

УДК 62-50

ББК 78.34

ИНВАРИАНТНОСТЬ В СИСТЕМАХ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ РЕЛЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ¹

Кочетков С.А.², Уткин В.А.³

(Учреждение Российской академии наук

Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматривается проблема обеспечения инвариантности для линейной стационарной системы с релейными управлениями. В случае идеальных реле подавления внешних возмущений широкого класса теоретически решается с использованием теории скользящих режимов. При наличии неидеальностей в релейных элементах идеальный скользящий режим не реализуем и движение замкнутой системы происходит в некоторой ненулевой окрестности заданного многообразия, что вызывает возникновение нежелательных колебаний в установившемся режиме (“чаттеринг”) и, как следствие, не обеспечивается инвариантность к внешним и параметрическим возмущениям. В данной работе решается задача обеспечения инвариантности при неидеальных релейных элементах на основе использования двух подходов. Первый позволяет за счет увеличения коэффициента усиления на входе реле приблизить их характеристику к идеальному реле и, как следствие, решает проблему чаттеринга. Второй подход, основанный на принципе высокочастотной

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента МК-2548.2009.8, гранта РФФИ №09-08-00429-а, программы фундаментальных исследований №15 Отделения ЭМПУ РАН.

² Кочетков Сергей Александрович, младший научный сотрудник.

³ Уткин Виктор Анатольевич, доктор технических наук, профессор (vicitkin@iri.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21).

модуляции, осуществляет регуляризацию переключений реле и за счет эффекта линеаризации релейной характеристики позволяет решить задачу обеспечения инвариантности.

Ключевые слова: релейные системы, задача инвариантности, глубокие обратные связи, реальные скользящие режимы, вибролинеаризация.

1. Введение

В статье рассматриваются объекты управления (ОУ), поведение которых может быть с достаточной точностью описано линейной моделью в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной модели учитывается влияние внешних воздействий к которым можно отнести задающие и возмущающие воздействия. Задающие воздействия формируются разработчиком (программные траектории) или оператором (как функции времени) по определенным законам, чтобы получить желаемое поведение системы. Относительно внешних возмущений в наиболее общей постановке предполагается, что они являются произвольными ограниченными по некоторой норме детерминированными функциями времени.

Часто удается удовлетворительно решить задачу инвариантности к внешним возмущениям в предположении, что они порождаются линейной динамической системой с известными или неизвестными параметрами и с неизвестными начальными условиями. Модель внешних возмущающих воздействий и, возможно, вместе с моделью задающих воздействий (если они не доступны для измерения) называют экзогенной [1].

Если управляющие воздействия могут быть сформированы только при помощи реле, задача инвариантности может быть решена с использованием алгоритмов управления на скользящих режимах ([2], [3]), ставших уже классическим способом обеспечения робастности по отношению к внешним и параметрическим возмущениям. Большой интерес к этому направлению в

последние десятилетия связан, с одной стороны, с бурным развитием и совершенствованием силовых электронных переключающих устройств, а с другой стороны, с рядом преимуществ методов систем с разрывными управлениями с точки зрения синтеза эффективных алгоритмов управления. Действительно, в настоящее время электроприводы с силовыми инверторами наиболее часто используются в качестве исполнительных устройств, а преимущества теории систем, работающих на скользящих режимах, априори ориентирующихся на ключевую природу управлений, проявляются в том, что позволяют обеспечить инвариантность и декомпозицию по темпам движения в замкнутой системе.

На практике релейные устройства, реализующие разрывные управляющие воздействия, всегда содержат некоторые неидеальности. Согласно концепции пограничного слоя [2] движение при неидеальных исполнительных элементах происходит в реальном скользящем режиме в некоторой Δ -окрестности поверхностей скольжения. При этом теряется свойство инвариантности по отношению к внешним возмущениям. Более того, неидеальности релейных элементов вызывают появление нежелательных колебаний значительной амплитуды в установившемся режиме (в теории скользящих режимов используют термин «чаттеринг» от англ. chattering – болтанка).

В данной работе как раз и исследуются вопросы синтеза инвариантных систем по обратной связи с использованием только релейных элементов с аппаратно неустранимыми неидеальностями. Ограничение управлений классом разрывных функций с учетом неидеальностей релейных характеристик не позволяют, с одной стороны, непосредственно использовать теорию скользящих режимов, а с другой стороны, воспользоваться известными результатами теории инвариантности в классе непрерывных управляющих воздействий, в частности комбинированным управлением.

Основная идея синтеза инвариантных релейных систем состоит в следующих двух подходах. Первый состоит в увеличе-

нии коэффициентов усиления на входах релейных элементов, что в пределе позволяет заместить неидеальную релейную характеристику идеальной и, как следствие, обеспечить идеальные скользящие движения с присущими им свойствами робастности. На практике существуют некоторые предельные значения коэффициентов усиления на входах реле, связанные, например, с защитой от ложных срабатываний реле при учете наложения шумов на полезный сигнал, что ограничивает частоту переключений за счет введения гистерезиса или мертвой зоны в окрестности нуля. Для того, чтобы добиться дальнейшего повышения частоты переключений релейных элементов предлагается использовать метод линеаризации релейных характеристик за счет подачи на входы реле высокочастотных сигналов, что, во-первых, позволяет повысить частоту переключений реле и, во-вторых, за счет линеаризации на низких частотах использовать известные методы теории инвариантности, в частности, методы динамической компенсации возмущений. Отметим, что в данном подходе частота переключений определяется в основном частотой вибролинеаризующего сигнала (говорят переключения реле «ведутся» им) и мало зависят от шумов.

Работа имеет следующую структуру.

В разделе 2 приводятся основные результаты теории инвариантности с использованием скользящих режимов, на которых основывается дальнейшее изложение и аргументируется постановка задачи. В разделе 3.1 в терминах переходных процессов, разделенных во времени на этап попадания в пограничный слой и движения в нем показывается, что величина пограничного слоя может быть параметризована за счет обратной связи. Доказывается, что при увеличении коэффициентов обратной связи движения системы с реальными исполнительными устройствами близко к движению системы в идеальном скользящем режиме с точностью до бесконечно малой. Таким образом, при наличии нелинейностей реле возможна регуляризация скользящих движений за счет обратной связи.

В подразделе 3.2 предложен метод повышения частоты переключений в замкнутой системе с использованием дополнительных высокочастотных сигналов на входах релейных элементов, позволяющих теоретически увеличивать до бесконечности частоту переключений и, как следствие, исключить явление «чаттеринга», правда ценою того, что теряется одно из основных свойств систем с разрывной правой частью – свойство финитности [2]. Специально введенный высокочастотный модулирующий сигнал позволяет в пределе (при стремлении частоты модулирующего сигнала к бесконечности) линеаризовать релейную характеристику. Используя этот факт в предположении, что модель возмущений известна или возмущения доступны для измерения, приведена процедура синтеза инвариантных систем с использованием метода динамической компенсации.

В разделе 4 получены качественные оценки установившихся процессов регулирования при конечной частоте вибролинеаризующих сигналов и конечных коэффициентах усиления в обратной связи. Получены условия на связь значений коэффициентов усиления и частоты вибролинеаризующего сигнала, позволяющие избежать нежелательное наложение порождаемых ими частот переключений релейных элементов.

В разделе 5 рассмотрен пример электромеханической системы, приведены результаты моделирования, демонстрирующие эффективность предложенного подхода. Итоги работы обсуждаются в заключении.

2. Обзор проблемы. Постановка задачи.

Рассматривается задача обеспечения инвариантности к внешним возмущающим воздействиям в линейной динамической стационарной системе

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Qh(t),$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, $u \in R^p$ – вектор управляющих воздействий, $h(t) \in R^l$ – вектор возмущающих воздействий;

A, B, Q – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности, пара $\{A, B\}$ – управляемая.

Инвариантность в системе (1) относительно всего вектора состояний может быть принципиально обеспечена с необходимостью и достаточностью только при выполнении условий согласования вида [4]:

$$(2) \quad \text{Im} Q \subset \text{Im} B,$$

где здесь и далее $\text{Im}(\cdot)$ – образ матрицы (\cdot) .

Условие (2) означает, что существует такая матрица Λ , что выполнено условие $Q = B\Lambda$.

Тогда, в предположении, что внешние возмущения доступны для измерения комбинированное управление вида $u = -\Lambda h + Fx$ обеспечивает полную инвариантность в замкнутой системе $\dot{x} = (A + BF)x$, а выбором матрицы обратной связи по состоянию (Fx) обеспечиваются желаемые темпы сходимости в задаче стабилизации.

Основные идеи синтеза инвариантных систем в случае, когда компоненты вектора возмущений не доступны для измерения излагаются в следующих двух разделах.

2.1. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.

В случае, когда о внешних возмущениях делается предположение, что они недоступны для измерения и описываются неизвестными ограниченными функциями времени

$$|h_i(t)| \leq N_i \quad (N_i = \text{const}, i = \overline{1, l} \text{ заданы})$$

возможны два принципиально разных подхода к обеспечению инвариантности, причем оба основаны на использовании управлений в классе разрывных функций или с большими коэффициентами. При этом использование скользящих режимов, по крайней мере в теории, приводит к полной инвариантности, а больших коэффициентов – к инвариантности с заданной точностью (ϵ – инвариантность).

Первый подход состоит в подавлении внешних возмущений непосредственно по обратной связи. Выберем управления разрывными по соответствующим плоскостям скольжения

$$u_i = -M_i \text{sign}(s_i), \quad i = \overline{1, p},$$

где $s = \text{col}(s_1, \dots, s_p)$, $s = Cx \in R^p$ - многообразия скольжения.

Тогда движение в скользящем режиме описывается уравнениями, получаемые согласно процедуре метода эквивалентного управления (МЭУ):

Производная от многообразия скольжения по времени приравняется нулю:

$$(3) \quad \dot{s} = CAx + CB(u + \Lambda h).$$

При условии $\det(CB) \neq 0$ находится эквивалентное управление

$$u_{eq} = (CB)^{-1}CAx - \Lambda h,$$

после подстановки которого в исходную систему (1) получаем уравнения скользящего режима

$$(4) \quad \dot{s} = (I + B(CB)^{-1}C)Ax, \quad s = Cx = 0,$$

динамический порядок которых равен $n - p$ и, как видим, они инвариантны к внешним возмущениям.

Аналогичные результаты получаются и при использовании управлений с большими коэффициентами вида

$$u = -ks, \quad s = Cx, \quad k \rightarrow \infty,$$

причем уравнения медленных движений совпадают с уравнениями скользящих движений [5].

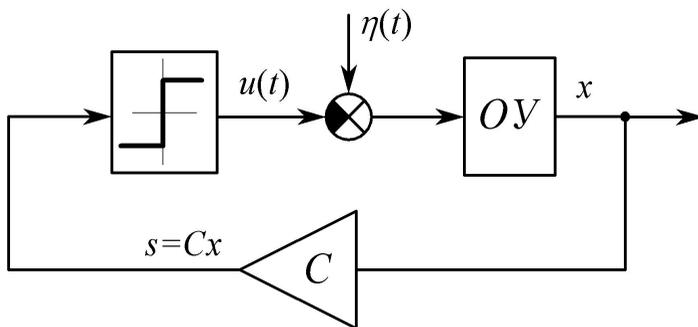


Рис. 1. Обеспечение инвариантности на скользящих режимах

Второй подход связан с получением оценок вектора внешних возмущений с использованием наблюдателей состояний на скользящих режимах [2] и последующим синтезом комбинированного управления по этим оценкам. Действительно, построим наблюдатель состояний пониженного порядка вида

$$(5) \quad \dot{z} = CAx + CBu + v,$$

где $z \in R^p$ – вектор состояний, $v \in R^p$ – корректирующие воздействия наблюдателя состояний, которые выбираются разрывными $v = l \operatorname{sign}(s - z)$. В невязках $e = s - z$ имеем согласно (3) и (5):

$$(6) \quad \dot{e} = CBAh - v.$$

В системе (6) при достаточно больших, но конечных $l \gg \|CBAh\|$ за конечное время возникает скользящий режим по многообразию $e = 0$, а эквивалентные значения корректирующих воздействий наблюдателя равны

$$v_{eq} = CBAh \Rightarrow Ah = (CB)^{-1}v_{eq}.$$

Использование комбинированного управления по оцененным значениям внешних возмущений в классе непрерывных функций

$$(7) \quad u = Fx - (CB)^{-1}v_{eq}$$

обеспечивает инвариантность замкнутой системы.

