# ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ

**Корнеенко В.П.**[1]
(ФГБУН *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

*В настоящее время не существует оптимального метода построения результирующего ранжирования, известного как медианы Кемени, по матричному критерию между упорядочениями объектов экспертами, представленными матрицами бинарных отношений с булевскими элементами. В статье показана функциональная взаимосвязь оценок объектов ранжирований, представленных в градациях ранговой шкалы, с элементами матрицы бинарных отношений на множестве пар объектов. Благодаря этому комбинаторная задача построения результирующего ранжирования объектов с матричным критерием сводится к эквивалентной оптимизационной задаче по критерию минимума расстояния в ранговой шкале, в том числе и с учётом оценок объектов со связанными рангами.*

Ключевые слова: ранговая шкала, расстояние и медиана Кемени, бинарные отношения, ранжирование объектов.

## *1. Введение*

Сегодня неуклонно возрастает роль информационно-аналитической поддержки принятия эффективных по многим критериям решений в различных сферах деятельности общества и государства.

При многокритериальной оценке эффективности объектов в конкретной предметной области, оцениваемых экспертами, возникает задача выбора результирующего (группового) ранжирования объектов, представленных точечными и интервальными оценками [1-5, 10-14, 20, 22, 23]. В частности, при построении иерархической системы показателей на начальном этапе возни-

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@ipu.ru).

кает задача ранжирования показателей по убыванию их значимости, когда мнения экспертов (аналитиков) не совпадают [8, 9].

В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль расстояния и медианы Кемени [10 - 14]. В классической постановке задача построения результирующего ранжирования, известного как медианы Кемени, по матричному критерию между упорядочениями объектов, представленными матрицами бинарных отношений относится к классу $NP$ полных комбинаторных задач [8].

На данный момент для данного класса задач с матричным критерием не существует оптимального метода решения.

Данная статья посвящена оптимизационному методу построению результирующего ранжирования объектов, измеренных в ранговой (порядковой) шкале и представленных в виде векторов (точек) евклидового метрического пространства.

## *2. Задача выбора результирующего ранжирования объектов, представленных матрицами бинарных отношений*

Одним из первоначальных методов построения результирующего ранжирования (упорядочения) $n$ объектов по предпочтительности $m$ экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [21] и изданная на русском языке в 1972 г. [6]. В работе [22] упорядочения объектов представлены матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов.

### *2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ МАТРИЦ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ*

Рассмотрим ранжирования $n$ объектов из множества $A = \{a_1,\ldots, a_n\}$ $m$ экспертами $Э_j$, $j = \overline{1,m}$:

(2.1) $P_j\colon a_{j_1} \succcurlyeq a_{j_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_l} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_n}.$

Ранжирование $P_j$ (2.1) экспертом представляется в виде квадратной матрицы бинарных отношений частичного и линейного порядка [16]:

(2.2) $M(P_j) = [p_{kq}^j],\ k, q = \overline{1, n}$,

где $p_{kq}^j = \begin{cases} 1, \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_q; \\ -1, \text{если объект } a_q \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, \text{если объекты } a_q \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{равноценны.} \end{cases}$

Расстояние между произвольными ранжированиями $P_i$ и $P_j$ можно рассчитывать по матричным $l_1$-нормой и $l_2$-нормой по формулам [19]:

(2.3) $d_1(P_i, P_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|p_{kq}^i - p_{kq}^j|$;

(2.4) $d_2(P_i, P_j) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(p_{kq}^i - p_{kq}^j)^2}$.

Понятно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов $a_q,\ a_k \in A$ ранжирования $P_j$ (2.1). В работе Дж. Кемени и Дж. Снеллом приводится следующее определение результирующего ранжирования (см. стр. 33-34 [6]): медианой данного множества упорядочений $P_1, \ldots, P_m$ (не обязательно различных) называется такое упорядочение $R$, для которой сумма расстояний

(2.5) $\sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)$

минимальна, а средним значением – упорядочение $R$, для которой минимальна величина

(2.6) $\sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)^2$.

