

О ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОКРАТНЫХ ПОКРЫТИЙ И УПАКОВОК В ДВУМЕРНОМ НЕЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Казаков А.Л.¹, Лемперт А.А.²

(Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

Ле К.М.³

(Иркутский национальный исследовательский технический
университет, Иркутск)

Статья посвящена изучению двух содержательных задач вычислительной геометрии: задачи построения оптимальных многократных покрытий кругами замкнутого ограниченного множества в двумерном метрическом пространстве и аналогичной задачи упаковки кругов. В обоих случаях число кругов k фиксировано. В первом случае целью является минимизация, а во втором — максимизация радиуса кругов. Рассматриваемая метрика, вообще говоря, неевклидова. Источником такой постановки является транспортная логистика, где встречаются задачи, в которых расстояние между объектами необходимо заменить минимальным временем перемещения между ними, при этом искомым оптимум в силу особенностей местности далеко не всегда достигается при движении по прямой линии. Для решения задач предложены вычислительные алгоритмы, которые основаны на применении оптико-геометрического подхода, базирующегося на принципах геометрической оптики Ферма и Гюйгенса, и методе K -средних. Ключевым этапом работы в обоих случаях является построение обобщенной диаграммы Вороного порядка k , каждая ячейка которой при фиксированном наборе из n центроидов включает в себя точки, расположенные ближе к некоторым k центроидам, чем к оставшимся $n - k$. При этом, в отличие от классической диаграммы Вороного, здесь ячейки могут пересекаться. Проведены вычислительные эксперименты, выполнены обсуждение и интерпретация их результатов.

Ключевые слова: многократное покрытие множества, многократная упаковка кругов, неевклидова метрика, вычислительный алгоритм, оптико-геометрический подход, диаграмма Вороного, численный эксперимент.

¹ Александр Леонидович Казаков, д.ф.-м.н., профессор РАН (kazakov@icc.ru).

² Анна Ананьевна Лемперт, к.ф.-м.н., доцент (lempert@icc.ru).

³ Куанг Мынг Ле, аспирант (quangmungle2010@gmail.com).

1. Введение

Задача о покрытии некоторого множества кругами относится к классическим NP-трудным проблемам [15]. В общем случае она формулируется следующим образом: требуется расположить геометрические объекты в ограниченной области таким образом, чтобы последняя целиком лежала внутри объединения данных объектов. Существует большое количество работ, в которых указанная проблема рассматривается как в «классической» (однократные покрытия) [29, 19, 26], включая и трехмерное пространство [7], так и в неклассических (многократные покрытия) постановках [3, 2, 16].

Поставленная выше задача, которая на первый взгляд может показаться чисто теоретической, имеет важные и многочисленные приложения, примерами которых являются проблемы размещения логистических центров [13, 23], а также вышек сотовой связи, спасательных станций, полицейских участков, банкоматов, больниц, школ [17, 11], разработка систем мониторинга распределенных объектов с помощью беспроводных сенсорных сетей [14, 28], включая оптимизацию последних [1, 4], и т.д.

В задаче о построении k -кратного покрытия, которая рассматривается в настоящей работе, каждая точка в покрываемой области должна принадлежать не менее, чем k геометрическим объектам. Подобные постановки появляются, например, при создании глобальных навигационных систем, таких как GPS и ГЛОНАСС. Обычно такого рода задачи решаются численно [2], хотя некоторые аналитические результаты получены в частных случаях, когда покрытая область представляет собой симметричную фигуру: правильный треугольник или круг [3]. В данной статье решается задача о многократном покрытии замкнутого ограниченного множества равными кругами в двумерном пространстве со специальной метрикой, и приводится описание вычислительного алгоритма для ее решения. Алгоритм основан на комбинации оптико-геометрического подхода [5] и метода К-средних [20].

Задача о построении оптимальных упаковок также принад-

лежит к числу классических математических проблем [15]. История ее возникновения и исследования приведена в работе [27]. Отметим, что, хотя проблема упаковки равных кругов в бесконечное пространство решена [18], для случая ограниченного множества она до сих пор остается открытой, несмотря на то, что ее изучению посвящено большое количество публикаций (см., например, [8, 24, 25]). Подобные постановки, помимо наиболее естественной задачи, связанной с помещением предметов в контейнеры (вагоны, трюмы и т.д.), возникают также в инфраструктурной логистике [5].