Отметим, что текущие оценки эквивалентных значений корректирующих воздействий наблюдателя получаются на выходе высокочастотного фильтра первого порядка $m\dot{\tau} = -\tau + Lv$, $0 < m \ll 1$, что и вносит неточность в получении оценок внешних возмущающих воздействий. Учитывая этот факт и то, что на практике как в цепи обратной связи, так и в наблюдателе возникает не идеальный, а реальный скользящий режим в некоторой окрестности многообразия скольжения оба описанных подхода к достижению инвариантности с практической точки зрения следует рассматривать как инвариантность с заданной точностью.

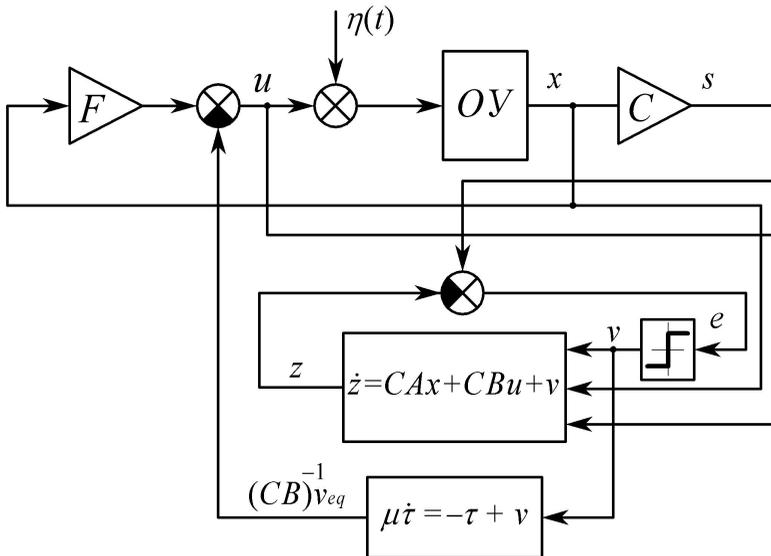


Рис. 2. Комбинированное управление с наблюдателем возмущений на скользящих режимах

2.2. МОДЕЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.

Возможности достижения асимптотической инвариантности появляются в часто используемом в теории и практике управления подходе, когда возмущающие воздействия полагаются не доступными для измерения, но порождаются линейной динамической моделью с известными параметрами, но не известными начальными условиями вида

$$(8) \quad \dot{x} = Wx, \quad h = Rx,$$

где $x \in R^m$ – вектор состояний модели возмущений, W, R – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности.

Полагая, что применительно к системе (1) и (8) условия согласования (2) выполнены (и, следовательно, существует такая матрица Λ_1 , что выполняется равенство $QR = B\Lambda_1$) после исключения h из систем (1), (8) система (1) примет вид

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + \Lambda_1 x), \\ \dot{x} &= Wx. \end{aligned}$$

Полагая, без ограничения общности, что в системе (9) пара $\{\Lambda_1, W\}$ наблюдаема и в предположении, что вектор состояния x доступен для измерения, задача обеспечения инвариантности в системе (9) может быть решена с использованием классических асимптотических наблюдателей состояния [1, 6] или динамических компенсаторов [8, 9]. Сложность использования этих подходов заключается в высокой размерности динамических систем наблюдения и компенсации, равной $n + m$.

Декомпозиция решения задачи инвариантной стабилизации системы (1) может быть осуществлена с использованием скользких режимов или глубоких обратных связей.

Первый подход состоит в декомпозиционном синтезе комбинированных управлений с использованием динамического компенсатора [8, 9]

$$(10) \quad \begin{aligned} u &= -\Lambda_1 z_1 + v, \\ \dot{\mathbf{x}} &= Wz_1 + B_1 v, \quad i = \overline{1, p}, \end{aligned}$$

где $z_1 \in R^m$ – вектор состояния динамического компенсатора, $v \in R^p$ – вектор новых управляющих воздействий, $v = \text{diag}\{v_i\}$, $v_i = -M_i \text{sign}(s_i)$, $M_i = \text{const} > 0$, матрица $B_1 \in R^{m \times p}$ выбираются ниже.

Как и выше, в обозначениях $s = Cx$, $s = \text{col}(s_1, \dots, s_p)$ и в предположении $\det(CB) \neq 0$ запишем дифференциальное уравнение относительно переменных s с учетом (9) и (10)

$$(11) \quad \dot{\mathbf{x}} = CAx + CB(\Lambda_1 e_1 + v),$$

где $e_1 = x - z_1$.

При достаточно больших амплитудах M_i в системе (11) возникнет скользящий режим по многообразию $s = 0$ и согласно МЭУ будет описываться уравнениями (4), а эквивалентное управление равно

$$(12) \quad v_{eq} = -\Lambda_1 e_1 - (CB)^{-1} CAx.$$

Таким образом, движение замкнутой системы (9) в скользящем режиме описывается уравнениями вида

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (I + B(CB)^{-1}C)Ax, \quad s = Cx = 0, \\ \dot{\mathbf{x}} &= (W - B_1 \Lambda_1) e_1 - (CB)^{-1} CAx. \end{aligned}$$

Стабилизация первой подсистемы (13) обеспечивается независимым выбором матрицы C , стабилизация второй в силу наблюдаемости пары (Λ_1, W) независимым выбором матрицы B_1 . Как видим налицо декомпозиция задачи синтеза на две независимые подзадачи меньшей размерности $n - p$ и m , соответственно. Отметим, что синтез компенсатора в виде $\dot{\mathbf{x}} = Wz + (CB)^{-1} CAx + B_1 v$ вместо (10) позволяет обеспечить автономное поведение подсистем (13).

В пределе при $t \rightarrow \infty$ в силу устойчивости движений системы (13) и учитывая (12) эквивалентное значение управлений стремится к нулю

$$(14) \lim_{t \rightarrow \infty} v_{eq} = 0,$$

что позволяет использовать переменную амплитуду разрывных управлений $M_i(\|v_{eq}\|) > 0$, убывающую в нуль вместе с величиной эквивалентного управления. Таким образом, амплитуда разрывных управлений в установившемся режиме согласно (14) стремится к нулю, что позволяет исключить явление “чаттеринга”.

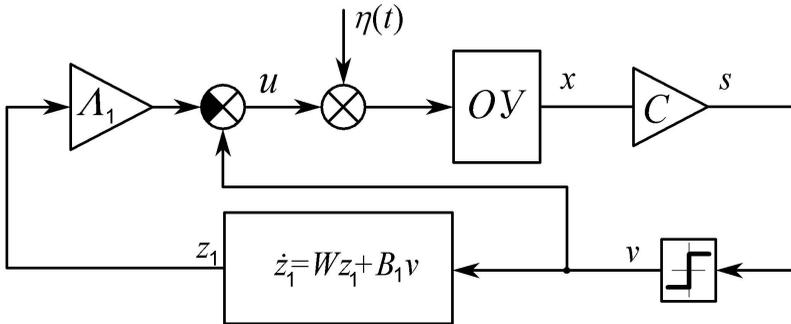


Рис. 3 Комбинированное управление с динамическим компенсатором

Второй подход применительно к системе (9) основан на теории наблюдателей состояния на скользящих режимах и отличается от метода динамической компенсации изложенной выше тем, что собственно управления могут быть как разрывными, так и непрерывными функциями, что представляется важным на практике.

Запишем уравнения движения относительно многообразия скольжения $s = Cx$ согласно (9): $\dot{s} = CAx + CB(u + \Lambda_1 x)$. Используя наблюдатель состояния вида (5) $\dot{z} = CAx + CBu + v$, запишем уравнения в невязках $e = s - z$: $\dot{e} = CB\Lambda_1 x - v$. Тогда выбор

корректирующих воздействий разрывными функциями $v_i = M_i \text{sign}(e_i)$, $M_i = \text{const} > 0$ обеспечит скользящий режим по многообразию $e_1 = 0$ и, согласно МЭУ, имеем: $v_{eq} = CB\Lambda_1 x$. В силу наблюдаемости пары $(CB\Lambda_1, W)$ полученное эквивалентное управления может быть использовано получения оценок возмущающих воздействий в классическом наблюдателе

$$(15) \quad \dot{z}_1 = (W + L_1 CB\Lambda_1)z_1 - L_1 v_{eq},$$

что позволяет обеспечить сходимость уравнений в невязках $e_1 = x - z_1$, получаемых в силу второго уравнения (9) и (15) выбором матрицы L_1 : $\dot{z}_1 = (W + L_1 CB\Lambda_1)e_1$.

Отметим, что использование наблюдателя состояний (15) для решения задачи инвариантности, вообще говоря, не обязательно – достаточно использовать эквивалентное значение корректирующих воздействий наблюдателя на скользящих воздействиях. Тем не менее, следует отметить, что наблюдатель (15) позволяет осуществлять фильтрацию оценок возмущающих воздействий, в том числе и оптимальным образом, что может оказаться важным с учетом наличия шумов в каналах измерения и управления.

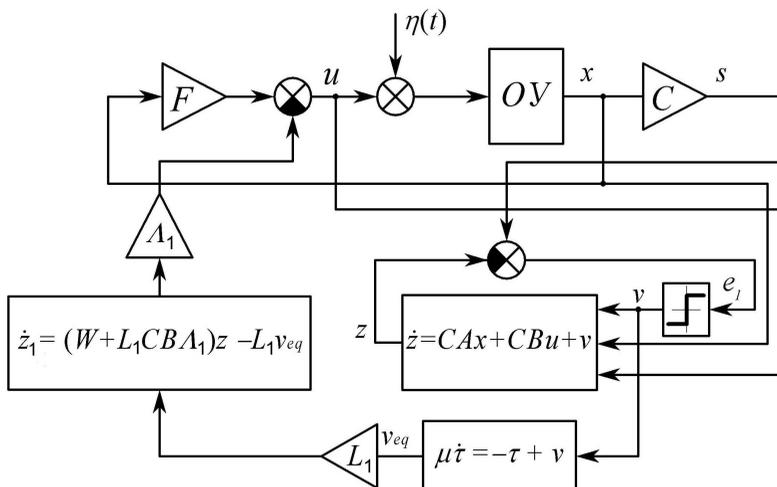


Рис. 4 Комбинированное управление с динамическим компенсатором и наблюдателем

Выбор комбинированного управления в системе (9) с использованием (15) в виде $u = Fx - \Lambda_1 z_1$ (или без использования (15) $u = Fx - (CB)^{-1} v_{eq}$) приводит описание замкнутой системы (9) с использованием (15) к виду $\dot{\mathbf{x}} = (A + BF)x + B\Lambda_1 e_1$ (или без использования (15) $\dot{\mathbf{x}} = (A + BF)x$), где матрица обратной связи F определяет темпы сходимости вектора состояний объекта управления, а переменная e_1 сходится асимптотически с произвольными темпами сходимости, определяемыми выбором матрицы L_1 в наблюдателе состояний (15). Как видим и в этом случае налицо декомпозиция синтеза на независимые задачи синтеза наблюдателя на скользящих режимах порядка p и синтеза наблюдателя (15) порядка m .

3.3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В данной работе рассматриваются объекты управления вида (1) в предположении, что управляющие воздействия реализуют-

ся при помощи релейных элементов, с характеристикой переключения отличной от сигнум-функции (рис.1). Класс таких систем достаточно широк, если учитывать, что в настоящее время основным видом исполнительных устройств являются электропривода различного типа управляемых инверторами напряжения, имеющих заведомо ключевую (релейную) природу. В такой постановке управляющие воздействия ОУ могут формироваться только как выход реле и, следовательно, описанные выше подходы к обеспечению инвариантности с использованием комбинированных (непрерывных или с непрерывной составляющей) управлений не реализуемы. С другой стороны, использование теории скользящих режимов может оказаться неприемлимым уже в силу наличия неидеальностей релейных элементов. При наличии неидеальностей, в том числе и релейных характеристик, непосредственное использование теории скользящих режимов приводит к возникновению высокочастотных колебаний в установившемся режиме (чаттеринг), который снижает точностные характеристики управляемых процессов и, кроме того, часто недопустимы с технологической точки зрения (например, могут приводить к быстрому износу механических частей управляемой системы).

Принципиально избежать “чаттеринга” можно двумя способами – повышать частоту переключений релейных элементов или уменьшать их амплитуду. Изменение амплитуды релейных элементов часто связано со значительными трудностями в реализации, энергетическими затратами, инерционностью силовых цепей и т. п. По этой причине релейные силовые элементы с изменяемой амплитудой используются очень редко, быть может, за исключением, когда используются дискретные по уровню значения амплитуд, что подразумевает наличие нескольких источников различного напряжения.