Расстояние (2.5), часто используемое как «расстояние Кемени», между произвольными ранжированиями $P_i$ и $P_j$, представленные в матричном виде $M(P_j)$, можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю по формуле

(2.7) $d(P_i, P_j) = \sum_{k<q} |p_{kq}^i - p_{kq}^j|$,

значение которой равно количеству поразрядных несовпадений элементов матриц $M(P_i)$ и $M(P_j)$ ранжирований $P_i$ и $P_j$.

Роли медианы Кемени в экспертных оценках и её вычислению посвящено ряд работ [3-7, 10-14, 18]. При этом возникает вопрос: каков математический смысл критериев (2.5), (2.6)? Очевидно, что расстояние (2.5) представляет из себя $l_1$-*норму* разности матриц $M(R)$ и $M(P_j)$, а расстояние в формуле (2.6) – квадрат евклидовой нормы той же разности матриц (см. [19], в которых в качестве неизвестных асимметричного бинарного отношения выступают $n(n-1)/2$ наддиагональных элементов матрицы $M(R)$, принимающие значения из множества $\{-1, 0, +1\}$. По сути задача построения медианы Кемени по матричным критериям (2.5) или (2.6) относится к классу комбинаторных задач.

Действительно каждому произвольному ранжированию

(2.8) $P_\sigma: a_{\sigma_1} \succcurlyeq a_{\sigma_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{\sigma_n}$

соответствует матрица бинарных отношений $M(P_\sigma) = [p_{kq}^\sigma]$, $k, q = \overline{1, n}$, объектов, где $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ – перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ номеров объектов.

Тогда исходная задача выбора результирующего ранжирования относительно мнений $m$ экспертов сводится к поиску перестановки $\sigma^* = (i_1^*, \ldots, i_n^*)$ объектов ранжирования, минимизирующая сумму расстояний до исходных ранжирований $P_j$, $j = \overline{1, m}$:

(2.9) $R_*(P_1, \ldots, P_m) = \min_{(i_1, \ldots, i_n)} \sum_{j=1}^m d(P_j, P_\sigma)$,

где $d(P_j, P_\sigma) = \sum_{k<q} |p_{kq}^j - p_{kq}^\sigma|$.

## *2.2. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВЫБОРА*

В примерах, приведённых в работах [10, 13, 14], в качестве результирующего ранжирования $R_*$ выступает одно из исходных ранжирований $P_j$, наименее удалённое в среднем от остальных, хотя в общем случае результирующее ранжирование может не совпадать ни с одним из исходных ранжирований (мнений экспертов).

Формально постановка задачи (2.9) построения результирующего ранжирования относится к классу комбинаторных задач большой размерности [8], поскольку множество решений ранжирований объектов состоит из $n!$ ($n$-факториал) всевозможных перестановок только строгих, не считая нестрогих, которых тоже не менее $n!$.

Поэтому в статье [14] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающей с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика», т. е. по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным (см. рис. 2 на стр. 30 [6]).

Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является. Представлению ранжирования (мнения эксперта) в виде матрицы бинарных отношений на множестве объектов соответствует связный граф, в котором вершинами служат объекты, а направления дуг задают порядок предпочтения.

## *3. Сведение исходной задачи выбора медианы Кемени к задаче по критерию близости ранжирований объектов, представленных в ранговой шкале*

### *3.1.ВЗАИМОСВЯЗЬ РАНЖИРОВАНИЙ В ГРАДАЦИЯХ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ С МАТРИЦАМИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ПАР ОБЪЕКТОВ*

Каждому объекту $a_k \in A$ в ранжировании $P_j$ (2.1) поставим в соответствие его ранг $r_j^{(k)}$. Ранжирование $Э_j$ экспертом $P_j$ будем представлять в виде векторной оценки в ранговой шкале:

(3.1) $\vec{r}_j = \left(r_j^{(1)}, r_j^{(2)}, \dots, r_j^{(n)}\right).$

Для порядкового типа шкал измерения в качестве допустимых преобразований принято множество монотонно возрастающих преобразований [15]. Таким преобразованием, например, является $\varphi_{\Pi}(x) = x^2$, которое линейные шкальные балльные оценки объектов переводит в нелинейные. При этом упорядочение между объектами хотя и сохраняется, но при этом сравнение объектов после преобразования в шкале разности теряет смысл, т. е. такие шкалы не являются эквивалентными.

