ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В ОСНОВАНИЯХ ТЕОРИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР

Горелов М.А.
(Вычислительный центр РАН, Москва)
griefer@ccas.ru

При исследовании игр с фиксированным порядком ходов обычно принимается некоторая гипотеза о поведении игрока нижнего уровня, существенно упрощающая как «ответ» в получающейся задаче, так и рассуждения, приводящие к этому ответу. Ниже обсуждается адекватность этой гипотезы. При этом рассматривается простейшая игра двух лиц, на примере которой видны как основные проблемы, так и некоторые подходы к их решению.

Ключевые слова: Иерархические игры, максимальный гарантированный результат, устойчивость.

Введение

Пусть имеется игра двух лиц, в которой первый игрок выбирает свои управления из множества U, а второй – из множества V. Будем считать, что цели игроков описываются стремлением к максимизации функций g и h соответственно.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия игроков (по традиции носящей имя игры Γ_2). Предположим, что первый игрок рассчитывает, и действительно будет иметь информацию о выборе его партнером управления $v \in V$ до принятия своего окончательного решения. Таким образом, стратегиями первого игрока являются всевозможные функции u_* из множества V в множество U (множество всех его стратегий обозначим U_*). При этом будем считать, что игрок 1 первым выбирает свою стратегию $u_* \in U_*$ и сообщает ее партнеру.

Как в этой ситуации следует поступать первому игроку? Для ответа на этот вопрос мы будем пользоваться общими методологическими принципами, изложенными в [3]. В данной работе наиболее существенными будут два из них.

Принцип 1. Эффективность стратегий должна оцениваться на основе получения гарантированной величины выигрыша.

Принцип 2. Исследователь операции должен использовать всю доступную ему информацию.

На основе второго принципа следует использовать информацию о функции выигрыша второго игрока для оценки множества его возможных ответов на стратегию u_*. Как это сделать? Поскольку второй игрок знает выбранную партнером стратегию, его результаты зависят только от его решений. Поэтому естественно было бы считать, что он непременно выберет одну из точек максимума своего критерия $h(u_*(v),v)$. Однако тут возникает как минимум два вопроса.

Вопрос 1. Как описать поведение второго игрока, если максимум функции $h(u_*(v),v)$ не достигается ни в одной точке?

Вопрос 2. Можно ли считать, что второй игрок будет добиваться абсолютно точной реализации максимума своего выигрыша?

Первый вопрос является по преимуществу математическим, а потому решается сравнительно несложно. Второй – скорее содержательный, и для ответа на него требуются более тонкие рассуждения.

Начиная с работы [6] эти проблемы решаются следующим образом. Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию u_* определяется одним из следующих условий:

(1) $$B(u_*) = \left\{ v \in V : h(u_*(v),v) = \max_{w \in V} h(u_*(w),w) \right\},$$

если максимум в формуле (1) достигается;

(2) $$B(u_*) = \left\{ v \in V : h(u_*(v),v) \geq \sup_{w \in V} h(u_*(w),w) - \delta(u_*) \right\}$$

в противном случае. Здесь δ – функционал, определенный на множестве U_* и принимающий положительные значения. Тогда стратегия u_* гарантирует первому игроку получение выигрыша

$$r(u_*) = \inf_{v \in B(u_*)} h(u_*(v), v)$$

а его максимальный гарантированный результат равен

(3) $$R = \sup_{u_* \in U_*} \inf_{v \in B(u_*)} h(u_*(v), v) .$$

Описанную модель будем называть классической.

Таким образом, даются ответы на оба поставленных выше вопроса, причем на второй – определенно положительный. Между тем, это явно противоречит первому из приведенных выше методологических принципов. В самом деле, Плюшкин, видимо, сидит в душе каждого человека, но возведение его принципа поведения в абсолют – это определенная идеализация. И оправдана она лишь тогда, когда от этого не сильно меняется найденное решение, по крайней мере, в типичных случаях. К этому могут быть добавлены стандартные рассуждения о том, что функция выигрыша противника не может быть известной абсолютно точно, что при поиске максимума неизбежны ошибки округления и т.д.