Большинство работ посвящены исследованию задач об упаковке в евклидовом пространстве, однако в некоторых случаях требуется использовать другие метрики. Наиболее естественной причиной этого является невозможность перемещения по прямой. В частности, авторами рассматривается задача, источником которой является транспортная логистика, в которой радиусу круга соответствует минимально возможное время перемещения из центра до ограничивающей его линии [5, 23].

В настоящей работе предлагается итерационный алгоритм, позволяющий находить кратные упаковки заданного количества кругов в замкнутое множество. Он также предполагает использование оптико-геометрического подхода и метода К-средних.

Ключевой особенностью разработанных алгоритмов построения упаковок и покрытий является их пригодность для работы как с евклидовой, так и с некоторыми специальными видами неевклидовых метрик. Выполнена программная реализация алгоритмов, проведены вычислительные эксперименты, результаты которых были оценены и интерпретированы и показали работоспособность предложенного подхода.

2. Постановка задачи

Пусть X – метрическое пространство, M – замкнутое односвязное множество. Введем следующую метрику:

$$(1) \quad \rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y)}.$$

Здесь $G(a, b)$ – множество непрерывных кривых в X , соединяющих точки a и b , $f(x, y) > 0$ непрерывная функция, определяющая локальную скорость движения в точке $(x, y) \in X$. Можно убедиться, что в случае, когда $f(x, y) \equiv 1$, (1) задает обычную евклидову метрику.

Задача о покрытии (задача 1). Задачей построения k -кратного покрытия называется задача о размещении n равных кругов $C_i(O_i, R)$, $i = \overline{1, n}$, $n > k$ так, чтобы M полностью лежало внутри объединения этих кругов, и каждая точка из M принадлежала не менее, чем k кругам. R и O_i – радиус и центр круга C_i соответственно. Таким образом, получаем следующую задачу:

$$(2) \quad \max_{j \in J_k(s)} \rho(s, O_j) \leq R, \forall s \in M,$$

где $J_k(s)$ – множество, состоящее из k центров кругов, которые расположены ближе к точке s , чем остальные $n - k$.

$$(3) \quad O_i \in M, i = \overline{1, n},$$

$$(4) \quad R \rightarrow \min.$$

Ограничения (2) и (3) обеспечивают принадлежность каждой точки множества M как минимум k кругам. Целевая функция (4) минимизирует радиус кругов.

Задача об упаковке (задача 2). k -кратной упаковкой $P_n(r)$ множества M из n равных кругов радиуса r называется объединение $\bigcup_{i=1}^n C_i(O_i, r)$ из n кругов таких, что

$$(5) \quad \forall i = \overline{1, n} : C_i(O_i, r) \subseteq M,$$

$$(6) \quad \forall s \in M : |\{j | \rho(s, O_j) \leq r, j = \overline{1, n}\}| \leq k.$$

Иначе говоря, набор кругов является k -кратной упаковкой в множестве M в том случае, когда множество M содержит их объединение (условие (5)) и каждая точка множества M принадлежит не больше, чем k кругам (условие (6)).

Оптимальной k -кратной упаковкой $P_n^*(r^*)$ множества M будем называть упаковку из n равных кругов с максимальным радиусом,

$$(7) \quad r \rightarrow \max.$$

Отметим, что при $k = 1$ задача (5), (6), (7) является классической задачей однократной упаковки равных кругов.

3. О методе решения

Алгоритмы решения задач 1 и 2, разумеется, различаются, однако имеют общий элемент: построение обобщенных диаграмм Вороного. Понятие диаграммы Вороного k -го порядка было введено в работе [30]. Для набора из n точек $O_i, i = \overline{1, n}$, k -кратная область Вороного V_i^k с центром в точке O_i определяется следующим образом:

$$V_i^k = \left\{ s \in M : \rho(s, O_i) \leq \min_{j \in J_k} \rho(s, O_j) \right\}, i = \overline{1, n}, n > k.$$

Здесь $J_k(s)$ — множество k индексов центров, отстоящих от точки s не больше, чем $n - k$ оставшихся центров.