Переход от порядковой шкалы к количественной введём с помощью операции метризации расстояния между ранговыми оценками объектов, включая и оценки со связанными рангами [8, 16].

Рассмотрим векторную оценку ранжирования $P_j$ (3.1) объектов как точку в $n$ мерном евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда расстояния между ранжированиями $P_i$ и $P_j$ можно представить в виде меры близости между векторными оценками

(3.2) $\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right|,$

в котором отображение $\rho_1 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задаёт метрику пространства [17].

Очевидно, что расстояние между векторами можно вычислить и по формуле евклидовой нормы

(3.3) $\rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2}.$

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиями объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства [17].

Взаимосвязь между ранговыми оценками объектов $a_k$ ранжирований $P_j$ и элементами $p_{kq}^{j}$ матрицы $M(P_j)$ (2.2) бинарных отношений между парой объектов можно представить соотношениями:

а) для объектов с обратным порядком предпочтения

(3.4) $r_{j\downarrow}^{(k)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{q=1, k \neq q}^{n} \left(1 - p_{kq}^{j}\right);$

б) для объектов с прямым порядком предпочтения

(3.5) $r_{j\uparrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2}\sum_{q=1,k\neq q}^{n}\left(1 - p_{kq}^{j}\right).$

Рассмотрим пример. Для ранжирования пяти объектов

$$P_j: a_1 \succ a_4 \succ \{a_3 \approx a_5\} \succ a_2$$

матрица бинарного нестрогого отношения примет вид:

$$M(P_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Вычислим ранги для объектов, например, с прямым порядком предпочтения, по элементам матрицы $M(P_j)$ (3.6):

$$r_{j\uparrow}^{(1)} = 5 - \frac{1}{2}[(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)] = 5;$$

$$r_{j\uparrow}^{(2)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)] = 1;$$

$$r_{j\uparrow}^{(3)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1+1)++(1-0)] = 2{,}5;$$

$$r_{j\uparrow}^{(4)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)] = 4;$$

$$r_{j\uparrow}^{(5)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1-0)+(1+1)] = 2{,}5.$$

Результаты вычисления для объектов с прямым и обратным порядком предпочтения по формулам (3.5) и (3.6) представлены в таблице 1.

*Таблица 1. Ранговые оценки объектов ранжирования*

| Ранговая векторная оценка | Объекты | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $r_{j\downarrow}^{(k)}$ | 1 | 5 | 3,5 | 2 | 3,5 |
| $r_{j\uparrow}^{(k)}$ | 5 | 1 | 2,5 | 4 | 2,5 |

Возникает вопрос о связи расстояний между ранжированиями, представленными в ранговой шкале и элементами матриц бинарных отношений? Ответ даёт следующая теорема.

**Теорема 1** (Корнеенко). Пусть $P_j$, $j=\overline{1,m}$, упорядочения $n$ объектов $a_k \in A$ группой из $m$ экспертов представлены в виде векторных оценок $\vec{r}_j$ (3.1) в ранговой шкале и матрицами бинарных отношений $M\left(P_j\right)$ (2.2).

Тогда расстояния $d_1$ (2.3), $d_2$ (2.4), $\rho_1$ (3.2), $\rho_2$ (3.3) удовлетворяют неравенству:

(3.7) $\quad \rho_1(\vec{r}_i,\vec{r}_j) \le d_1(P_i,P_j)$ и $\rho_2(\vec{r}_i,\vec{r}_j) \le d_2(P_i,P_j)$.