На первый взгляд, обсуждение таких тонкостей может представлять интерес лишь для любителей математической строгости. Однако детальное знакомство с иерархическими играми показывает, что они весьма часто оказываются неустойчивыми к малым изменениям параметров модели (см. [4],[7]), а потому данный вопрос является далеко не праздным.

1. О достижимости максимума

Обсудим первый из поставленных выше вопросов. Везде в дальнейшем будем предполагать, что множества U и V наделены топологией и компактны, а функции g и h непрерывны.

Примем следующее допущение.

Гипотеза 1. Если $v \in B(u_*)$ и $h(u_*(w), w) > h(u_*(v), v)$, то $w \in B(u_*)$.

По-видимому, это самое слабое предположение, согласующееся с представлением о том, что функция h хоть как-то описывает цели второго игрока.

Для классической модели эта гипотеза выполняется.

Из гипотезы 1 следует существование такого функционала δ, определенного на множестве U_* и принимающего неотрицательные значения, что

$$\left\{v \in V : h(u_*(v), v) > \sup_{w \in V} h(u_*(w), w) - \delta(u_*)\right\} \subset B(u_*)$$

и $B(u_*) \subset \left\{v \in V : h(u_*(v), v) \geq \sup_{w \in V} h(u_*(w), w) - \delta(u_*)\right\}$.

Отказываясь от предположения о том, что второй игрок ведет себя подобно Плюшкину, следует определять множество рациональных ответов второго игрока формулой (2) для всех стратегий u_*. Такую модель будем называть δ-осторожной.

Не накладывая дополнительных ограничений на функционал δ, вычислить значение максимального гарантированного результата первого игрока в δ-осторожной модели крайне сложно. Поэтому воспользуемся оценками.

Начнем с рассмотрения частного случая, когда для любой стратегии u_* значение $\delta(u_*)$ равно одному и тому же числу κ. Такую модель назовем κ-осторожной.

Непосредственно проверяется, что если для всех стратегий u_* выполняется неравенство $\delta(u_*) < \kappa$, то максимальный гарантированный результат первого игрока в δ-осторожной модели не меньше аналогичного результата в κ-осторожной модели.

Для получения обратной оценки потребуется

Лемма 1. В классической модели для любой стратегии $\omega_* \in U_*$ первого игрока найдется такая стратегия u_*, что $r(u_*) \geq r(\omega_*)$ и верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_*(v), v)$ достигается.

Доказательство. Пусть $v^1, v^2, \ldots$ последовательность точек из множества $B(\omega_*)$, для которой

$$\lim_{t \to \infty} h(\omega_*(v^t), v^t) = \sup_{v \in V} h(\omega_*(v), v).$$

В силу компактности, не ограничивая общности можно считать, что последовательности $v^1, v^2, \ldots$ и $\omega_*(v^1), \omega_*(v^2), \ldots$ сходятся к v^0 и u^0 соответственно.

Положим $u_*(v) = \omega_*(v)$ для $v \neq v^0$ и $u_*(v^0) = u^0$. Тогда верхняя грань $\sup\limits_{v \in V} h(u_*(v), v)$ достигается в точке v^0 и

$$r(u_*) \geq g(u^0, v^0) \geq \lim_{t \to \infty} g(\omega_*(v^t), v^t) \geq r(\omega_*).$$

Следствие. Максимальный гарантированный результат первого игрока в классической модели не меньше аналогичного результата в δ-осторожной модели.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. В κ-осторожной модели для любой стратегии $\omega_* \in U_*$ первого игрока найдется такая стратегия u_*, что $r(u_*) \geq r(\omega_*)$ и верхняя грань $\sup\limits_{v \in V} h(u_*(v), v)$ достигается.

Доказанные леммы отчасти отвечают на вопрос 1. Впрочем, нетрудно придумать такой функционал δ, что аналог лемм 1 и 2 для соответствующей δ-осторожной модели будет неверен. Но такие контрпримеры плохо интерпретируются.