Для их построения мы используем подход, основанный на двух фундаментальных принципах геометрической оптики: Ферма и Гюйгенса, которые устанавливают связь между распространением света в оптически неоднородной среде и задачей минимизации интегрального функционала вида (1). Это, в свою очередь, позволяет эффективно строить диаграммы Вороного для широкого класса метрических пространств, включая и евклидово. На основе данного подхода разработаны численные алгоритмы, позволяющие успешно решать задачи об упаковке и покрытии неограниченных множеств [6], в первую очередь, для неевклидовой метрики (1).

Световая волна здесь означает электромагнитную волну, скорость движения которой в вакууме постоянная, а в неоднородной среде – переменная (она задается функцией $f(x, y)$). Волна распространяется в соответствии с физическими принципами Ферма и Гюйгенса. Согласно первому из них, свет из одной точки в другую движется по траектории, обеспечивающей перемещение за минимальное время. Второй принцип утверждает, что все точки светового фронта волны становятся вторичными источниками световых волн, которые распространяются во всех направлениях. Алгоритм, описывающий распространение такой волны, более подробно представлен в [5, 22]. Отметим также, что волновые фронты описываются известным уравнением эйконала [9].

Предлагаемые алгоритмы состоят из следующих основных блоков: построение k -кратных областей Вороного V_i^k для случайно сгенерированного начального набора центров кругов O_i ; отыскание для каждой области V_i^k точки O_i^* – центра описанной окружности минимального радиуса для задачи покрытия, либо центра вписанной окружности максимального радиуса для задачи упаковки; перестроение областей Вороного относительно набора найденных центров $O_i^*, i = \overline{1, n}$.

Алгоритм 1 построения k -кратных областей Вороного.

1. Введем прямоугольную сетку с шагом h . Далее будем работать с сеточной аппроксимацией M^h вместо M .

2. Из каждой точки $O_i, i = \overline{1, n}$ выпускаем световую волну, используя алгоритм из [5]. Это позволяет найти вектор $T(s) = (T_i(s))$, элементы которого содержат время достижения точки $s(x, y) \in M^h$ соответствующей волной.

3. Для каждой точки $s(x, y) \in M^h$ выбираем k минимальных компонент вектора $T(s)$. Таким образом, находим множества $J_k(s)$, состоящее из k индексов ближайших к этой точке центров O_i .

4. Для построения множеств V_i^k осуществляем полный перебор множества M^h . Точка $s(x, y) \in V_i^k$, если $i \in J_k(s)$.

Отметим, что, в отличие от обычной диаграммы Вороного,

где ячейки не пересекаются, здесь каждая точка принадлежит k ячейкам.

Алгоритм 2 построения k -кратных покрытий.

1. Методом случайной генерации задаем начальные координаты центров кругов $O_i \in M^h$, $i = \overline{1, n}$.

2. Находим k -кратные области Вороного V_i^k , $i = \overline{1, n}$ в соответствии с алгоритмом 1.

3. Определяем границу ∂V_i^k области V_i^k и аппроксимируем ее замкнутой ломаной с узлами в точках V_u , $u = \overline{1, m}$. Если при этом три точки оказываются лежащими на одной прямой, то средняя точка исключается из рассмотрения.

4. Из каждого узла V_u , $u = \overline{1, m}$, выпускаем световую волну [5].

5. Для каждой точки $s(x, y) \in V_i^k$ маркируем волну, которая первой достигла $s(x, y)$, и фиксируем время $t(x, y)$, которое для этого потребовалось. Радиус и центр описанной окружности вычисляются по формулам

$$R_i = \max_{(x,y) \in V_i^k} t(x, y),$$

$$O_i^* = \arg \max_{(x,y) \in V_i^k} t(x, y).$$

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области V_i^k .

6. Чтобы гарантировать полное покрытие кругами множество M^h , в качестве радиуса покрытия выберем максимальный: $R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i$.