**Доказательство.** Представим формулы (3.4) и (3.5) перехода от элементов матриц бинарных отношений к ранговым градациям в виде:

$$r_{j\downarrow}^{(k)}=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j};\ r_{j\uparrow}^{(k)}=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}.$$

Имеем

$$\left|r_i^{(k)}-r_j^{(k)}\right|=\left|r_{i\uparrow}^{(k)}-r_{j\uparrow}^{(k)}\right|=\left|r_{i\downarrow}^{(k)}-r_{j\downarrow}^{(k)}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{i}-\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right|,$$

откуда с учётом свойств модуля, а именно:

$$\left||a|-|b|\right| \le |a|+|b|,$$

приходим к соотношению:

$$\rho_1\left(\vec{r}_i,\vec{r}_j\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|-\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1,q\neq k}^{n}\left|p_{kq}^{i}-p_{kq}^{j}\right| = d_1\left(P_i,P_j\right).$$

Причём равенство $\rho_1(\vec{r}_i,\vec{r}_j)=d_1(P_i,P_j)$ имеет место, если выполняется соотношение

$$\left|\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{i}-\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right|=\sum_{q=1,q\neq k}^{n}\left|p_{kq}^{i}-p_{kq}^{j}\right|.$$

Аналогично можно показать, что $\rho_2\left(\vec{r}_i,\vec{r}_j\right) \le d_2\left(P_i,P_j\right)$. Теорема 1 доказана. ■

## *3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА МЕДИАНЫ КЕМЕНИ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ*

Каждому объекту $a_k \in A$ в $P_j$ ранжировании поставим в соответствие его ранг $r_j^{(k)}$, рассматривая его, с учётом связных рангов, как рациональное число, а само $P_j$ ранжирование будем представлять в виде векторных оценок $\vec{r}_j$ (3.1) арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. В связи с этим от комбинаторной задачи (4.2.4) нахождения медианы Кемени, обеспечивающей минимум суммы расстояния от $m$ ранжирований $P_j$, $j = \overline{1, m}$, представленных в виде матриц бинарных отношений, перейдём к эквивалентной задаче, в которой ранжирования представлены в ранговой шкале. Векторную оценку произвольного ранжирования с неизвестными значениями компонент представим в виде

$$\vec{r} = (r_1, \dots, r_k, \dots, r_n).$$

При этом будем предполагать, что $r_k$ – переменное шкальное значение объекта $a_k$, $k = \overline{1, n}$, принимающее значения на множестве рациональных чисел $Q^+ = [0, +\infty)$.

В качестве меры близости между произвольными $P_i$ и $P_j$ ранжированиями в ранговой шкале примем расстояние между векторными оценками по формуле квадрата евклидовой нормы:

(3.8) $d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2,$

то тогда в качестве критерия расстояния между результирующим $R_*$ и остальными $m$ ранжированиями в ранговой шкале можно взять показатель:

(3.9) $D(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m) = \sum_{j=1}^{m} d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_j^{(k)} - r_k)^2.$

Математическая постановка задачи нахождения медианы (результирующего) ранжирования $R_*$ сводится к минимизации показателя (3.9) по переменным $r_k$, $k = \overline{1, n}$:

(3.10) $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_j^{(k)} - r_k)^2 \to \min_{(r_1, \dots, r_n)}$

при условии:

(3.11) $\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{1+n}{2} \cdot n.$

Условие (3.11) означает, что поскольку для ранговых оценок объектов выполняется соотношение $\sum_{k=1}^{n} r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n$, то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов результирующего ранжирования $R_*$.

В обосновании построения результирующего ранжирования объектов (медианы Кемени) по критерию минимума расстояния в ранговой шкале лежит следующее утверждение.