Заметим, что в учебнике [1] множество рациональных ответов первого игрока определяется формулой (1), если максимум в ней достигается, и равенством $B(u_*) = V$ во всех остальных случаях. Пожалуй, a priori такое определение является совсем не мотивированным. Лемма 1 ставит все на свои места.

2. Вычисление максимального гарантированного результата

Для классической и κ-осторожной моделей максимальный гарантированный результат (3) может быть выражен в терминах множеств U и V и функций g и h, что и будет сделано в данном разделе. Введем необходимые обозначения. Положим

$$L = \max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)\,,\ D(l)=\{(u,v)\in U\times V\colon h(u,v)>l\},$$

$$E(l) = \left\{v\in V : \min_{u\in U} h(u,v)\ge l\right\},\ K(l) = \sup_{(u,v)\in D(l)} g(u,v)\,,$$

$$M(l) = \min_{v\in E(l)}\max_{u\in U} g(u,v)\,.$$

Начнем с замечания: если стратегии u_* и ω_* таковы, что $B(u_*)\subset B(\omega_*)$ и $u_*(v)=\omega_*(v)$ при $v\in B(u_*)$, то $r(u_*)\ge r(\omega_*)$.

Обратимся к классической модели. В силу леммы 1 при поиске оптимальной стратегии первого игрока можно ограничится рассмотрением таких стратегий, что максимум в определении множества рациональных ответов противника достигается. Пусть ω_* – такая стратегия, $v^0\in B(\omega_*)$ и $u^0=\omega_*(v^0)$.

Множество $E(L)$ не пусто и выбор любого управления из этого множества гарантирует второму игроку получение выигрыша большего или равного L. Поэтому $h(u^0,v^0)\ge L$.

Если $h(u^0,v^0)>L$, то стратегию ω_* можно подправить так, что в множестве рациональных ответов второго игрока останется одна точка v^0, от чего гарантированный результат первого игрока может только улучшиться. В самом деле, определим стратегию наказания u_*^p условием

$$h(u_*^p(v),v) = \min_{u\in U} h(u,v)\,,$$

и рассмотрим стратегию u_* такую, что

$$(4)\quad u_*(v) = \begin{cases} u^0, \text{ если } v = v^0, \\ u_*^p(v) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Эта стратегия гарантирует первому игроку выигрыш $g(u^0,v^0)$, который в силу сделанного замечания не хуже выигрыша, гарантируемого стратегией ω_*.

Выбрав подходящим образом точку $(u^0,v^0)\in D(L)$ и используя стратегию вида (4), можно гарантированно получить выигрыш сколь угодно близкий к $K(L)$.

Пусть теперь стратегия ω_* такова, что $h(u^0,v^0)=L$. Тогда в множество $B(\omega_*)$ входит все множество $E(L)$. Поэтому стратегия ω_* не может гарантировать первому игроку выигрыша большего $M(L)$. Стратегию ω_* можно подправить, исключив из множества $B(\omega_*)$ все другие точки и не ухудшив при этом гарантированного выигрыша. А в точках множества $E(L)$ разумно выбирать управления первого игрока в соответствии с его абсолютно оптимальной стратегией u_*^a, определенной условием

$$g(u_*^a(v),v)=\max_{u\in U} g(u,v).$$

Рассмотрим стратегию

$$u_*(v)=\begin{cases} u_*^a(v), \text{ если } v\in E(L), \\ u_*^p(v) \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Для нее $B(u_*)\subset E(L)$, поэтому она гарантирует первому игроку выигрыш, не меньший чем $M(L)$.

Таким образом, мы установили, что в классической модели $R=\max\{K(L),M(L)\}$.

Этот результат получен впервые в [2]. Приведенная схема рассуждений позволяет получить аналогичный результат и для κ-осторожной модели. Обратимся к ее исследованию.