7. Если $\rho(O_i, O_i^*)$, $i = \overline{1, n}$ меньше, чем наперед заданная величина ε , переходим к шагу 8, иначе $O_i := O_i^*$, и переходим к шагу 2.

8. Если найденный на текущей итерации радиус меньше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи. Производится новая генерация начальных положений. Завершение работы алгоритма осуществляется при достижении заданного количества генераций.

Алгоритм 3 построения k -кратных упаковок.

1. Методом случайной генерации задаем начальные координаты центров кругов $O_i \in M^h, i = \overline{1, n}$.

2. Находим k -кратные области Вороного $V_i^k, i = \overline{1, n}$ в соответствии с алгоритмом 1.

3. Определяем границу ∂V_i^k области V_i^k и аппроксимируем ее замкнутой ломаной с узлами в точках $V_u, u = \overline{1, m}$.

4. Далее граница ∂V_i^k рассматривается как источник плоской волны, распространяющейся внутрь области V_i^k : в каждой точке V_u восстанавливается нормаль, направленная внутрь области V_i^k , и осуществляется сдвиг V_u вдоль нормали на величину шага сетки h . С использованием найденных точек восстанавливается кривая Безье – новый фронт волны. Процесс повторяется до нахождения точки, которую эта волна достигнет последней, она и будет центром вписанного круга $\overline{O}_i$.

5. Вычисляем радиус вписанного круга $r_i = \rho(\overline{O}_i, \partial V_i^k)$.

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области V_i^k .

6. Вычисляется общий радиус упаковки $r = \min_{i=\overline{1, n}} r_i$.

7. Если $\rho(O_i, \overline{O}_i), i = \overline{1, n}$ меньше, чем наперед заданная величина ε , переходим к шагу 8, иначе $O_i := \overline{O}_i$, и переходим к шагу 2.

8. Если найденный на текущей итерации радиус больше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи. Производится новая генерация начальных положений. Завершение работы алгоритма осуществляется при достижении заданного количества генераций.

Недостатком предложенных алгоритмов является то, что они не гарантируют получения глобального решения рассмотренной задачи. Эта особенность является следствием чувствительности диаграммы Вороного к выбору начального приближения. По этой причине мы используем многократное генерирование начальных положений центров описываемых и упаковываемых кругов (мультистарт) с целью повышения вероятности нахождения глобального решения.

4. Вычислительный эксперимент

Тестирование предложенных в предыдущем разделе алгоритмов проведено с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i7-5500U (частота 2,4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционной системой Windows 10. Алгоритмы реализованы на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2015.

В таблицах n – число упаковываемых или покрывающих кругов, R_n^k – радиус покрывающих кругов, ϑ_n^k – плотность покрытия, T_n^k – время работы алгоритма 2 в минутах, r_n^k – радиус упаковываемых кругов, δ_n^k – плотность упаковки, а t_n^k – время работы алгоритма 3 в минутах. На рисунках упаковываемые и покрывающие круги обозначены тонкими линиями, граница области упаковки и покрытия – жирной линией, а центры кругов – чёрными точками.

Пример 1. В данном примере представлены наилучшие решения задач многократных покрытий и упаковок равных кругов в единичный круг в случае, когда метрика является евклидовой, т.е. $f(x, y) = 1$. В табл. 1 и 2 представлены соответственно наилучшие найденные покрытия и упаковки для заданного числа кругов и различной кратности. Рисунки 1 и 2 иллюстрируют результаты расчетов для 20 кругов при кратности $k = 4, 5$.