**Теорема 2** (Корнеенко). Пусть ранжирования $P_j$, $j = \overline{1, m}$, объектов представлены в виде оценок $r_j^{(k)} = r_j(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, с прямым (обратным) порядком предпочтения объектов в ранговой шкале.

Тогда оптимальным решением задачи (3.10) – (3.11) по переменным $r_k$, $k = \overline{1, n}$, являются средне арифметическое оценок объектов по числу m ранжирований (экспертов):

(3.12) $r_k^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)}, \forall\, k = \overline{1, n}$,

и результирующее ранжирование:

(3.13) $R_*\colon a_{k_1} \succcurlyeq a_{k_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{k_n}$,

объектам которого поставим в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) при прямом направлении возрастания предпочтения объектов:

(3.14) $r_{k_1}^* > r_{k_2}^* > \cdots > r_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = n; r_{k_2}^* = n - 1; \ldots; r_{k_n}^* = 1$;

б) при обратном направлении убывания предпочтения объектов:

(3.15) $r_{k_1}^* < r_{k_2}^* < \cdots < r_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = 1;\ r_{k_2}^* = 2; \ldots;\ r_{k_n}^* = n$.

При равенстве шкальных оценок $r_{k+1}^* = r_{k+2}^* = \cdots = r_{k+s}^*$ объектам, занимающих места с $(k+1)$-го по $(k+s)$-ое присвоим «средний» ранг равный:

(3.16) $r_{k+i}^* = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (k + i) = k + \frac{1+s}{2}, \forall i = \overline{1, s}$.

Доказательство теоремы базируется на построении функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования (3.10) – (3.11) и выполнении необходимых и достаточных условиях существования минимума функции Лагранжа.

Рассмотрим пример. Пусть 3-мя экспертами упорядочены четыре объекта: $P_1: a_2 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_3$; $P_2: \{a_2 \approx a_3\} \succ a_4 \succ a_1$;

$P_3: a_3 \succ a_2 \succ \{a_1 \approx a_4\}$, которым соответствуют векторные оценки в ранговой шкале с прямым порядком предпочтения объектов: $\vec{r}_1 = (2,\ 4,\ 1,\ 3)$; $\vec{r}_2 = (1, 3.5, 3.5, 2)$;

$\vec{r}_3 = (1.5, 3, 4, 1.5)$.

По формуле $r_k^*$ (3.12) для $k$ = 1, 2, 3, 4 находим оптимальные оценки объектов, которые представим в виде векторной оценке в рациональной шкале измерения $\vec{r}_* = \left(\frac{9}{6},\ \frac{21}{6},\ \frac{17}{6},\ \frac{13}{6}\right)$, и соответвующее ей результирующее ранжирование: $R_*: a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_1$, которому соответствует векторная оценка в канонической ранговой шкале $\vec{r}_* = (1, 4, 3, 2)$.

*33. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫБОРА*

В работе Кемени Дж. и Снелла Дж. задача построения медианы ранжирования продемонстрирована для трёх объектов, для которых путём полного перебора было сгенерировано 13 всевозможных вариантов упорядочения объектов и вычислены расстояния между ними (см. рис. 2 на стр. 30 [40]).

В связи с отсутствием в работе Кемени Дж. и Снелла Дж. конструктивного метода построения результирующего ранжирования, для решения проблемы группового выбора было предложено ряд правил и принципов согласования индивидуальных мнений экспертов, позволяющих строить результирующее отношение [10, 11, 13, 14].

Наряду с правилом выбора медианы Кемени в соответствии с показателем расстояния (2.9) рассмотрим правила согласования индивидуальных мнений экспертов, представленных бинарными отношениями в виде:

$$(a_k, a_q) \in \mathcal{R} \subset A \times A, \ \ \forall a_k, a_q \in A.$$

Правило согласования по большинству голосов даёт возможность весьма простым образом определить результирующее (групповое) предпочтение.