Пусть ω_* – произвольная стратегия первого игрока, для которой верхняя грань $\sup\limits_{v\in V} h(\omega_*(v),v)$ достигается в точке и v^0 и $u^0=\omega_*(v^0)$. Теперь придется выделить три случая.

1) Если $h(u^0,v^0)>L+\kappa$, то стратегия ω_* не может гарантировать выигрыша большего $K(L+\kappa)$, а стратегия вида (4) при подходящем выборе точки (u^0,v^0) позволяет гарантированно получить результат сколь угодно близкий к $K(L+\kappa)$.

2) Если $h(u^0,v^0)=L$, то в $B(\omega_*)$ входит все множество $E(L-\kappa)$, поэтому стратегия ω_* позволяет гарантированно получить выигрыш не больший $M(L-\kappa)$, а стратегия вида

$$u_*(v)=\begin{cases} u_*^a(v), \text{ если } v\in E(L-\kappa),\\ u_*^p(v) \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

позволяет получить именно такой выигрыш.

3) Остается рассмотреть случай $L<h(u^0,v^0)\leq L+\kappa$. Пусть $g(u^0,v^0)=l$. Тогда в множество $B(\omega_*)$ входят точка v^0, множество $E(l-\kappa)$ и, возможно, еще какие-то точки. Поэтому такая стратегия ω_* не может гарантировать выигрыш больший, чем $N(\kappa)$, где

$$N(\kappa)=\sup_{(u,v)\in F(\kappa)}\min\{g(u,v),M(g(u,v)-\kappa)\},$$

$F(\kappa)=\{(u,v)\in U\times V\text{: } L<g(u,v)\leq L+\kappa\}$.

Если теперь выбрать произвольную точку (u^0,v^0) из множества $F(\kappa)$ и рассмотреть стратегию

$$u_*(v)=\begin{cases} u^0, \text{ если } v=v^0,\\ u_*^a(v), \text{ если } v\in E(g(u^0,v^0)-\kappa), \text{ но } v\neq v^0,\\ u_*^p \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

то в множество $B(u_*)$ будет содержаться в объединении $\{v^0\}\bigcup E(g(u^0,v^0)-\kappa)$, а потому первый игрок гарантированно получит выигрыш $\min\{g(u^0,v^0),M(g(u^0,v^0)-\kappa)\}$. За счет подходящего выбора точки (u^0,v^0) можно гарантировать получение выигрыша, сколь угодно близкого к $N(\kappa)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. В κ-осторожной модели имеет место равенство $R=\max\{K(L+\kappa), M(L-\kappa), N(\kappa)\}$.

3. Предельные соотношения

Естественно поставить вопрос о связи максимального гарантированного результата в классической модели и в κ-осторожной модели при малых значениях κ. Ответ на него дает

Теорема 2. Для любой игры максимальный гарантированный результат в κ-осторожной модели стремится к максимальному гарантированному результату в классической модели, когда κ, убывая, стремится к нулю.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

(5) $\lim\limits_{\kappa\to 0+} K(L+\kappa) = K(L)$.

В самом деле, $D(L+\kappa)\subset D(L)$, а потому $K(L+\kappa)\le K(L)$ при $\kappa\ge 0$. С другой стороны, выберем точку $(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon})\in D(L)$ так, что $g(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}) > K(L)-\varepsilon$. В этой точке $h(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}) > L$, а потому для всех $\kappa < g(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}) - L$ точка $(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon})$ принадлежит $D(L+\kappa)$. Значит $K(L+\kappa)\ge g(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon}) > K(L)-\varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда следует равенство (5).

В силу следствия из леммы 1 этим доказывается теорема в случае, когда $\max\{K(L),M(L)\}=K(L)$.

Аналогичным образом, если $\max\{K(L),M(L)\}=M(L)$, то теорема следует из равенства

(6) $\lim\limits_{\kappa\to 0+} M(L-\kappa) = M(L)$.

Остается установить его.