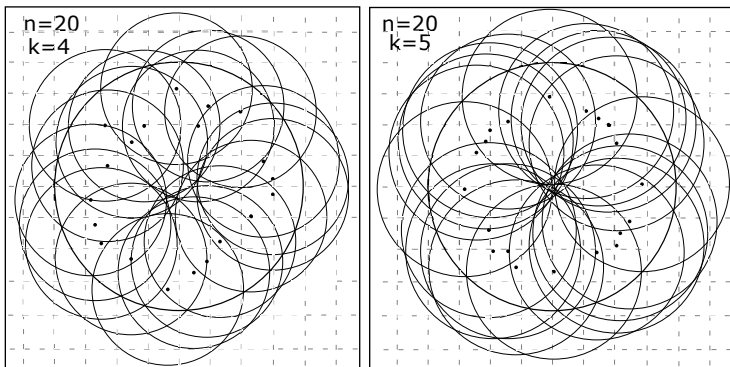


Рис. 1. 4- и 5-кратные покрытия единичного круга 20 кругами

Таблица 1. Наилучшие многократные покрытия единичного круга равными кругами при $f(x, y) \equiv 1$

n	R_n^2	ϑ_n^2	R_n^3	ϑ_n^3	r_n^4	ϑ_n^4	R_n^5	ϑ_n^5
3	1	3	1	3				
4	1	4	1	4	1	4		
5	0,953	4,537	1	5	1	5	1	5
6	0,864	4,479	1	6	1	6	1	6
7	0,784	4,299	0,975	6,653	1	7	1	7
8	0,705	3,976	0,924	6,828	1	8	1	8
9	0,653	3,842	0,866	6,75	0,985	8,729	1	9
10	0,612	3,742	0,809	6,545	0,951	9,045	1	10
15	0,475	3,385	0,608	5,542	0,91	12,411	0,995	14,836
20	0,403	3,253	0,533	5,679	0,611	7,466	0,707	10
25	0,362	3,273	0,449	5,041	0,555	7,693	0,616	9,491
30	0,331	3,28	0,407	4,96	0,48	6,919	0,569	9,696

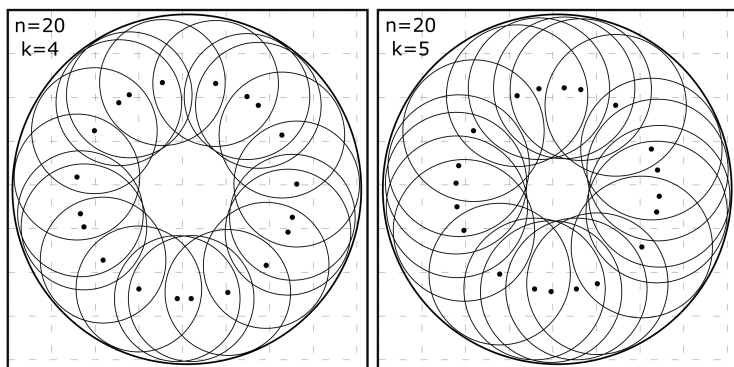


Рис. 2. 4- и 5-кратные упаковки 20 кругов в единичный круг

На основании табл. 1 и 2, нетрудно убедиться, что $R_n^{k+1} \leq R_n^k$, $r_n^{k+1} \geq r_n^k$, $\vartheta_n^k \geq \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3k}$, $\delta_n^k \leq \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6k} \right)$ [30].

Заметим, что в данном примере покрытия и упаковки найдены с точностью до угла поворота относительно центра круга M , таким образом, можно получить бесконечный набор упаковок и покрытий с одинаковым радиусом (рис. 1, 2). •

Пример 2. Рассмотрим метрику с линейной функцией $f(x, y) = v_0(1 + k_1x + k_2y)$, где v_0, k_1, k_2 постоянны. Иначе говоря, скорость распространения волн возрастает линейно по

Таблица 2. Наилучшие многократные упаковки в единичный круг равных кругов при $f(x, y) \equiv 1$

n	r_n^2	δ_n^2	r_n^3	δ_n^3	r_n^4	δ_n^4	r_n^5	δ_n^5
3	0,247	0,575						
4	0,247	0,767	0,248	0,771				
5	0,240	0,901	0,247	0,962	0,248	0,964		
6	0,229	0,984	0,247	1,149	0,248	1,155	0,248	1,158
7	0,214	1,003	0,243	1,294	0,247	1,341	0,248	1,349
8	0,204	1,045	0,237	1,410	0,245	1,511	0,247	1,535
9	0,191	1,028	0,229	1,482	0,243	1,673	0,246	1,714
10	0,181	1,030	0,220	1,514	0,239	1,793	0,245	1,888
15	0,153	1,098	0,180	1,527	0,209	2,055	0,229	2,468
20	0,126	0,999	0,164	1,697	0,183	2,102	0,203	2,590
25	0,116	1,065	0,138	1,485	0,166	2,170	0,176	2,445
30	0,104	1,025	0,128	1,532	0,153	2,192	0,168	2,660

обеим координатам при отдалении от начала координат. Множество M является выпуклым многоугольником с вершинами $\{(1.0; 0.1), (0.1; 0.7), (0.5; 2.1), (1.5; 1.6), (2.1; 0.5)\}$.