Пусть $m$ – число экспертов, $n_{kq} = n(a_k, a_q)$ – число экспертов предпочитающих объект $a_k$ объекту $a_q$, т. е. для которых имеет место $a_k \succ a_q$. Тогда правило голосования по большинству в $l$ голосов, выполняющих роль порога, определяется следующим образом: $a_k \succ a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq l$.

Если мерой различия ранжирований выбрано «расстояние Кемени» (4.2.3), то справедлива следующая теорема, устанавливающая связь мажоритарного правила с медианой Кемени [11].

**Теорема 3** (Миркин). Мажоритарное групповое отношение $\mathcal{R}^*(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m)$, полученное по принципу простого большинства:

$$a_k \succcurlyeq a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq \frac{m}{2},$$

среди бинарных отношений $\mathcal{R}_j$, $j = \overline{1, m}$, на множестве объектов $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ является медианой в классе всех бинарных отношений.

Рассмотрим пример. Пусть тремя экспертами на основе исходных транзитивных бинарных отношениях:

$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3)\}$;

$\mathcal{R}_2 = \{(a_3, a_1), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\}$;

$\mathcal{R}_3 = \{(a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_1)\}$

получены ранжирования трёх объектов $a_1$, $a_2$, $a_3$ в виде:

$$P_1: a_1 \succ a_2 \succ a_3;\ P_2: a_3 \succ a_1 \succ a_2;\ P_3: a_2 \succ a_3 \succ a_1\}.$$

Тогда при $l \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ получаем нетранзитивное групповое предпочтение $\mathcal{R}^* = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$. Данный пример иллюстрирует парадокс голосования, известный как парадокс Кондорсе. Назван по имени философа и учёного в области общественных наук маркиза де Кондорсе, обнаружившего его в XVIII веке. Однако для данных ранжирований в качестве медианы Кемени в соответствии с результатами теорем 2 и 3 будет результирующее ранжирование: $R_*$: $a_1 \approx a_2 \approx a_3$.

Рассмотрим пример. Пусть ранжирования объектов экспертами представлены в виде (здесь исходные данные взяты из примера на стр. 75 работы [10]):

$$P_1: a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5, P_2: a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3,$$
$$P_3: a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_5, P_4: a_1 \succ a_5 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4,$$
$$P_5: a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2,$$

которым поставим в соответствие ранг с прямым порядком предпочтения (см. столб. 2 – 6 табл. 2).

*Таблица 2. Исходные данные и результирующие ранжирования*

<table>
<tr><th rowspan="3">Объек-ты, $a_k$</th><th colspan="5">Ранги объектов ранжирований, $P_j$</th><th rowspan="3">$\vec{r}_{opt}$</th><th rowspan="3">$\vec{r}_*$</th><th colspan="2" rowspan="2">Результирующее ранжирование</th></tr>
<tr><th rowspan="2">$r_1^{(k)}$</th><th rowspan="2">$r_2^{(k)}$</th><th rowspan="2">$r_3^{(k)}$</th><th rowspan="2">$r_4^{(k)}$</th><th rowspan="2">$r_5^{(k)}$</th></tr>
<tr><th>$R_*$, в ранго-вой шкале</th><th>$M_*$, по мажори-тарному правилу</th></tr>
<tr><td>**1**</td><td>**2**</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>**5**</td><td>**6**</td><td>**7**</td><td>**8**</td><td>**9**</td><td>**10**</td></tr>
<tr><td>$a_1$</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>3,8</td><td>5</td><td rowspan="6">$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \approx a_3 \\ a_4 \approx a_5 \end{pmatrix}$</td><td rowspan="6">$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$a_2$</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>3,2</td><td>3,5</td></tr>
<tr><td>$a_3$</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>3,2</td><td>3,5</td></tr>
<tr><td>$a_4$</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>2,4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>$a_5$</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>2,4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td></tr>
</table>

Количественные оценки объектов результирующего ранжирования, вычисленные по формуле $r_k^*$ (3.12), представим в виде оптимального вектора: $\vec{r}_{opt} = (3{,}8; 3{,}2; 3{,}2; 2{,}4; 2{,}4)$, которому в ранговой шкале соответствует вектор оценок со связанными рангами:

$$\text{(3.12)} \ \vec{r}_* = (5; 3{,}5; 3{,}5; 1{,}5; 1{,}5). \qquad (4.2.17)$$

Результирующее ранжирование (медиана Кемени) $R_*$, которому соответствует векторная оценка (3.12), представлено в столбце 9 таблице 2 в виде вектор столбца.