Будем далее полагать, что в модели объекта управления присутствуют неизменяемые неидеальные релейные характеристики. Следовательно, в распоряжении разработчика системы управления остается только один способ повысить качественные

характеристики регулирования – повышать частоту переключений релейных элементов с тем, чтобы приблизиться к идеальному скользящему режиму. Отметим, что кроме различных ограничений на увеличение частоты переключений, связанных с увеличением потерь энергии в коммутирующих элементах и т. п., на практике частота переключений ограничена сверху уже из чисто физических соображений, связанных с постоянными времени самих силовых ключевых элементов. Учитывая, что современные силовые инверторы работают на частотах переключений десятки и сотни кГц, такие частоты удовлетворяют гипотезе фильтра по отношению к объектам управления с достаточно большими постоянными времени. В этом смысле, наша последующая цель состоит в обеспечении в замкнутом контуре максимально допустимой с технологической точки зрения частоты переключений.

В разделе 3.1. предложен способ достижения максимально возможной частоты переключения неидеальных релейных элементов за счет увеличения коэффициента усиления на входах релейных элементов и показано, что в пределе, при стремлении этих коэффициентов к бесконечности поведение замкнутой системы совпадает с ее движением в идеальном скользящем режиме. Учитывая, что бесконечная частота переключений не реализуема, в допредельной ситуации установившийся процесс может оказаться неудовлетворительным. Поэтому в разделе 3.2. предложен другой подход, связанный с использованием высокочастотного сигнала на входе реле, позволяющего на низких частотах линеаризовать релейные характеристики. В этом случае появляется возможность использовать методы построения инвариантных систем, приведенных в разделе 1, в частности, синтезировать комбинированное управление.

В Разделе 4 рассмотрены важные с инженерной точки зрения вопросы реализации предложенных алгоритмов в допредельной ситуации, когда частота переключений достаточно высока, но конечна. В частности, рассматривается вопрос о разнесении частот переключений обусловленных повышением

коэффициента усиления на входе реле и высокочастотным сигналом с тем, чтобы избежать их нежелательного наложения.

В разделе 5 рассмотрен пример линейризованного обобщенного электропривода и приводятся результаты моделирования в среде Matlab.

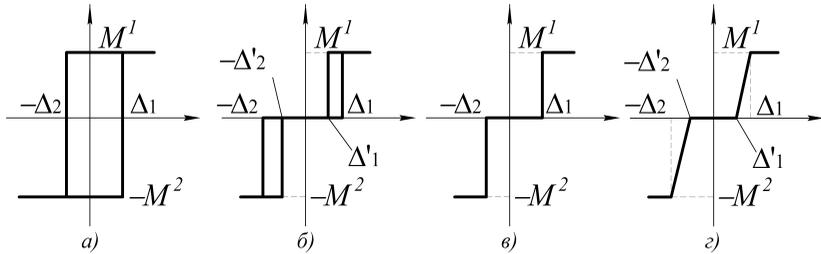


Рис. 5. Характеристики релейных элементов: а) гистерезис; б) гистерезис с зоной нечувствительности; в) зона нечувствительности; г) усилитель с зоной нечувствительности

3. Основной результат

Рассматривается задача стабилизации системы (1) для которой выполнены условия согласования (2). Неособой заменой переменных $x = T \text{col}(x_1, x_2)$ система (1) и (9) может быть приведена к (эквивалентной (1)) регулярной форме [7] с единичной матрицей перед управлением

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \Lambda x, \end{aligned}$$

где $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = TAT^{-1}$, $TB = (0_{p \times (n-p)} \quad I_p)^T$, I_p – единичная матрица, $TQ = (0_{l \times (n-p)} \quad \Lambda^T)^T$, $\Lambda \in R^{p \times l}$, $x_1 \in R^{n-p}$, $x_2 \in R^p$.

Система вида (16), названная в [8] системой с динамическими исполнительными устройствами отражает структуры часто встречаемых на практике систем, где координаты состояния x_1 описывают собственно объект управления, а вектор состояния x_2 , описывающий состояние исполнительных устройств является входными управляющими воздействиями объекта управления, в то время, как вектор u является управляющими воздействиями исполнительного устройства. Такая структура позволяет использовать блочный подход к синтезу задачи стабилизации системы (16), а именно, на первом этапе синтезировать фиктивное управление на входе объекта управления, например, линейной $x_2 = Cx_1$, а на втором выборе истинных управлений u обеспечить равенство $x_2 - Cx_1 \rightarrow 0$.

С использованием теории скользящих режимов описанный подход реализуется по следующей схеме.

Преднамеренная организация в системе (16) скользящего режима на многообразии скольжения

$$(17) s = Cx_1 + x_2 = 0, \quad s \in R^p$$

приводит к редукции динамического порядка исходной системы при движении в скользящем режиме, который описывается уравнениями

$$(18) \dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C)x_1, \quad x_2 = -Cx_1,$$

где выбором матрицы $C \in R^{p \times (n-p)}$ можно назначить произвольные темпы сходимости в укороченной системе (18). Для организации скользящего режима по многообразию (18) решается задача стабилизации второго уравнения системы (19)

$$(19) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}C)x_1 + A_{12}s, \\ \dot{s} &= A_x x_1 + A_s s + u + \Lambda x, \end{aligned}$$

где $A_x = [(CA_{11} + A_{21}) - (CA_{12}C + A_{22}C)]$, $A_s = CA_{12} + A_{22}$, управления выбраны в виде разрывных функций (идеальное реле)

$$(20) u_i = -M_i \text{sign}(s_i), \quad i = \overline{1, p}.$$

Достаточные условия возникновения скользящего режима на многообразии (17) имеют вид [2]

$$\lim_{s_i \rightarrow +0} \mathfrak{K}_i < 0, \quad \lim_{s_i \rightarrow -0} \mathfrak{K}_i > 0, \quad i = \overline{1, p},$$

из которых получают нижнюю оценку для выбора амплитуд разрывных управлений:

$$M_i > \|A_x^i\| \|x_1\| + \|A_s^i\| \|s\| + \|\Lambda^i\| \|x\|, \quad i = \overline{1, p}$$

здесь и далее $\|A_{(\cdot)}^i\|$, $\|\Lambda^i\|$ – строчные нормы i -х строк соответствующих матриц.

В случае, когда управляющие воздействия u_i реализуются с помощью релейных элементов, имеющих неидеальности (нелинейность характеристики переключения, динамические неидеальности), возникает движение в реальном скользящем режиме. При этом траектории системы (19) находятся в некоторой Δ -окрестности поверхностей скольжения, что, как указывалось выше, может привести к неудовлетворительным показателям качества замкнутой системы.

В следующем подразделе неидеальности релейной характеристики устраняются за счет повышения коэффициента усиления на входе реле.

3.1 ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ЗА СЧЕТ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Вместе с системой в регулярной форме (19), (20) рассмотрим систему с неидеальными управлениями также в регулярной форме

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathfrak{K}_1^* &= (A_{11} - A_{12}C)x_1^* + A_{12}s^*, \\ \mathfrak{K}^* &= A_x x_1^* + A_s s^* + \Lambda x + \tilde{u}, \end{aligned}$$

где $x_1^* \in R^{n-p}$, $s^* \in R^p$, $\tilde{u} \in R^p$, $\tilde{u} = \overline{-\text{sign}(ls^*)}$ – управляющее воздействие, в котором учтены неидеальности исполнительных устройств (гистерезис, мертвая зона, люфт и т.д.)

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} -M^1, & s_i^* > \Delta_1/l; \\ M^2, & s_i^* < -\Delta_2/l, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases}$$

где $M^1, M^2 > 0$, $l = \text{const} > 0$ – скаляр, $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2$ (см. Рис.1).

Одним из основных свойств систем с преднамеренной организацией скользящих режимов является конечность времени попадания на многообразие скольжения. Неидеальность исполнительных устройств обуславливает попадание за конечное время только в некоторую окрестность многообразия скольжения. Данный факт сформулируем в теореме 1.

Т е о р е м а 1. Если для системы (21) выполнены условия вида

$$(22) \quad -M^2 + I_2 \leq A_{x,i}x_1^* + A_{s,i}s^* + \Lambda_i x \leq M^1 - I_1, \\ (I_1, I_2 = \text{const} > 0), \quad i = \overline{1, p},$$

где $A_{x,i}$, $A_{s,i}$, Λ_i – i -е строки соответствующих матриц, то за конечный промежуток времени выполняется неравенство $\|s^*\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l$, где $-\Delta_2$, Δ_1 – амплитуды сигналов на входе исполнительного устройства, при которых управляющее воздействие \tilde{u} выходит на границы $-M^2$, M^1 , $\|s^*\| = \max\{|s_i^*|\}_{i=\overline{1, p}}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении I.

Т е о р е м а 2. Пусть для систем (19) и (21) выполнены условия (22). Тогда для любой пары решений систем (19), (21) существует такое положительное число N_x , что

$$\|x_1(t) - x_1^*(t)\| = N_x \Delta / l, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_1(t) - x_1^*(t)\| = 0.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении I.

В теореме 2, по сути, говорится о том, что при стремлении коэффициентов усиления обратной связи к бесконечности траектории движений системы (19) с идеальными релейными воздействиями и системы (21) с неидеальными исполнительными устройствами близки с точностью до бесконечно малой Δ/l .

Другими словами, в пределе обеспечивается инвариантность движения системы (21) от внешнего возмущения x .

При конечных коэффициентах усиления траектории различаются на достаточно малую, но конечную величину Δ/l , что при достаточно большом коэффициенте усиления позволяет обеспечить заданную точность в задаче инвариантной стабилизации с использованием неидеальных релейных характеристик.

Заметим, что одним из требований к выбору характеристик релейных элементов на практике является защита от так называемых «ложных» срабатываний - учитывая, что на полезный сигнал на входе реле накладываются паразитные сигналы (шумы) разработчик оценивает их предельный уровень и формирует релейную характеристику («мертвую» зону, гистерезис) так, чтобы при нулевом полезном сигнале исключить переключения (как правило, высокочастотные) реле. Такой подход к выбору характеристик релейных элементов не решает проблемы «ложных» высокочастотных срабатываний реле вблизи границ гистерезиса или «мертвой» зоны. Для решения данной проблемы в следующем разделе предлагается ввести на входы реле дополнительный высокочастотный сигнал с амплитудой, превышающей размер гистерезисной петли или мертвой зоны. В этом случае частота переключений реле определяется внешним высокочастотным сигналом, а скважность задается полезным сигналом. Дополнительными преимуществами введения высокочастотного сигнала является, кроме возможности повысить частоту переключений реле и, соответственно, решить проблему чаттеринга, но и на основе возникающего эффекта линеаризации релейной характеристики на низких частотах использовать методы компенсации внешних возмущений с использованием непрерывной (средней) составляющей в комбинированном управлении, описанном в разделе 1. Важно отметить, что поскольку управления могут быть только релейными компенсация возмущений с использованием комбинированного управления в данном случае реализуются на основе изменения скважности.

3.2. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПОВ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Введение высокочастотного сигнала на входы реле широко используется в инженерной практике при реализации принципов широтно-импульсной модуляции (ШИМ) в релейных системах, а также для линеаризации элементов с нелинейной характеристикой (вибролинеаризация) [10, 11, 12].

Рассмотрим систему (21), в которой управляющее воздействие $\tilde{u}(t)$ выбрано в виде

$$(23) \quad \tilde{u} = -\overline{\text{sign}(ls^* + \Lambda z_1 + I_p d(t))}, \quad \mathfrak{K} = Wz_1 + B_1 ls^*,$$

где $d(t)$ – вибролинеаризующий сигнал, $l = \text{const} > 0$ – скаляр, I_p – единичная матрица, $\overline{\text{sign}(\cdot)}$ – одна из функций, изображенных на рис. 1.

Будем рассматривать вибролинеаризующий сигнал, имеющий треугольную форму:

$$d(t) = \begin{cases} \frac{2hw}{p}t, & 0 \leq t \leq \frac{p}{2w}; \\ 2h - \frac{2h_i w}{p}t, & \frac{p}{2w} \leq t \leq \frac{3p}{2w}; \\ 4h + \frac{2h_i w}{p}t, & \frac{3p}{2w} \leq t \leq \frac{2p}{w}, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases}$$

где w – частота колебаний вибролинеаризующего сигнала, $h = \text{const} > 2\Delta$ ($\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$) – амплитуда модулирующего сигнала.