В табл. 3 и 4 представлены соответственно наилучшие найденные покрытия и упаковки для заданного числа кругов и кратности $2 \leq k \leq 5$. Рис. 3 иллюстрируют результаты расчетов для 15 кругов при кратности $k = 2, 3$. На рис. 4 показаны примеры кратных упаковок. Отметим, что в данном примере волновые фронты так же, как и в евклидовой метрике имеют форму окружности, однако источник волны (центр круга) оказывается смещен (подробнее см. в работе [12]).

Отметим, что для некоторых случаев радиус упаковки остается неизменным при увеличении на единицу количества кругов и кратности $r_n^k = r_{n+1}^{k+1}$. При этом положение n центров кругов в $(k+1)$ -кратной упаковке совпадает с их положением k -кратной упаковке, а $n+1$ -й можно разместить свободно внутри многоугольника M . Например, положение центров в двукратной упаковке трёх кругов совпадает с тремя центрами в трёхкратной упаковке четырёх кругов, а положение четвёртого можно выбрать произвольно внутри M (см. рис. 4).

Таблица 3. Наилучшие многократные покрытия единичного круга равными кругами при линейной $f(x, y)$

n	R_n^2	T_n^2	R_n^3	T_n^3	R_n^4	T_n^4	R_n^5	T_n^5
3	6,497	1,40						
4	5,304	3,83	6,778	2,87				
5	5,204	4,33	6,497	3,93	6,778	4,35		
6	4,37	4,66	5,262	10,50	6,522	6,13	6,782	7,09
7	4,036	7,73	5,319	11,83	6,496	7,47	6,540	8,25
8	3,603	7,05	5,204	12,83	5,319	13,76	5,942	14,26
9	3,361	9,63	4,417	15,50	5,319	13,35	5,610	13,69
10	3,071	10,33	4,161	17,00	5,203	17,83	5,332	19,70
15	2,520	12,50	3,204	27,83	3,977	30,50	4,256	35,69
20	2,155	24,50	2,739	28,33	3,246	41,33	3,810	46,01
25	1,946	33,33	2,394	35,50	2,799	43,00	3,201	50,13
30	1,773	76,17	2,172	40,22	2,567	47,83	2,909	67,04

Таблица 4. Наилучшие многократные упаковки в единичный круг равных кругов при линейной $f(x, y)$

n	r_n^2	t_n^2	r_n^3	t_n^3	r_n^4	t_n^4	r_n^5	t_n^5
3	3,343	2,83						
4	3,317	4,10	3,343	5,31				
5	3,078	6,16	3,317	8,08	3,343	9,70		
6	3,069	7,38	3,317	14,96	3,317	11,46	3,343	13,98
7	2,481	9,30	3,078	13,50	3,317	12,15	3,317	18,61
8	2,419	10,49	3,069	15,33	3,317	12,49	3,317	21,20
9	2,269	8,21	3,069	19,77	3,074	16,73	3,317	19,07
10	2,183	8,33	2,489	18,16	3,069	19,19	3,284	20,14
15	1,808	14,06	2,159	22,40	2,409	25,97	3,069	31,23
20	1,563	20,23	1,951	30,36	2,151	32,39	2,347	38,11
25	1,346	26,17	1,673	32,08	1,960	40,53	2,151	48,73
30	1,226	31,55	1,543	41,15	1,808	49,06	1,976	52,09