Непосредственно из определения следует, что при $\kappa\ge 0$ выполняется неравенство $M(L-\kappa)\le M(L)$. Поэтому

$$\lim_{\kappa\to 0+} M(L-\kappa) \le M(L).$$

Допустим, что

$$\lim_{\kappa\to 0+} M(L-\kappa) < M(L).$$

Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что для любого $\kappa>0$ найдется точка $v^{\kappa}\in V$, для которой $\min\limits_{u\in U} h(u,v^{\kappa}) \ge L-\kappa$ и

$$\max_{u\in U} g(u,v^{\kappa}) \le M(L)-\varepsilon.$$

В силу компактности пространства V множество $\left\{v^{\kappa} : \kappa = \dfrac{1}{n}, n=1,2,...\right\}$ содержит предельную точку v^0. Так как функции $\varphi(v)=\min\limits_{u\in U} h(u,v)$ и $\psi(v)=\max\limits_{u\in U} g(u,v^{\kappa})$ непрерывны, в этой точке выполняются неравенства $\min\limits_{u\in U} h(u,v^0)\ge L$ и

$\max_{u\in U} g(u,v^0) \le M(L)-\varepsilon$. Первое из них означает, что точка v^0 принадлежит множеству $E(L)$, а тогда второе противоречит определению величины $M(L)$.

Полученное противоречие доказывает равенство (6) а с ним и теорему.

Следствие. Для любой игры и любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\kappa>0$, что для любого функционала δ, ограниченного сверху числом κ, максимальные гарантированные результаты первого игрока в классической и δ-осторожной модели отличаются меньше, чем на ε.

Назовем игру сильно регулярной, если $K(L)\ge M(L)$ и верхняя грань в определении величины $K(L)$ достигается в некоторой точке (u^0,v^0). Из приведенного доказательства видно, что в сильно регулярных играх при $\kappa<g(u^0,v^0)-L$ максимальные гарантированные результаты первого игрока в классической и κ-осторожной моделях попросту совпадают. В [5] показано, что в некотором естественном смысле сильно регулярные игры типичны.

Разумеется, типичность следует понимать как типичность в некотором фиксированном классе, и предыдущее замечание относится к классу всех игр с фиксированными множествами управлений и произвольными непрерывными функциями выигрыша, близость которых оценивается с помощью равномерной метрики. Если на класс игр накладываются какие-то дополнительные ограничения, что может диктоваться, например, природой моделируемого конфликта, то типичными могут оказаться и игры, не являющиеся сильно регулярными. Поэтому их рассмотрение может представлять значительный интерес. Как показывают примеры следующего раздела, характер стремления максимального гарантированного результата первого игрока в κ-осторожной модели к аналогичному результату в классической модели может быть весьма различным.

4. Примеры

Во всех примерах данного раздела будем полагать $U=V=[0,1]$.

Пример 1. Рассмотрим линейные игры с функциями выигрыша $g(u,v)=au-bv$ и $h(u,v)=cu+dv$, где a,b,c и d – некоторые положительные константы.

Со всякой игрой бывает удобно связать множество

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=g(u,v),\ y=h(u,v),\ u\in U,\ v\in V\right\}.$$

Для данной игры это множество представляет сбой параллелограмм с вершинами (0,0), (a,c), $(-b,d)$ и $(a-b,c+d)$.

Если множество C выпукло, то максимальный гарантированны результат первого игрока в классической модели равен

(7) $\max\limits_{(x,y)\in C(L)} x$,

где $C(l)=\{(x,y)\in C\colon y\geq l\}$, а L, как и прежде, – максимальный гарантированный результат второго игрока.

В данном примере $L=d$ и характер решения зависит от соотношения параметров.

Если $c>d$, то максимум в формуле (7) достигается в вершине (a,c), поэтому игра является сильно регулярной и при $\kappa<c-d$ максимальные гарантированные результаты первого игрока в классической и κ-осторожной моделях совпадают.

Если же $c<d$, то максимальный гарантированный результат первого игрока в κ-осторожной модели меньше его максимального гарантированного результата в классической модели на величину $\dfrac{b}{d}\kappa$.