Запишем уравнения относительно переменной

$$s_{new} = ls^* + \Lambda z_1$$

$$\mathfrak{K}_{new} = l(A_x x_1^* + l^{-1}(A_s + \Lambda B_1)s_{new} + l^{-1}(\Lambda W - (A_s + \Lambda B_1)\Lambda)z_1 + \Lambda x + \tilde{u}).$$

Достаточные условия возникновения скользящего режима на многообразии $s_{new} = 0$ имеют вид [2]

$$\lim_{s_{new} \rightarrow +0} \mathfrak{K}_{new i} < 0, \quad \lim_{s_{new} \rightarrow -0} \mathfrak{K}_{new i} > 0, \quad i = \overline{1, p},$$

из которых получают нижнюю оценку для выбора амплитуд разрывных управлений:

$$(24) \quad -M^2 + I_2 \leq A_{x,i} x_1^* + (A_s + \Lambda B_1)_i s^* + (\Lambda W)_i z_1 / l + \Lambda^i x \leq M^1 - I_1, \\ (I_1, I_2 = \text{const} > 0), \quad i = \overline{1, p},$$

где $A_{x,i}$, $(A_s + \Lambda B_1)_i$, $(\Lambda W)_i$, Λ^i – i -е строки соответствующих матриц.

Начиная с момента времени, когда $\|s_{new}\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)$, начинаются высокочастотные переключения управляющих воздействий, обусловленные модулирующим сигналом $d(t)$. При этом при стремлении частоты вибролинеаризирующего сигнала $d(t)$ к бесконечности исходная система (21) пропускает только среднюю на периоде составляющую управляющего вектора \tilde{u} . Использование высокочастотного модулирующего сигнала позволяет линеаризовать нелинейную характеристику исполнительных устройств, поэтому последующий синтез обратной связи может быть сделан в рамках линейной системы. Данные утверждения доказываются в приведенной ниже теореме.

Т е о р е м а 3. Если $w \rightarrow \infty$, то переменные $x_1^*(t)$, $s^*(t)$ не содержат высокочастотных колебаний с частотой вибросигнала и исходная система (13) эквивалентна усредненной системе

$$\mathfrak{K}_{10}^* = (A_{11} - A_{12}C)x_{10}^* + A_{12}s_0^*,$$

$$\mathfrak{K}_0^* = A_x x_{10}^* + A_s s_0^* + u_0 + \Lambda x,$$

где $\mathfrak{K}^*(t)$, $s_0^*(t)$, $x_{10}^*(t)$, $u_0(t)$ – усредненные на периоде $2p/w$ значения переменных $\mathfrak{K}(t)$, $s^*(t)$, $x_1^*(t)$, $u(t)$ (см. приложение II).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая реальная физическая система представляет собой фильтр низких частот. Поэтому естественным с физической точки зрения является предположение о

том, что чем выше частота внешнего воздействия, тем меньше реакция системы на данное возмущение. Для доказательства теоремы удобно разложить управляющее воздействие в ряд Фурье на периоде $t \leq t \leq t + 2p/w$ колебаний вибролинеаризующего сигнала, а именно

$$\tilde{u}(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t)).$$

Решение системы (5) имеет вид

$$s^*(t + 2p/w) = e^{A_s 2p/w} s^*(t) + \int_t^{t+2p/w} e^{A_s(t+2p/w-t)} (A_x x_1^*(t) + \Lambda x(t) + \tilde{u}(t)) dt.$$

Разложим также переходную матрицу в ряд Тейлора

$$e^{A_s(t+2p/w-t)} = I_p - A_s(t-t-2p/w) + A_s^2 \frac{(t-t-2p/w)^2}{2} - A_s^3 \frac{(t-t-2p/w)^3}{6} + \mathbf{K}$$

Тогда согласно формуле Коши

$$s^*(t + 2p/w) = e^{A_s 2p/w} s^*(t) + \int_t^{t+2p/w} \left(I_p - A_s(t-t-2p/w) + A_s^2 \frac{(t-t-2p/w)^2}{2} + \mathbf{K} \right) \times (u_0(t) + u^*(t) + \Lambda x(t) + A_x x_1^*(t)) dt,$$

где $u^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t))$.

Предварительно вычислим значения интегралов

$$-A_s \int_t^{t+2p/w} (t-t-2p/w) u^*(t) dt =$$

1)

$$= A_s 2p/w \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i\omega} \cos(i\omega t) + \frac{1}{i\omega} \sin(i\omega t) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & A_s^2 \int_t^{t+2p/w} \frac{(t-t-2p/w)^2}{2} u^*(t) dt = \\
 2) & = A_s^2 \frac{(2p/w)^3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{a_i}{2pi} \cos(iwt) + \frac{b_i}{2pi} \sin(iwt) \right)
 \end{aligned}$$

Продолжая подобные рассуждения для компоненты ряда матричной экспоненты с номером k , получим

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+2p/w} (-1)^k A_s^k \frac{(t-t-2p/w)^k}{k!} u^*(t) dt = \\
 & = (-1)^k A_s^k \frac{(2p/w)^{k+1}}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{a_i}{2pi} \cos(iwt) + \frac{b_i}{2pi} \sin(iwt) \right)
 \end{aligned}$$

Запишем выражение для $\mathfrak{E}^*(t)$ в виде

$$\mathfrak{E}^*(t) = \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} \mathfrak{E}(q) dq = \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{s^*(t+2p/w) - s^*(t)}{2p/w}.$$

Согласно полученным выражениям

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}^*(t) & = \lim_{2p/w \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{A_s 2p/w} - I_p)}{2p/w} s^*(t) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_s^k \frac{2p/w^k}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{a_i}{2pi} \cos(iwt) + \frac{b_i}{2pi} \sin(iwt) \right) \\
 & \left. + \frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} e^{A_s(t+2p/w-t)} A_x x_1^*(t) dt \right) + u_0(t).
 \end{aligned}$$

Раскрыв неопределенность с использованием правила Лопиталя

$$\begin{aligned}
 & \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+2p/w} e^{A_s(t+2p/w-t)} A_x x_1^*(t) dt}{2p/w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 & = \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d(2p/w)} \int_t^{t+2p/w} e^{A_s(t+2p/w-t)} A_x x_1^*(t) dt}{1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{2p/w \rightarrow 0} \left(A_s \int_t^{t+2p/w} e^{A_s(t+2p/w-t)} A_x x_1^*(t) dt + A_x x_1^*(t+2p/w) \right) = \\
&= A_x x_1^*(t); \\
&\lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{(e^{A_s 2p/w} - I_p)}{2p/w} s^*(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{2p/w \rightarrow 0} A_s e^{A_s 2p/w} s^*(t) = A_s s^*(t),
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_0^*(t) &= \lim_{2p/w \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_s \frac{(2p/w)^k}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{a_i}{2pi} \cos(iwt) + \frac{b_i}{2pi} \sin(iwt) \right) + \\
&+ A_x x_{10}^*(t) + A_s s_0^*(t) + \Lambda x_0(t) + u_0(t) = A_x x_{10}^*(t) + A_s s_0^*(t) + \Lambda x_0(t) + u_0(t).
\end{aligned}$$

Также раскрываем неопределенность

$$\begin{aligned}
\lim_{2p/w \rightarrow 0} s_0^*(t) &= \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{1}{2p/w} \int_t^{t+2p/w} s^*(q) dq = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d(2p/w)} \int_t^{t+2p/w} s^*(q) dq}{1} = \lim_{2p/w \rightarrow 0} s^*(t+2p/w) = s^*(t); \\
\lim_{2p/w \rightarrow 0} \mathfrak{G}_0^*(t) &= \lim_{2p/w \rightarrow 0} \frac{s^*(t+2p/w) - s^*(t)}{2p/w} = \mathfrak{G}^*(t), \\
\lim_{2p/w \rightarrow 0} x_0(t) &= x(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, получено предельное уравнение в виде

$$\mathfrak{G}_0^* = A_x x_{10}^* + A_s s_0^* + \Lambda x + u_0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{G}^* = A_x x_1^* + A_s s^* + \Lambda x + u_0.$$

Вычисление средней составляющей $u_0(t)$ управляющего воздействия $u(t)$ приведено в приложении I.

Подставляя $u_0(t)$ в последнее уравнение получим (см. приложение II)

$$\begin{aligned}
(25) \quad \mathfrak{G}_1^* &= (A_{11} - A_{12}C)x_1^* + A_{12}s^*, \\
\mathfrak{G}^* &= A_x x_1^* + (A_s - kl)s^* - k\Lambda_2 z_1 + \Lambda x.
\end{aligned}$$

Решения данной системы может быть выписано с использованием формулы Коши. Согласно (25) оно не содержит исходно-

го высокочастотного сигнала. Для упрощения обозначений возмущение x^* , обусловленное несимметричностью характеристик переключения исполнительных устройств, включено в вектор внешних возмущений Λx . Здесь и далее полагается, что структура модели возмущений (7) учитывает наличие постоянной составляющей в выходной переменной Λx .

Теорема доказана.

На основе доказанной теоремы покажем асимптотическую сходимость переменных системы (25) к нулю при использовании управляющих воздействий вида (23). Вводя новую переменную $e = x - kz_1$, перепишем (21) в виде

$$\dot{x}_1^* = (A_{11} - A_{12}C)x_1^* + A_{12}s^*,$$

$$\dot{x} = A_x x_1^* + (A_s - kl)s^* + \Lambda e,$$

$$\dot{e} = We - B_1 k l s^*.$$

Согласно методу эквивалентного управления [2] при $l \rightarrow \infty$ ($l/w \rightarrow 0$), получим $(kls^*)_{eq} \rightarrow -A_x x_1^* - \Lambda e$. Тогда уравнения предыдущей системы могут быть переписаны в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}C & 0 \\ B_1 A_x & W + B_1 \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ e \end{pmatrix}.$$

Темпы сходимости переменных x_1^* , e к нулю могут быть назначены произвольным образом в силу предположения о наблюдаемости пары $\{\Lambda, W\}$.

Таким образом, в данном разделе решена задача обеспечения инвариантности движений системы (21) от внешних возмущений x , для которых известна порождающая модель, при неидеальных релейных управляющих воздействиях. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при управлении электромеханическими системами с исполнительными устройствами, имеющими заведомо ключевую природу.

4. Конечная частота переключений, оценка погрешности

Применение вибролинеаризирующего сигнала с бесконечной частотой возможно только в теории. На практике скорость переключения ограничивается множеством факторов, одним из основных является увеличение тепловых потерь ключевых устройств при высокочастотных переключениях. Рассматривая допредельный случай при конечной частоте переключений ω , получим, что движения системы (21) при попадании в Δ/l -окрестность описываются уравнениями (25) с точностью до малой величины, зависящей от ω . В данном разделе обсуждаются некоторые аспекты, которые необходимо учитывать при конечной частоте ω . Показано, что при конечной ω подавление возмущений, с известной моделью, возможно только с заданной точностью.

Отметим, что вибролинеаризирующий сигнал был специально введен в контур обратной связи, чтобы колебания замкнутой системы происходили на максимально возможной, с точки зрения реализации, частоте переключений ω исполнительных элементов.

Для обеспечения инвариантности движения системы (21) от внешнего модельного возмущения в разделе 3 был предложен метод динамической компенсации, основанный на разделении движений за счет выбора коэффициента усиления обратной связи $l \rightarrow \infty$. При конечной частоте модулирующего сигнала ω возможна ситуация, когда за счет достаточно большого коэффициента l моменты переключения уже не определяются модулирующим сигналом. Иначе говоря, при $l \rightarrow \infty$ и конечной частоте ω скорость роста сигнала s_{new} может существенно превосходить величину производной модулирующего сигнала $d(t)$, что в свою очередь может приводить к возникновению автоколебаний с частотой, превышающей частоту ω . Такая ситуация нежелательна с практической точки зрения из-за тепловых потерь в

ключевых элементах, так как частота вибролинеаризующего сигнала выбирается и так максимально возможной.

Чтобы избежать указанной проблемы необходимо предусмотреть ограничение на величину коэффициента усиления обратной связи l . Найдем соотношение между величинами l и w , чтобы при любых возможных ситуациях моменты переключения управляющих воздействий в основном зависели от вибросигнала $d(t)$.

Если выполняются условия (24) для переменной s_{new} , то можно указать ограничение на величину производной \dot{s}_{new}

$$\|\dot{s}_{new}\| \leq l\bar{M},$$

где \bar{M} – некоторая константа.

Записывая выражение для производной от переменной $\tilde{s} = s_{new} + d(t)$, получим

$$\dot{\tilde{s}} = l(f(x_1^*, s_{new}, z_1) + \tilde{u}) + I_p \dot{d}(t),$$

где $\tilde{u} = \overline{\text{sign}(\tilde{s})}$, $f(x_1^*, s_{new}, z_1) = A_x x_1^* + l^{-1}(A_s + L_2 B_1) s_{new} + l^{-1}(L_2 W - (A_s + L_2 B_1) L_2) z_1 + Lx$.