В соответствии с мажоритарным правилом для каждой пары объектов $a_k, a_q \in A$ подсчитаем $n_{qk}$ – число экспертов, считающих объект $a_q$ предпочтительнее $a_k$. Поскольку, например:

$$n(a_1, a_2) > n(a_2, a_1),$$

где $n(a_1, a_2) = 3$, $n(a_2, a_1) = 2$, то $a_1 \succ a_2$ и т.д.

В результате получим медиану Кемени по мажоритарному правилу, которая представлена в столбце 10 табл. 2, т. е. $a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$.

Сравним результаты формирования медианы Кемени по мажоритарному правилу и как решение оптимизационной задачи. Рассчитаем меру близости результирующих ранжирований до исходных ранжирований $P = \{P_j\}, j = 1 \div 5,$ в градациях матриц бинарных отношениий $\{-1, 0, +1\}$, элементы которых определим по формуле (2.2) и в градациях ранговой шкалы (см. столбцы 2 - 6 табл. .2). По формулам расстояния имеем:

(3.13) $D_1(R_*, P) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<q}\left|p_{kq}^{j} - p_{kq}^{*}\right|.$

(3.14) $D_2(R_*, P) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<q}\left(p_{kq}^{j} - p_{kq}^{*}\right)^2.$

(3.15) $S_1\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d\left(\vec{r}_j, \vec{r}_*\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left|r_j^{(k)} - r_k^*\right|.$

(3.16) $S_2\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(r_j^{(k)} - r_k^*)^2.$

Результаты сравнений ранжирований в ранговой шкале и градаций матрицы бинарных отношений представлены в табл. 3.

*Таблица 3. Оценка ранжирований объектов, полученных различными методами*

| Медиана | Показатели | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $D_1(R_*, P)$ | $D_2(R_*, P)$ | $S_1\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right)$ | $S_2\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right)$ |
| $R_*$ | 7,6 | **13,2** | 6 | **11,8** |
| $M_*$ | **7,2** | 14,4 | 6 | 12,8 |

Из таблицы 3 видно, что медиана Кемени: $R_*$: $a_1 \succ \{a_2 \approx a_3\} \succ \{a_4 \approx a_5\}$, вычисленная в ранговой шкале не совпадает с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу: $M_*$ : $a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$.

Однако при этом результирующее ранжирование $R_*$ имеет наименьшую сумму расстояний по критериям $S_2$ (3.16) и $D_2$ (3.14), а результирующее ранжирование $M_*$ имеет наименьшую сумму расстояний только по критерию $D_1$ (3.13).

С точки зрения анализа устойчивости решений построения результирующего ранжирования можно сделать следующие выводы:

1. В обоих случаях объект $a_1$ оказался строго предпочтительнее всех остальных объектов.

2. Объекты $a_2$ и $a_3$ в обоих случаях строго предпочтительнее объектов $a_4$ и $a_5$. Однако между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект $a_3$ строго предпочтительнее $a_2$. Поэтому следует дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов.

3. Объекты $a_4$ и $a_5$ в обоих случаях оказались строго менее предпочтительнее всех остальных объектов. Однако, как и в предыдущем случае, между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект $a_4$ строго предпочтительнее $a_5$. Поэтому в данном случае следует также дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов. В качестве обобщённого решения подходит медиана Кемени $R_*$ в ранговой шкале, поскольку она имеет лучшие значения по показателям $D_2$, $S_1$ и $S_2$ чем медиана $M_*$, полученная по мажоритарному правилу.