Разумеется, оба случая являются типичными в классе игр с линейными функциями выигрыша.

Пример 2. Рассмотрим игру с функциями выигрыша $g(u,v)=v\cos(2\pi(u+v))$ и $h(u,v)=v\sin(2\pi(u+v))$.

В этой игре максимальный гарантированный результат второго игрока $L=0$, множество C представляет собой единичный круг с центром в начале координат и потому максимальный гарантированный результат первого игрока в классической модели равен 1, хотя и не достигается ни на одной из стратегий.

В силу выпуклости круга величина $K(L+\kappa)$=$K(\kappa)$ равна $\max\limits_{(x,y)\in C(\kappa)} x$. Поэтому величина $K(L+\kappa)$, а значит и максимальный гарантированный результат первого игрока в κ-осторожной модели отличается от такого же результата в классической модели на величину порядка κ^2 (при $\kappa\to 0$).

Пример 3. Пусть функции выигрыша игроков имеют вид $g(u,v)=v\cos(2\pi(u+v))$ и $h(u,v)=v\sin(2\pi(u+v))-(v\cos(2\pi(u+v)))^2$.

В этой игре, как и прежде, L=0, а множество C представляет собой выпуклую яйцеобразную фигуру, вписанную в квадрат $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\right\}$. Максимум в формуле (7) достигается для этой игры в точке $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},0\right)$, а потому максимальный гарантированный результат первого игрока в классической модели равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Угловой коэффициент касательной к границе множества C в точке $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},0\right)$ равен $\lambda=-\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{10}}$. Поэтому $K(L+\kappa)$ отличается от $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ на величину порядка $\lambda\kappa$.

Если стратегия u_* такова, что $\sup\limits_{v\in V} h(u_*(v),v)\le\kappa$, то точка v=0 принадлежит множеству $B(u_*)$, а значит, такая стратегия гарантирует первому игроку выигрыш не больший нуля, что меньше $K(L+\kappa)$. Поэтому в данной игре разница между максимальными гарантированными результатами первого игрока в классической и κ-осторожной модели составляет величину порядка $\lambda\kappa$ (при $\kappa\to 0$).

Пример 4. Пусть n – нечетное число. Рассмотрим игру с функциями выигрыша $g(u,v)=v\cos(2\pi(u+v))$ и $h(u,v)=(v\sin(2\pi(u+v))-(v\cos(2\pi(u+v)))^2)^n$.

Поскольку функция $f(x)=x^n$ монотонно и непрерывно отображает отрезок $[-1,1]$ на себя, максимальный гарантированный результат первого игрока в классической модели будет таким же, как в предыдущем примере (это следует из леммы 1).

А вот его максимальный гарантированный результат в κ-осторожной модели изменится. Разница результатов в двух рассматриваемых моделях составит величину порядка $(\lambda\kappa)^{\frac{1}{n}}$.

Более того, при большом значении n множество C в данной игре будет весьма точно аппроксимироваться в Хаусдорфовой метрике объединением отрезков $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0,\ -1\le y\le 1\}$ и $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0,\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le x\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. Поэтому при любом фиксированном значении κ можно подобрать настолько большое значение n, что разница между максимальными гарантированными результатами первого игрока в классической и κ-осторожной моделях будет больше, скажем, $1/2$.

Замечание. Качественные эффекты, обнаруженные в рассмотренных примерах, разумеется, не зависят от единиц измерения, в которых выражаются выигрыши игроков. Но количественные характеристики (например, величина λ в двух предыдущих примерах) конечно же, зависят от выбора этих единиц. В примерах 2–4 функции выигрыша нормированы условиями

$$\max_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)=\max_{(u,v)\in U\times V} h(u,v)=1,$$

$$\min_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)=\min_{(u,v)\in U\times V} h(u,v)=-1,$$

поэтому можно считать, что величина κ измерена в естественных безразмерных единицах, а потому и количественные результаты являются осмысленными.