Если выбрать коэффициент l , так, что

$$(26) \quad l > |\dot{d}(t)| / \bar{M}, \quad |\dot{d}(t)| = \frac{2wh}{p},$$

то получим, что при $\tilde{s} \notin [-\Delta_2, \Delta_1]$

$$\tilde{s} \dot{\tilde{s}} < 0.$$

Другими словами переменная \tilde{s} будет стремиться к области $[-\Delta_2, \Delta_1]$, т.е. сигнал $s_{new}(t)$ будет стремиться обрабатывать вибролинеаризующий сигнал $-d(t)$. Если бы управляющее воздействие реализовывалось с помощью идеального реле, то при выполнении условия (26) $s_{new}(t)$ в точности совпадало бы с $d(t)$. Однако из-за наличия неидеальностей выполняется неравенство

$$\|s_{new}(t) + d(t)\| \leq [-\Delta_2, \Delta_1].$$

Итак, при коэффициенте l , удовлетворяющем условию (26), движения системы (19) происходят в $[-\Delta_2, \Delta_1]$ окрестности начала координат. При этом величины $|\dot{s}_i^*|$, $i=1, \dots, p$ могут существенно превосходить величину $|\dot{d}^*(t)|$, что при неизменной величине амплитуды колебаний $(\Delta_2 + \Delta_1)$ переменных \tilde{s}_i неизбежно приведет к повышению частоты переключений w_l , которая в данном случае будет $w_l > w$.

Впрочем, для некоторых видов исполнительных устройств, изображенных на рисунке 1, условие (26) может оказаться более грубым. Рассмотрим это на простейшем примере одномерной системы.

Пример. Пусть

$$\dot{d}^*(t) = -\text{sign}(\tilde{s}),$$

$$\dot{s}^* = -l \overline{\text{sign}(\tilde{s})} + \dot{d}^*(t), \quad \tilde{s} \in R^1, \quad \tilde{s}(t) = ls^*(t) + \dot{d}^*(t)$$

где параметры исполнительного устройства: $\bar{M} = M^1 = M^2 = 10$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 0,1$, функция $\overline{\text{sign}(\cdot)}$ – реле с гистерезисом; параметры вибросигнала: $h = 0,3$, $w = 200p$.

При данных значениях параметров

$$|\dot{d}^*(t)| < \frac{2wh}{p} = 400 \cdot 0,3 = 120.$$

Следуя рассуждениям, описанным выше, а также согласно (26) при $l > 120/M = 120/10 = 12$ возникает реальный скользящий режим для переменной \tilde{s} , которая находится внутри отрезка $[-0,1; 0,1]$. Однако для некоторых l , удовлетворяющих (26) возможны переключения управляющего воздействия, реализованного с помощью реле с гистерезисом, с частотой вибросигнала w . Поясним это.

Для рассматриваемого примера, если в установившемся режиме существует периодический режим, то переменная $s^*(t)$ в силу симметричности исполнительного устройства при частоте колебаний $w = 200p$ колеблется с амплитудой (см. рис. 6)

$$\max(s^*(t)) = \bar{M} \cdot (2p/w)/4 = 0,025.$$

Амплитуда колебаний переменной ls^*

$$\max(ls^*) < l\bar{M} \cdot (2p/w)/4 < 0,025l.$$

В силу системы получим, что переменная $\tilde{s}(t)$ (см. рис. 6) является суммой двух треугольных сигналов, сумма которых может переключать управление $\tilde{u}(t)$ с частотой w и при некоторых l из (26).

Действительно, при $l > 12$ величина $ls^*(t)$ растет быстрее, чем вибросигнал и начинает оказывать преобладающее влияние на моменты переключения управляющего воздействия. Однако переменная $\tilde{s}(t)$ может иметь величину производной как большую, чем $|d\&(t)|$ (сумма возрастающих $ls^*(t)$ и $d(t)$), так и меньшую по сравнению с $|d\&(t)|$ (сумма одного возрастающего и одного убывающего из сигналов $ls^*(t)$ и $d(t)$). Если средняя величина производной на полупериоде совпадает со значением

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \&(t) dt = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)w}{p} = 0,2 \cdot 200 = 40,$$

то получим, что может существовать периодический режим с частотой вибросигнала w при некоторых l из (26).

Вычислим подробно последний интеграл

$$\begin{aligned} \frac{w^{p/w}}{p} \int_0^{p/w} \&(t) dt &= \frac{w}{p} \left(\int_0^{t_1} (l\bar{M} + 2wh/p) dt + \right. \\ &+ \left. \int_{t_1}^{p/w} (l\bar{M} - 2wh/p) dt \right) = \frac{w}{p} \left((l\bar{M} + 2wh/p) \Big|_0^{t_1} + \right. \\ &+ \left. (l\bar{M} - 2wh/p) t \Big|_{t_1}^{p/w} \right) \end{aligned}$$

По построениям $d(0) = pl\bar{M}/(2w) - \Delta_1 \leq h$ (см. рис. 6), соответственно

$$t_1 = p(h - pl\bar{M}/(2w) + \Delta_1)/(2wh).$$

Данное выражение имеет смысл только при

$$h - pl\bar{M}/(2w) + \Delta_1 \geq 0,$$

т.е. при

$$(27) \quad l \leq \frac{2w}{pM}(h + \Delta_1) = 16.$$

Вычисляя, наконец, среднее значение производной, найдем

$$\begin{aligned} & \frac{w}{p}((l\bar{M} + 2wh/p)t_1 + (l\bar{M} - 2wh/p)(p/w - t_1)) = \\ & \frac{w}{p}(4wh/pt_1 + (l\bar{M} - 2wh/p)p/w) = \\ & = l\bar{M} - 2wh/p + 2w/p(h - pl\bar{M}/(2w) + \Delta_1) = \\ & = 2\Delta_1 w/p = 0,2 \cdot 200 = 40. \end{aligned}$$

Итак, действительно для реле с гистерезисом возможно переключение с частотой вибросигнала при l , удовлетворяющем (26).

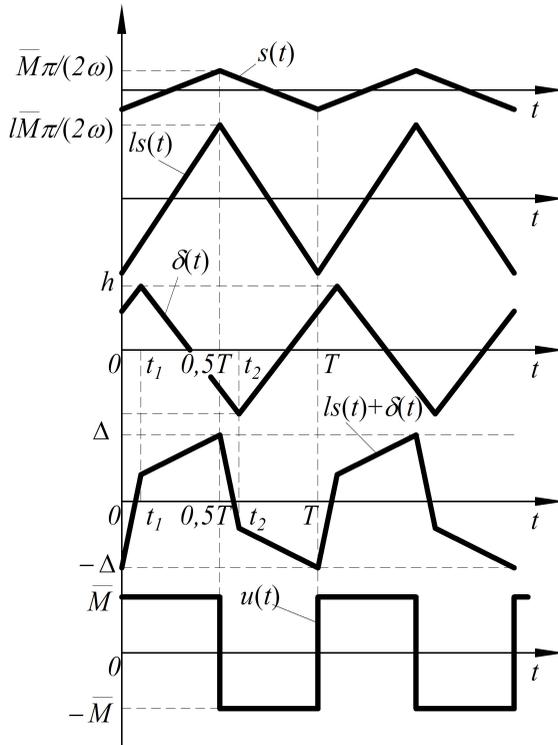


Рис. 6. Переключение с частотой вибросигнала при l из (26)-(27).

При дальнейшем же увеличении коэффициента l возникает описанная выше ситуация отработки вибросигнала в реальном скользящем режиме (рис. 7).

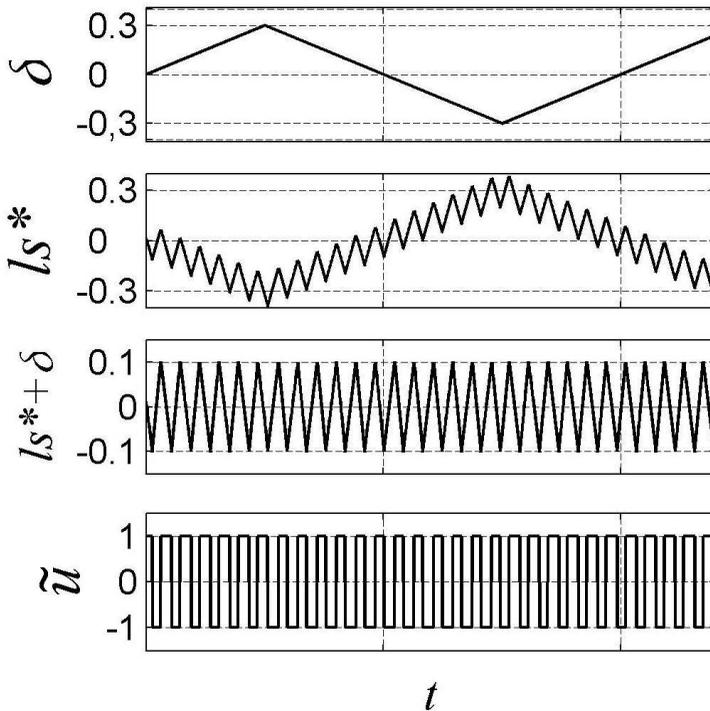


Рис. 7. Результаты моделирования при $l = 100$

Однако если рассмотреть этот же пример, но с релейным элементом с характеристикой переключения, изображенной на рис. 1в, то получим, что и при l из (26) возникают переключения с частотой, отличной от ω (см. рис. 8).

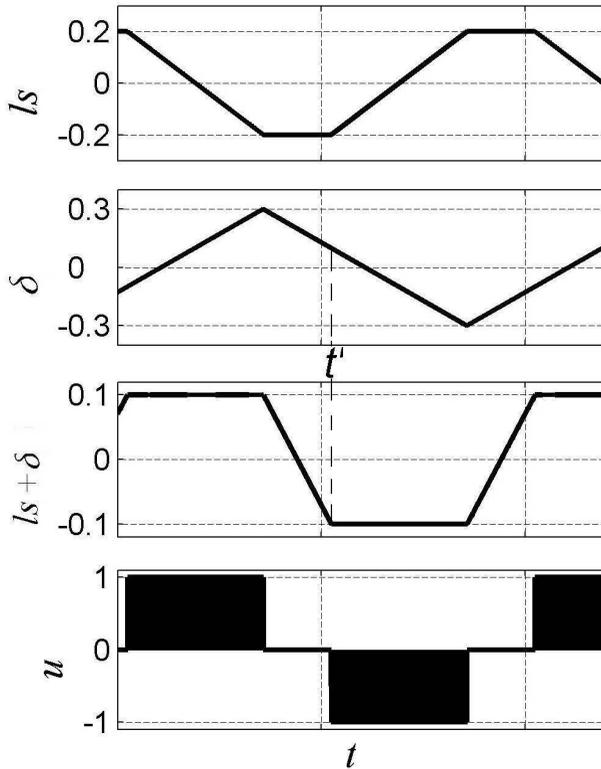


Рис. 8. Результаты моделирования для $l=15$ и исполнительного устройства на рис. 1в

Объединяя все вышеизложенное, мы предлагаем выбирать коэффициент l так, чтобы неравенство (26) не выполнялось.

4.2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

В разделе 3 было показано, что в предельном случае $w \rightarrow \infty$ обеспечивается полное подавление внешнего модельного возмущения Δx . Однако при конечной частоте переключений среднее значение управляющего воздействия $u_0(t)$ будет являться ли-

нейной функцией от компонент $l s_0^*(t) + \Lambda z_{10}(t)$ ($z_{10}(t)$ среднее на периоде значение переменной $z_1(t)$) лишь приближенно с некоторой погрешностью. В данном параграфе будет найдена оценка этой погрешности подавления внешних ограниченных модельных возмущений.

Рассмотрим решение системы (21), (23) на периоде колебаний $t \in [t, t + 2p/w]$

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}(t-t)} \tilde{x}(t) + \int_t^t e^{\tilde{A}(t-q)} (\tilde{B}\tilde{u}(q) + \tilde{L}x(q)) dq,$$

$$\text{где } \tilde{x} = (x_1^* \quad s^* \quad e)^T, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}C & A_{12} & 0 \\ A_x & A_y & 0 \\ 0 & lB_1 & W \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L} = (0_{m \times (n-p)} \quad \Lambda^T \quad 0_{m \times m})^T.$$

Для управляющего воздействия $\tilde{u}(t)$ и внешнего возмущения могут быть указаны ограничения

$$|\tilde{u}(q)| \leq M, \quad |x(q)| \leq N.$$

Тогда разница значений $\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t)$ может быть оценена

$$\begin{aligned} & \| \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t) \| \leq \| (e^{\tilde{A}(t-t)} - I_{n+m}) \tilde{x}(t) \| + \\ (28) \quad & + \| \int_t^t e^{\tilde{A}(t-q)} (\tilde{B}\tilde{u}(q) + \tilde{L}x(q)) dq \| \leq O_1(1/w), \end{aligned}$$

где $O_1(1/w) = (e^{\|\tilde{A}\|2p/w} - I_{n+m}) \| \tilde{x}(t) \| + e^{\|\tilde{A}\|2p/w} (M + \|\Lambda\| N)$.