### *4. Заключение*

Задача ранжирований объектов, представленных матрицами бинарных отношений, предложенные Кемени Дж. и Снеллом Дж., относится к классу комбинаторных *NP*-полных задач. Результирующее ранжирование (медиана Кемени) просто вычисляется для объектов в ранговой шкале и является оптимальным решением оптимизационной задачи выбора результирующего ранжирования.

## *Литература*


1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – В. 3. – С. 127-133.
2. АЙЗЕРМАН М.А., АЛЕСКЕРОВ Ф.Т. *Выбор вариантов: основы теории*. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
3. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. – М.: Статистика, 1980. –263 с.
4. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
5. ДУБОВ Ю.А., ТРАВКИН С.И., ЯКИМЕЦ В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем*. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
6: КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. - М.: Советское радио, 1972. - 192 с.
7. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции*. М.: Мир, 1975. – 216 с.
8. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации* : учебник. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
9. КОРНЕЕНКО В.П., ОЖИГАНОВ Э.Н. *Методика рейтинговой оценки эффективности использования человеческого капитала* // Экономика и предпринимательство. 2014. № 12 (ч. 3). С. 183 – 191.
10. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. - 184 с.
11. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
12. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т.79. – №4. – С.3–4.
13. ОРЛОВ А.И. *Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных* // Теория активных систем: Труды международной научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том I. Общая редакция - В.Н. Бурков, Д. А. Новиков. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 172-176.
14. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ, № 89 (05). – 2013.–

URL: http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf (дата обращения: 23.03.2017).
15. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений* . – М.: Мир, 1976. – 247 с.
16. РАМЕЕВ О.А., КОРНЕЕНКО В.П. *Основы теории многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности* : монография. – М.: МАКС-Пресс, 2018. – 2018. – 414 с.
17. СИБИРЯКОВ Г.В., МАРТЫНОВ Ю.А. *Метрические пространства*: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. Университета, 2012. – 166 с.
18. ФАЙН В.Б., ДЕЛЬ М.В. *Турнирный метод ранжирования вариантов* // Заводская лаборатория. 2005. Т.71. № 7. С.58-60.
19. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989. – 352 с.
20. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач стратегического планирования*. М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
21. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences.* – New York, University of Michigan. – 1962. – 168 p.
22. JACKSON, B. N., SCHNABLE, P. S., ALURU, S. *Consensus Genetic Maps as Median Orders from Inconsistent Sources* // IEEE/ACM Transactions on computational biology and bioinformatics. – 2008. – Vol. 5, № 2. – P. 161-171.
23. ISHIZAKA A., LABIB A. *Analytic hierarchy process and Expert Choice: benefits and limitation* // ORinsight. — 2009. – Vol. 24. — P. 201—220.

## OPTIMIZATION METHOD OF SELECTING THE RESULTING RANKING OF OBJECTS PRESENTED IN RANK SCALE OF MEASUREMENT

**Viktor Korneenko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D
(vkorn@ipu.ru).

*Abstract: At present, there is no optimal method for constructing the resultant ranking, known as Kemeny medians, by the matrix criterion between the ordering of objects by experts represented by matrices of binary relations with Boolean elements. The article shows the functional relationship between the ratings of the ranking objects represented in the grades of the rank scale, and the elements of the matrix of binary relations on a set of pairs of objects. Due to this, the combinatorial task of constructing the resultant ranking of objects with a matrix criterion is reduced to an equivalent optimization problem by the criterion of the minimum distance in the rank scale, including taking into account estimates of objects with related ranks.*

Keywords: rank scale, Kemeny distance and median, binary relations, object ranking.

УДК 519.8
ББК 22.18

*Статья представлена к публикации*
*членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

*Поступила в редакцию ...заполняется редактором...*
*Опубликована ...заполняется редактором...*