5. Заключение

Попробуем теперь ответить на вопросы, сформулированные во введении. К сожалению, однозначного ответа получить не удается. Причина этого заключается в следующем.

Традиционно интересы игроков задаются с помощью функций, принимающих действительные значения. Какой смысл вкладывается в эту формальную конструкцию обычно не оговаривается. Однако существует, по крайней мере, три способа ее интерпретировать.

1) Можно использовать только отношение порядка на множестве $\mathbb{R}$ для того, чтобы выяснить, какой из двух исходов игры лучше (т.е. функции выигрыша известны с точностью до любого монотонного преобразования).

2) Можно использовать наличие на множестве действительных чисел отношения порядка и согласованной с ним топологии (т.е. критерии известны с точностью до монотонного непрерывного преобразования).

3) А можно использовать еще и согласованность этой топологии с арифметическими операциями, чтобы сделать цель игрока количественной (т.е. функции выигрыша известны с точностью до монотонного аффинного преобразования).

В зависимости от моделируемого конфликта, адекватным может быть каждое из этих пониманий.

Из результатов раздела 3 следует, что при третьем понимании классическую модель можно считать правильно отражающей реальность. При этом от ответа на первый вопрос по существу ничего не зависит, по крайней мере, если выполняется гипотеза 1.

Примеры 2–4 показывают, что при первом понимании классическая модель может оказаться далекой от действительности. В этом случае «функционал скупости» δ следует выписывать явно, исходя из анализа моделируемой системы.

Второе понимание занимает промежуточное положение, и в таком случае для ответа на поставленные вопросы следует обращаться к более детальному анализу моделируемого конфликта.

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. В статье [6] и некоторых более поздних работах рассматриваются более сложные, но аналогичные игры с неопределенными факторами. При исследовании на функционал δ приходится накладывать гораздо более жесткие ограничения, и в дальнейшем они используются по существу. Вероятно, это связано с тем, что в этих играх возможны другие типы неустойчивости с более сложной геометрией. В связи с этим исследование вопросов, аналогичных обсуждавшимся выше, становится необходимым, если пытаться использовать эти модели в прикладных исследованиях.

Подведем итоги. Рассмотренная выше классическая модель уже проходила некоторую проверку практикой. Результаты данной работы можно рассматривать как некое математическое обоснование этой модели.

В заключение сделаем пару замечаний о математической стороне дела.

Факт, установленный в лемме 1 известен давно. Но обычно он получается как следствие теоремы 1. Предложенное выше видоизменение классической схемы доказательства теоремы 1, видимо имеет определенные методологические и методические преимущества. В частности, именно оно позволяет доказать более общую теорему 2.

При исследовании сложных теоретико-игровых моделей построение примеров, обладающих заданными свойствами, представляет определенные трудности. Использованный при построении примеров 2–4 способ, основанный на подборе подходящего преобразования в «плоскости критериев» представляется достаточно гибким.

Литература

1. Васин А.А., Морозов В.В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике*. М.: МАКС Пресс, 2005. – 277 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // ДАН. Т. 198. 1971. №5. С. 1001–1004.

3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, 1971. – 383 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
5. ГОРЕЛОВ М.А. *Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархических играх двух лиц* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 43. 2003. № 3. С. 376–387.
6. КОНОНЕНКО А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 13. 1973. № 1. С. 311–317.
7. МОЛОДЦОВ Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности* / Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С.236 – 262.

ARTICLE TITLE: ON A HYPOTHESIS IN FOUNDATIONS OF HIERARCHICAL GAMES

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., (griefer@ccas.ru).

Abstract: A hypothesis on behaviour of the low level player is usually accepted. This hypothesis rather simplifies the "answer" in the problem obtained as well as the reasoning leading to this answer. The adequacy of this hypothesis is treated below. A simplest game of two players is considered as the example which exhibits the main problems and some approaches to their solutions.

Keywords: modeling of conflicts, hierarchical games, maximal guaranteed result.