Величина X является малой величиной порядка малости $1/w$, и как было показано в предыдущем разделе

$$\lim_{w \rightarrow \infty} O_1(1/w) = 0.$$

Поскольку функция $\tilde{x}(t)$ является Липшицевой, то по теореме о среднем найдется такой момент времени $q' \in [t, t + 2p/w]$, что

$$\tilde{x}(q') = \tilde{x}_0(t).$$

Согласно (28) можем оценить также норму разности $\tilde{x}(t) - \tilde{x}_0(t)$ как

$$\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_0(t)\| \leq O_1(1/w).$$

Используя последнее неравенство, запишем оценку нормы

$$\begin{aligned} & \|s_{new\ i}(t) - s_{new\ 0i}(t)\| = \|ls^*(t) + \Lambda z_1(t) - (ls_0^*(t) + \Lambda z_{10}(t))\| \leq \\ (29) \quad & \leq O_2\left(\frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

где $O_2(1/w) = (l + \|\Lambda\|)O_1(1/w)$.

Используя результаты вычисления средней составляющей управляющего воздействия (см. Приложение II) при $w \rightarrow \infty$, найдем среднюю составляющую, например, для реле с гистерезисом (см. рис. 1а) при конечной частоте w (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} u_{0i}(t) &= -\frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} \text{sign}(s_{new\ i}(q) + d(q)) dq = \\ &= \frac{w}{2p} \left(M^2 \int_t^{t_1} dt - M^1 \int_{t_1}^{t_2} dt + M^2 \int_{t_2}^{t+2p/w} dt \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} t_1 - t = \frac{\Delta_1 - s_{new\ i}(t_1) 2p}{4h} \\ t_2 - t = \frac{p}{w} + \frac{\Delta_2 + s_{new\ i}(t_2) 2p}{4h} \end{array} \right| = \\ &= \frac{M^2 - M^1}{2} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4h} (M^2 + M^1) - \\ & - \frac{M^2 + M^1}{4h} (s_{new\ i}(t_1) + s_{new\ i}(t_2)) = \\ &= x_i^* - \frac{M^2 + M^1}{4h} (s_{new\ i}(t_1) + s_{new\ i}(t_2)). \end{aligned}$$

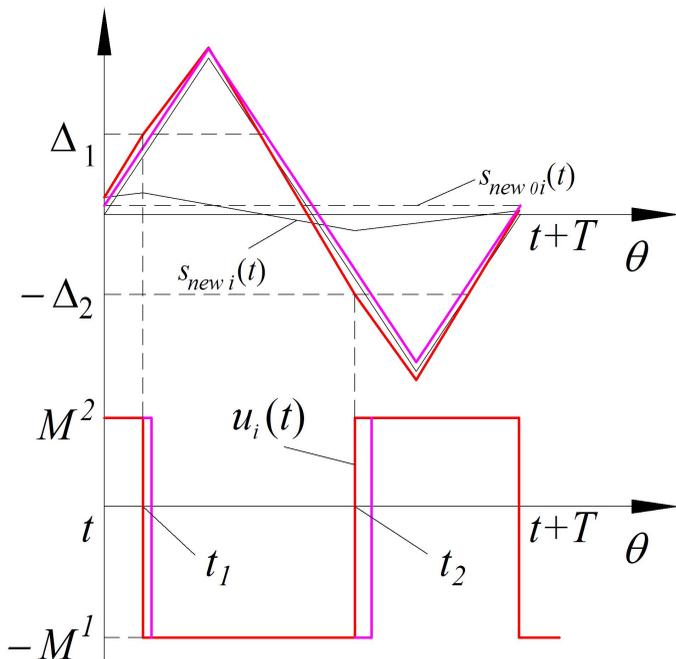


Рис. 9. Вычисление средней составляющей при конечной частоте вибросигнала

Как видно, для вычисления среднего значения вектора $u_0(t)$ необходимо знать решение системы, которое в общем случае можно получить только численно. Используя (29), можно получить оценку приближенного вычисления среднего значения компонент $u_{0i}(t)$ вектора $u_0(t)$ (см. приложение II)

$$\|u_0(t) - \mathbf{x}_i^* - ks_{new\ 0i}(t)\| \leq O_3(1/w),$$

где $O_3 = kO_2(1/w)$, k определяется согласно приложению II.

Подводя итог рассуждениям, при конечной частоте переключений получим, что система дифференциальных уравнений для средних составляющих от переменных системы (21), (23) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{10}^* &= (A_{11} - A_{12}C)x_{10}^* + A_{12}s_0^*, \\ (30) \quad \mathfrak{X}_0^* &= A_x x_{10}^* + (A_s - kl)s_0^* + \Lambda e_0 + k\bar{x}, \quad e_0(t) = x_0(t) - kz_{10}(t), \\ \mathfrak{X}_0 &= We_0 - B_1 k l s_0, \end{aligned}$$

где $e_0 = \frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} e(q) dq$, \bar{x} – ограниченное по норме возмущение, $\|k\bar{x}\| \leq O_3$.

Траектории усредненной системы (30), если конечно она устойчива, при конечной частоте будут сходиться в некоторую окрестность начала координат, размеры которой определяются нормой $\|k\bar{x}\| \leq O_3$. Таким образом, предлагаемый подход позволяет компенсировать среднее значение внешнего модельного возмущения с заданной точностью.

Установившаяся ошибка подавления внешних возмущений для усредненной системы (30) может быть оценена как

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \|\tilde{A}\| \|L_x \bar{x}\| = \|\tilde{A}\| O_3(1/w),$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}C & A_{12} & 0 \\ A_x & A_s - kl & \Lambda \\ 0 & lB_1 & W \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Пример.

Динамическая модель многих электромеханических систем может быть описана системой дифференциальных уравнений вида

$$\mathfrak{X}_1 = x_2,$$

$$\mathfrak{X}_2 = x_3,$$

$$\mathfrak{X}_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + bu + \Lambda x,$$

где x_1 – координата тела (угол поворота), x_2 – скорость движения (вращения), x_3 – сила тяги (электромеханический момент),

действующая на тело, u – управляющее воздействие (например, напряжение на обмотке двигателя, магнита и т.д.), a_1, a_2, b – некоторые постоянные параметры, $x \in R^m$ – внешнее возмущение, $\Lambda \in R^{l \times m}$.

Выберем поверхность скольжения так, чтобы в скользящем режиме верхняя подсистема принимала вид

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -50x_1 - 15x_2.$$

Как видно, для этого нужно обеспечить выполнение следующего равенства

$$x_3 = -50x_1 - 15x_2.$$

Таким образом, выберем уравнение поверхности скольжения в виде

$$s = x_3 + 50x_1 + 15x_2.$$

В данном примере примем, что внешнее возмущение Λx содержит постоянную и гармоническую составляющую. Иными словами, его модель может быть представлена в виде

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = w_0 x_3, \quad x \in R^3, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{x}_3 = -w_0 x_2.$$

где w_0 – частота колебаний гармонической составляющей внешнего возмущения.

Составляя матрицу наблюдаемости для пары $\{\Lambda, W\}$, получим

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda W \\ \Lambda W^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -w_0 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -w_0^2 + w_0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы наблюдаемости $\det H = w_0(w_0 - 1)^2$, находим, что $\det H \neq 0$, при $w_0 \neq 0, 1$. Таким образом, при $w_0 \neq 0, 1$ пара $\{\Lambda, W\}$ наблюдаема.

Предполагается, что

$$w_0 \ll w,$$

где w – частота вибросигнала.

Управляющие воздействия выбираются в виде (15)

$$u = -\overline{\text{sign}}(ls + \Lambda z + d(t)),$$

где $\overline{\text{sign}}(\cdot)$ функция, изображенная на рис. 1а, параметры реле

$M^1 = 1,2$, $M^2 = 4$, $\Delta_1 = 0,1$, $\Delta_2 = 0,2$, величина амплитуды вибросигнала $h = 0,3$, частота вибросигнала $w = 10^4$, коэффициент $l = 10$.

Уравнения в виде (14)

$$\mathfrak{X}_1 = x_2,$$

$$\mathfrak{X}_2 = -50x_1 - 15x_2 + s,$$

$$\mathfrak{X}_3 = 9150x_1 - 165x_2 - 103s + 600u + \Lambda x,$$

$$\mathfrak{E}_1 = e_2 - b_1e_1 - b_1e_3,$$

$$(31) \quad \mathfrak{E}_2 = 100e_3 - b_2e_1 - b_2e_3,$$

$$\mathfrak{E}_3 = -100e_2 - b_3e_1 - b_3e_3$$

где для исходной системы были приняты параметры $a_3 = -118$, $a_2 = -1760$, $a_1 = 400$, $b = 600$.

Выберем коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 в (22) так, чтобы корни характеристического уравнения p_1 , p_2 , p_3 замкнутой системы (31) равнялись

$$p_1 = -100, \quad p_2 = -110, \quad p_3 = -120.$$

В этом случае коэффициенты характеристического полинома

$$p^3 + I_1p^2 + I_2p + I_3 = 0 \text{ равны}$$

$$I_1 = 330, \quad I_2 = 36200, \quad I_3 = 1,32 \cdot 10^6.$$

Составим характеристическое уравнение для (31)

$$W - B\Lambda = \begin{pmatrix} -b_1 & 1 & -b_1 \\ -b_2 & 0 & -b_2 + 100 \\ -b_3 & -100 & -b_3 \end{pmatrix}$$

$$p^3 + (b_1 + b_3)p^2 + (10^4 - 99b_2)p + (10^4 b_1 + 100b_3) = 0$$

Выражение для вычисления коэффициентов матрицы B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -99 & 0 \\ 10^4 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 - 10^4 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

На рис. 10 представлены результаты моделирования при $u = -\text{sign}(s)$, где функция $\text{sign}(s)$ имеет характеристику переключения, изображенную на рис. 1а. Как видно, ошибка регулирования имеет составляющую, обусловленную внешними возмущениями порядка 10^{-5} и довольно значительные колебания более высокой частоты порядка $2 \cdot 10^{-6}$.

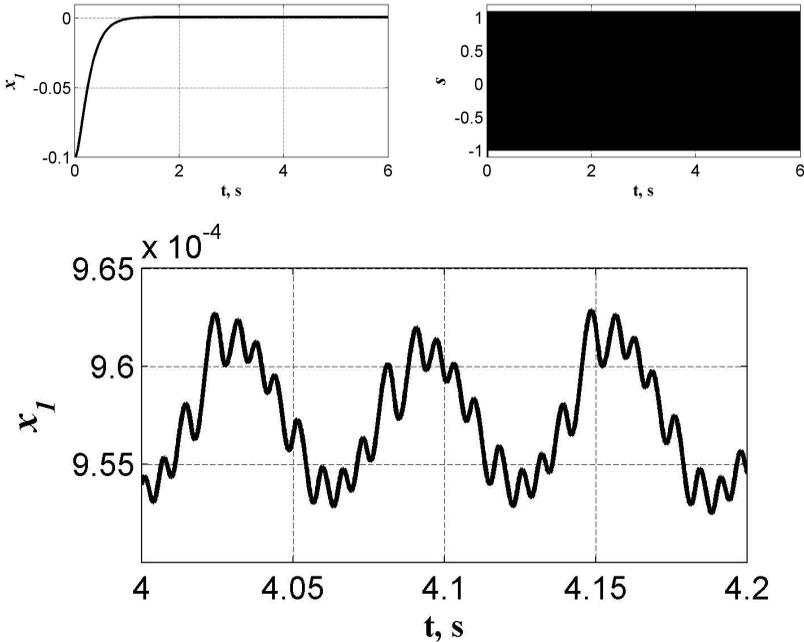


Рис. 10. Результаты моделирования при $u = -\text{sign}(s)$

На рис. 11 представлены результаты моделирования при управлении в виде (23).

