
4. Пухов Г.Е., Евдокимов В.Ф., Синьков М.В. Разрядно – аналоговые вычислительные системы. – М.: Советское радио, 1978.
5. Нейроматематика т.6. под ред. Галушкина А.И. – М.: ИПРЖР, 2002.

6. Фазылова М.В. Алгоритм обучения нейронных сетей для задач диагностики состояния оборудования нефтегазовой отрасли. http://www.ogbus.ru/authors/Fazylova/Fazylova_1.pdf, 2007.
7. Tohru Nitta Three-Dimensional Vector Valued Neural Network and its Generalization Ability. <http://staff.aist.go.jp/tohru-nitta/NIP-LR2005.pdf>, 2004.
8. Брусенцов Н.П., Маслов С.П., Розин В.П., Тишулина А.М. Малая цифровая вычислительная машина "Сетунь" – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
9. Каратаев Е.А. Гиперкомплексные числа. Классификатор. <http://karataev.nm.ru/hipclass>, 2000.