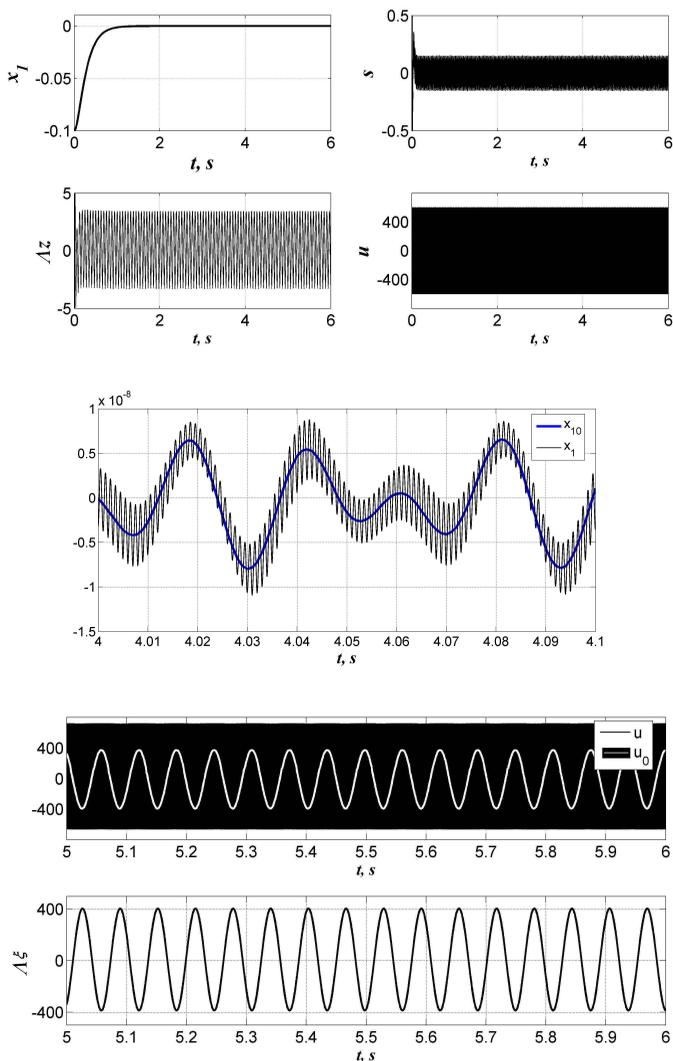


Рис. 11. Результаты моделирования при управлении (23)

Частота колебаний повышена за счет внешнего модулирующего сигнала $d(t)$, что приводит к уменьшению амплитуды колебаний переменной $s(t)$ и x_1 соответственно. Величины ошибок в этом случае на несколько порядков меньше, чем при классическом подходе и примерно равны 10^{-8} и $0,7 \cdot 10^{-8}$ соответственно. Как было указано в параграфе 4, в силу конечности частоты ω модулирующего сигнала $d(t)$ не удается полностью подавить влияние внешнего возмущения, несмотря на то, что его модель известна. Однако если полученной точности недостаточно, величину ошибки можно уменьшить за счет повышения частоты ω .

Заключение

В данной работе рассматривались вопросы синтеза инвариантных систем с использованием неидеальных релейных исполнительных элементов. Был предложен алгоритм компенсации внешних возмущений, порождаемых известной моделью, с использованием принципов динамической компенсации. За счет добавления высокочастотного модулирующего сигнала на вход исполнительных элементов удалось подавить нежелательные колебания в установившемся режиме («чаттеринг»). Синтезированный нелинейный алгоритм управления обеспечивает асимптотическую сходимость переменных системы к нулю с темпами, задаваемыми выбором коэффициентов обратной связи.

Список литературы

- [1] УОНЭМ У. М. *Линейные многомерные системы управления/ Геометрический подход*. М.: Наука, 1980.
- [2] УТКИН В.И. *Скольльзящие режимы в задачах оптимизации и управления*. М.: Наука, 1982.

- [3] *Системы автоматического управления с переменной структурой* / ПОД РЕДАКЦИЕЙ ЕМЕЛЬЯНОВА С.В. М.: Наука, 1967.
- [4] DRAZENOVIC D. *The invariance conditions in variable structure systems*. Automatica. 1969. Vol. 5. No. 3. P. 287-295.
- [5] YOUNG K.K., KOKOTOVIC P.V., UTKIN V.I. *A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems*. IEEE Trans. 1977. Vol. AC-22. P. 931-939.
- [6] АНДРЕЕВ Ю. Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. М.: Наука, 1976.
- [7] УТКИН В.И., ЯНГ К.Д. *Методы построения плоскостей разрыва в многомерных системах с переменной структурой* // АиТ. 1978. № 10. С. 72–77.
- [8] УТКИН В.А., УТКИН В.И. *Синтез инвариантных систем методом разделения движений* // АиТ. 1983. № 12. С. 39-48.
- [9] UTKIN V.A. *The method of dynamic compensation in a problem of estimation of external disturbances* // In proc. SICPRO'06. Moscow, 2006. P. 754-771.
- [10] ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Электрические системы автоматического регулирования*. М.: Оборонгиз, 1957.
- [11] ЦЫПКИН Я.З. *Релейные автоматические системы*. М.: Наука, 1974.
- [12] НГУЕН К.Х., УТКИН В.А. *Задачи управления двигателем постоянного тока* // АиТ. 2006. №5. С. 102–118.

INVARIANCE IN SYSTEMS WITH NON-IDEAL RELAY CONTROL

Sergey Kochetkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior research worker (ser711@yandex.ru).

Utkin Victor, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-93-21, e-mail: vicutkin@ipu.ru).

Abstract: The invariance problem is considered in the paper for linear stationary systems with relay control inputs. The classical way of solving this problem consists in using sliding mode control algorithms. When actuators have imperfections (unmodelled dynamics, nonlinearities and so on), the chattering problem exists. In this paper the invariance problem is considered for system with non-ideal relay actuators. There are two approaches for solving mentioned problem. First method is based on parameterization of nonlinearities of relay by feedback gain coefficients. It is shown that chattering is suppressed completely when feedback coefficients tend to infinity. Another approach consists in using high frequency modulation signal to linearize the switching characteristics of relays. Then dynamic compensator approach is utilized for linearized system. The simulation results show the efficiency of proposed algorithms.

Keywords: relay systems, invariance problem, real sliding modes, deep feedback control, linearization by high frequency signal.

Приложение I

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции Ляпунова

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^{*2},$$

производная которой в силу (21) имеет вид

$$(PI) \dot{V}_i^* = s_i^* (A_{x,i} x_1^* + A_{s,i} s^* + L_i x - \overline{\text{sign}}(l s_i^*)), \quad i = \overline{1, p}.$$

Покажем, что область $-\Delta_2/l \leq s_i^* \leq \Delta_1/l$ является областью притяжения системы, причем, попадание в данную область обеспечивается за конечное время.

1) Для случая $s_i^* > \Delta_1/l$: $\tilde{u}_i = \overline{\text{sign}}(l s_i^*) = -M^1$. Дифференциальное уравнение для s_i^*

$$\dot{s}_i^* = A_{x,i} x_1^* + A_{s,i} s^* + L_i x - M^1, \quad i = \overline{1, p}.$$

Производная согласно условиям теоремы (22) ограничена сверху $\dot{s}_i^* \leq -x_1$. С учетом $s_i^* > \Delta_1/l$, (П1) и условиям (22) имеем

$$\begin{cases} s_i^* > 0 \Rightarrow |s_i^*| = s_i^*, \sqrt{2V_i} = |s_i^*|; \\ \dot{V}_i^* = s_i^* (A_{x,i} x_1^* + A_{s,i} s^* + L_i x - M^1) = \\ = |s_i^*| (A_{x,i} x_1^* + A_{s,i} s^* + L_i x - M^1) \leq -I_1 \sqrt{2V_i}. \end{cases}$$

В соответствии с решением последнего дифференциального уравнения получим

$$V_i(t) = (-I_1 \sqrt{2}t + \sqrt{V_i(0)})^2.$$

Оценка времени попадания изображающей точки системы в заданную полуокрестность $s_i^* \leq \Delta_1/l$ определяется выражением

$$\begin{aligned} t_i^+ &= \frac{\sqrt{2}}{I_1} \left(\sqrt{V_i(0)} - \frac{\Delta_1}{l\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{I_1} \left(s_i^*(0) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\Delta_1}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{I_1} \left(s_i^*(0) - \frac{\Delta_1}{l} \right) \end{aligned}$$

2) Рассуждения при $s_i^* < -\Delta_2/l$ аналогичны предыдущим.

При выполнении условий (22) траектории системы (21) также сойдутся к границе рассматриваемой области $s_i^* \geq -\Delta_2/l$ за время

$$\begin{aligned} t_i^- &= \frac{\sqrt{2}}{I_2} \left(\sqrt{V_i(0)} + \frac{\Delta_2}{l\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{I_2} \left(s_i^*(0) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\Delta_2}{l\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{I_2} \left(s_i^*(0) + \frac{\Delta_2}{l} \right) \end{aligned}$$

Из рассмотренных случаев следует, что

$$|s_i^*| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l, \quad \|s^*\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для системы (19).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$, $M = \max(M^1, M^2)$. По смыслу начальные условия для систем (19) и (21) совпадают:

$$(П2) \quad x_1^*(0) = x_1(0), \quad s_i^*(0) = s_i(0), \quad i = \overline{1, p}.$$

Пусть их величина такая, что $s_i^*(0) = s_i(0) \geq \Delta/l$ или $s_i^*(0) = s_i(0) \leq -\Delta/l$, т.е. все управляющие воздействия как идеальные u , так и реальные \tilde{u} в начальный момент времени находятся в зоне насыщения.

Без ограничения общности предположим, что для системы (19) скользящий режим возникает в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_p в следующей последовательности: $s_1(t_1) = 0$, потом $s_2(t_2) = 0$ и т.д. При этом соответствующие компоненты векторов управляющих воздействий

$$(П3) \quad u_i(t) = \tilde{u}_i(t) \quad (t \leq t_i'),$$

где t_i' – некоторый момент времени.

Предложение 1. Возможны две ситуации. Согласно первой t_i' соответствует моменту времени, когда s_i^* попадает в окрестность $-\Delta_2/l \leq s_i^* \leq \Delta_1/l$, т.е. начинаются переключения $\tilde{u}(t)$. Во втором случае $s_i(t_i') = 0$ и начинаются переключения $u(t)$, $t_i' = t_i$. В качестве конструктивного доказательства теоремы рассмотрим пошаговую процедуру, в которой на каждом этапе показывается различие траекторий систем (19), (21) на малую величину порядка Δ/l .

Шаг 1. Определенно в силу (П2), (П3) для момента времени t_1' можно сказать, что в зависимости от начальных условий выполняется одно из равенств

$$(П4) \quad s_1(t_1') = s_1^*(t_1') = -\Delta_2/l, \quad \text{либо} \quad s_1(t_1') = s_1^*(t_1') = \Delta_1/l,$$

так как системы (19), (21) полностью совпадают. Согласно теореме 1 и учитывая, что $s_1(t_1) = 0$, для оценки величины $t_1 - t_1'$ при начальном условии (П4) получим оценку

$$t_1 - t_1' \leq c_1 \Delta / l,$$

$$\text{где } c_1 = \max \left(\frac{1}{I_1} \frac{\Delta_1}{l}, \frac{1}{I_2} \frac{\Delta_2}{l} \right).$$

Теперь для момента времени t_1 оценим разность решений систем (19) и (21):

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_1')} x(t_1') + \int_{t_1'}^{t_1} e^{A(t_1-t)} (u(t) + QRx) dt, x = (x_1, s)^T,$$

$$x^*(t_1) = e^{A(t_1-t_1')} x^*(t_1') + \int_{t_1'}^{t_1} e^{A(t_1-t)} (\tilde{u}(t) + QRx) dt, x^* = (x_1^*, s^*)^T,$$

$$\|x(t_1) - x^*(t_1)\| = \int_{t_1'}^{t_1} \|e^{A(t_1-t)} (u(t) - \tilde{u}(t))\| dt \leq$$

$$(П5) \leq \int_{t_1'}^{t_1} e^{A(t_1-t)} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| dt \leq M c_1 e^{\|A\| c_1 \Delta / l} \Delta / l \leq N_1 \Delta / l,$$

так как согласно (П2), (П3) $x(t_1') = x^*(t_1')$.

Шаг 2. В момент времени t_1 порядок уравнений, описывающих (1), понижается на единицу, так как $s_1(t_1) = 0$. Уравнения для (19), (21) примут вид

$$(П6) \quad \mathfrak{X}_1^* = (A_{11} - A_{12}C)x_1^* + A_{12}^1 s_1^{*1} + a_1 s_1^*,$$

$$\mathfrak{X}^* = A_x^1 x_1^* + A_s^1 s_1^{*1} + a_s^1 s_1^* + \Lambda^1 x + u^1,$$

$$\mathfrak{X}_1 = (A_{11} - A_{12}C)x_1 + A_{12}^1 s_1^1,$$

$$\mathfrak{X} = A_x^1 x_1 + A_s^1 s_1^1 + \tilde{u}^1 + \Lambda^1 x,$$

где $s^1 = (s_2 \quad \mathbf{K} \quad s_p)^T$, $s^{*1} = (s_2^* \quad \mathbf{K} \quad s_p^*)^T$, $u^1 = (u_2 \quad \mathbf{K} \quad u_p)^T$, $\tilde{u}^1 = (\tilde{u}_2 \quad \mathbf{K} \quad \tilde{u}_p)^T$; $A_{12}^1 \in R^{(n-p) \times (p-1)}$ – матрица A_{12} без первого столбца; $A_s^1 \in R^{(p-1) \times (p-1)}$ матрица A_s без первого столбца и первой строки, $A_x^1 \in R^{(p-1) \times (n-p)}$ – матрица A_x без первой строки;

a^1 – первый столбец матрицы A_{12} , a_s^1 – первый столбец матрицы A_s без первого элемента. Обозначив

$$x^1 = (x_1 \quad \mathbf{K} \quad s^1)^T, \quad A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}C & A_{12}^1 \\ A_x^1 & A_s^1 \end{pmatrix},$$

запишем норму разности решений для систем (Пб) в момент времени t_2' . Согласно предложению 1 рассмотрим 2 случая.

1) Пусть t_2' соответствует моменту времени, когда $s_2^* = \Delta_1/l$, либо $s_2^* = -\Delta_2/l$ ($s_2(t_2') \neq 0$). С учетом (Пз) $u^1(t_2') = \tilde{u}^1(t_2')$ $0 \leq t \leq t_2'$, то получим

$$\begin{aligned} & \|x^1(t_2') - x^{1*}(t_2')\| \leq \|e^{A^1(t_2'-t_1)}\| \|x^1(t_1) - x^{1*}(t_1)\| + \\ & + \int_{t_1}^{t_2'} \|e^{A^1(t_1-t)}(u^1(t) - \tilde{u}^1(t) + (a^1 \quad a_s^1)^T s_1^*(t))\| dt \leq \\ & \leq e^{\|A^1\| \|t_2'-t_1\|} \|x^1(t_1) - x^{1*}(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2'} \|e^{A^1(t_1-t)}\| \|(a^1 \quad a_s^1)^T s_1^*(t)\| dt. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 время попадания на вторую поверхность конечно и $\|s_1^*(t)\| \leq \Delta/l$. Учитывая (П5), находим

$$\begin{aligned} & \|x^1(t_2') - x^{1*}(t_2')\| \leq e^{\|A^1\| T_1} N_1 \Delta/l + e^{\|A^1\| T_1} \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| T_1 \Delta/l \leq \\ & \leq N'_2 \Delta/l, \end{aligned}$$

где $T_1 = t_2' - t_1$, следовательно $\|s_2(t_2') - s_2^*(t_2')\| \leq N'_2 \Delta/l$.

Согласно теореме 1 с момента времени t_2' : $|s_2^*| \leq \Delta/l$. Получим оценку времени $t_2 - t_2'$ попадания на поверхность скольжения $s_2(t_2) = 0$ при начальном условии $|s_2(t_2')| \leq \Delta/l + N'_2 \Delta/l$:

$$t_2 - t_2' \leq \frac{\Delta/l + N'_2 \Delta/l}{I} \leq c_2 \Delta/l, \quad I = \min\{I_1, I_2\}.$$

Таким образом, окончательно для момента времени t_2 получим

$$\begin{aligned}
& \|x^1(t_2) - x^{1*}(t_2)\| \leq \|e^{A^1(t_2-t_1)}\| \|x^1(t_2') - x^{1*}(t_2')\| + \\
& + \int_{t_2'}^{t_2} \|e^{A^1(t_2-t)}(u^1(t) - \tilde{u}^1(t) + (a^1 \quad a_s^1)^T s_1^*(t))\| dt \leq \\
& \leq e^{\|A^1\|T_2} N_2' \Delta/l + \int_{t_2'}^{t_2} \|e^{A^1(t_2-t)}\| (M + \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| \Delta/l) dt \leq \\
& \leq N_2 \Delta/l,
\end{aligned}$$

где $T_2 = t_2 - t_1$, $N_2 = e^{\|A^1\|T_2} (N_2' + M + \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| \Delta/l)$, следовательно $\|s_2(t_2) - s_2^*(t_2)\| \leq N_2 \Delta/l$.

2) Если равенство (П3) нарушается в силу возникновения скользящего движения по поверхности $s_2 = 0$, т.е. $s_2(t_2') = s_2(t_2) = 0$ ($s_2^*(t_2')$ при этом находится за границами отрезка $[\Delta_2/l; \Delta_1/l]$), то, учитывая (П5), имеем сразу

$$\begin{aligned}
& \|x^1(t_2) - x^{1*}(t_2)\| \leq \|e^{A^1(t_2-t_1)}\| \|x^1(t_1) - x^{1*}(t_1)\| + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \|e^{A^1(t_2-t)}(u^1(t) - \tilde{u}^1(t) + \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| s_1^*(t))\| dt \leq \\
& \leq e^{\|A^1\|T_2} N_1 \Delta/l + \int_{t_1}^{t_2} \|e^{A^1(t_2-t)}\| \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| \Delta/l dt \leq N_2 \Delta/l,
\end{aligned}$$

где $T_2 = t_2 - t_1$, $N_2 = e^{\|A^1\|T_2} (N_1 + \|(a^1 \quad a_s^1)^T\| \Delta/l)$,

$$\|s_2(t_2) - s_2^*(t_2)\| \leq N_2 \Delta/l.$$

Таким образом, продолжая подобные рассуждения, на p шаге находим

$$s(t_p) = 0, \|s^*(t_p)\| \leq N_p \Delta/l, \|x_1(t_p) - x_1^*(t_p)\| \leq N_p \Delta/l,$$

где N_p – некоторая константа.

Рассмотрим движения (19), (21), начиная с момента времени t_p , когда в системе (19) скользящий режим возник на всех поверхностях s_i , $i=1, \dots, p$:

$$\mathfrak{K} = (A_{11} - A_{12}C)x_1;$$

$$\mathfrak{K}^* = (A_{11} - A_{12}C)x_1^* + A_{12}s^*, \quad \|s^*\| \leq \Delta/l.$$

Оценим разность решений:

$$\begin{aligned} \|x_1(t_p) - x_1^*(t_p)\| &\leq \|e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t_p)}\| \|x_1(t_p) - x_1^*(t_p)\| + \\ &+ \left\| \int_{t_p}^t e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t)} A_{12}s^*(t_p) dt \right\| \leq \|e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t_p)}\| N_p \Delta/l + \\ &+ \left\| \int_{t_p}^t e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t)} A_{12}s^*(t_p) dt \right\|. \end{aligned}$$

Для гурвицевой матрицы $A_{11} - A_{12}C$ обратная матрица существует всегда и справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t_p}^t e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t)} A_{12}s^*(t) dt \right\| \leq \\ 1) &\leq \| (A_{11} - A_{12}C)^{-1} (I_{n-p} - e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t_p)}) \| \|A_{12}\| N_p \Delta/l \leq \\ &\leq \| (A_{11} - A_{12}C)^{-1} \| \|A_{12}\| N_p \Delta/l \leq N'_x \Delta/l; \\ 2) &\|e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t_p)}\| \leq I_{n-p}, \quad \|I_{n-p} - e^{(A_{11}-A_{12}C)(t-t_p)}\| \leq I_{n-p}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим $\|x_1(t) - x_1^*(t)\| \leq N_p \Delta/l + N'_x \Delta/l = N_x \Delta/l$.

Если теперь увеличивать коэффициенты усиления обратной связи l , то в пределе имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_1(t) - x_1^*(t)\| = \lim_{l \rightarrow \infty} N_x \Delta/l = 0.$$

Теорема доказана.

Приложение II

Рассмотрим вычисление средней составляющей управляющего воздействия для треугольного и синусоидального модулирующего сигнала. При рассмотрении предельного случая ($w \rightarrow \infty$) было показано, что

$$\lim_{2p/w \rightarrow 0} s_0^*(t) = s^*(t), \quad \lim_{2p/w \rightarrow 0} z_1(t) = z_{10}(t),$$

$$\text{где } z_{10}(t) = \frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} z_1(q) dq.$$

Таким образом, при вычислении $u_0(t)$ можем считать переменные $s(t)$, $z_1(t)$ постоянными на периоде колебаний вибролинеаризирующего сигнала.

Вычислим $u_0(t)$ для некоторых видов нелинейностей, представленных на рис. 1. Для нелинейности, представленной на рис. 1,г, и вибросигнала треугольной формы на периоде колебаний получим

$$\begin{aligned} u_{0i}(t) = & -\frac{w}{2p} \int_t^{t+2p/w} \text{sign}(ls_{0i}^*(t) + \Lambda^i z_{10}(t) + d(t)) dt = -\frac{M^1 - M^2}{2} - \\ & -\frac{k_1}{4h} (\Delta_1'^2 - \Delta_1^2) - \frac{k_2}{4h_i} (\Delta_2'^2 - \Delta_2^2) + \frac{M^1 \Delta_1'}{2h} - \frac{M^2 \Delta_2'}{2h} - \\ & -\frac{M^1 + M^2}{2h} (ls_{0i}^*(t) + \Lambda^i z_{10}(t)), \end{aligned}$$

где $k_1 = \frac{M^1}{\Delta_1' - \Delta_1}$, $k_2 = \frac{M^2}{\Delta_2' - \Delta_2}$ – коэффициенты усиления линей-

ных зон; Λ^i i -я строка матрицы Λ .

На рис. П1 показана качественная картина управляющих воздействий при треугольном вибросигнале.

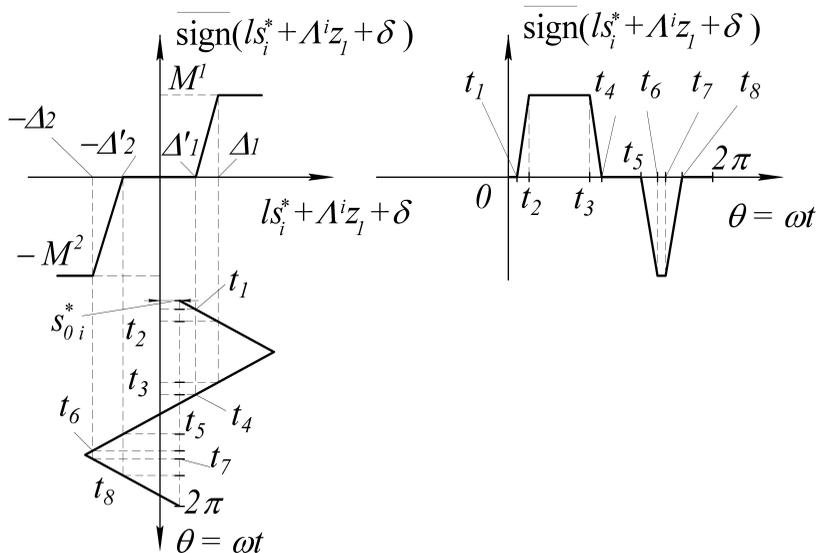


Рис. П1. Качественная картина управляющих воздействий при треугольном вибросигнале

Значения средних составляющих для остальных нелинейностей и треугольном вибролинеаризующем сигнале, изображенных на рис. 1 представлен в таблице П1.

Таблица П1 – Средняя составляющая управляющего воздействия при треугольном вибролинеаризующем сигнале

Нелинейность	Среднее значение $u_{0i}(t)$
--------------	------------------------------

	$u_{0i}(t) = -kls_{0i}^*(t) - K_{2i}z_{10}(t) + x_i^* ;$ $x_i^* = -\frac{M^1 - M^2}{2} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{4h}(M^1 + M^2) ;$ $k = \frac{M^1 + M^2}{2h}, K_{2i} = k\Lambda^i .$
	$u_{0i}(t) = -kls_{0i}^*(t) - K_{2i}z_{10}(t) + x_i^* ;$ $x_i^* = -\frac{M^1 - M^2}{2} - \frac{\Delta_2 + \Delta_1'}{4h}M^2 + \frac{\Delta_1 + \Delta_1'}{4h}M^1 ;$ $k = \frac{M^1 + M^2}{2h}, K_{2i} = k\Lambda^i .$
	$u_{0i}(t) = -kls_{0i}^*(t) - K_{2i}z_{10}(t) + x_i^* ;$ $x_i^* = -\frac{M^1 - M^2}{2} - \frac{\Delta_2}{2h}M^2 + \frac{\Delta_1}{2h}M^1 ;$ $k = \frac{M^1 + M^2}{2h}, K_{2i} = k\Lambda^i .$

В таблице обозначено $x^* = \text{diag}(x_1^* \quad \mathbf{K} \quad x_p^*)$. Параметры исполнительного устройства (амплитуды реле, величины гистерезиса, коэффициенты усиления линейных зон и т.д.) предполагаются постоянными, либо медленно меняющимся во времени, поэтому примем возмущения x_i^* , обусловленные несимметричностью характеристики переключения, постоянными

$$x^* = \text{const}, \dot{x}^* = 0.$$