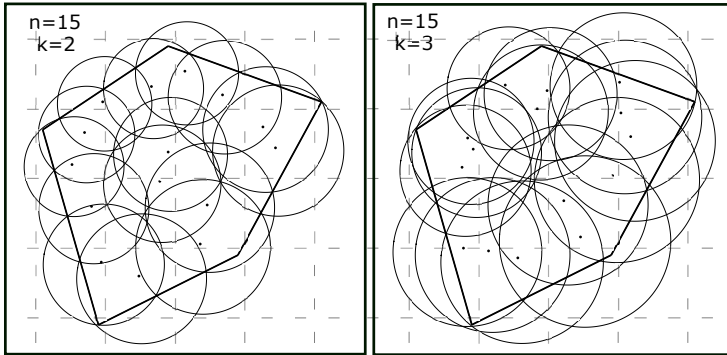


Рис. 3. 2- и 3-кратные покрытия многоугольника 15 кругами

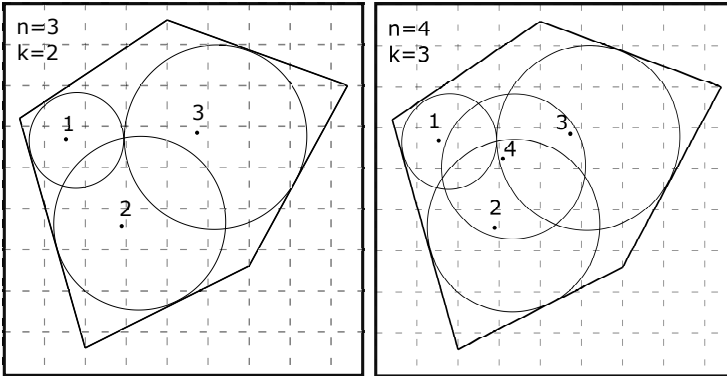


Рис. 4. 2- и 3-кратные упаковки 15 кругов в многоугольник

•

Пример 3. Пусть имеются функция (рис. 5)

$$f(x, y) = \frac{(y - 2.5)^2}{(y - 2.5)^2 + 1} + 0.1$$

и множество $M = \{(x, y) \in R^2 : (x - 2.05)^2 + (y - 2.05)^2 = 4\}$.

В среде с этой метрикой скорость распространения световых волн зависит только от переменной y . Иначе говоря, данная среда является слоистой. В табл. 5,6 представлены наилучшие результаты при построении многократных покрытий и упаковок равных кругов в круг M с метрикой $f(x, y)$ для упаковки до 30 кругов и

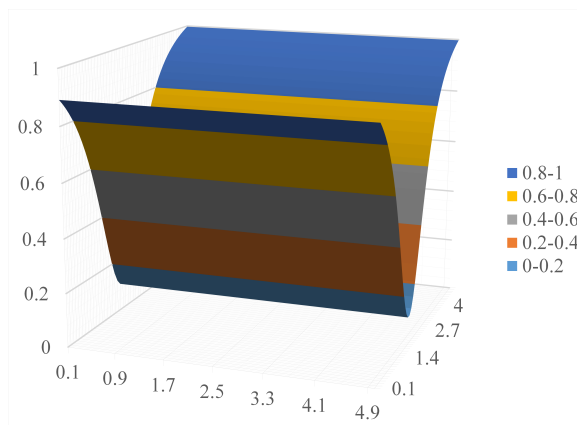


Рис. 5. Функция $f(x, y)$

$k = 2, 3, 4, 5$.

Таблица 5. Наилучшие многократные покрытия равными кругами в слоистой среде

n	R_n^2	T_n^2	R_n^3	T_n^3	R_n^4	T_n^4	R_n^5	T_n^5
3	7,505	1,59						
4	7,505	3,94	7,964	2,11				
5	5,223	4,01	7,101	3,56	7,964	2,23		
6	5,165	4,35	6,785	7,26	7,101	4,61	7,237	3,88
7	5,032	7,00	5,829	8,96	6,497	6,25	7,237	7,16
8	4,241	8,06	5,591	10,23	5,921	10,18	7,237	12,2
9	3,636	9,69	5,268	11,17	5,489	10,33	6,560	12,36
10	3,202	12,25	4,313	13,03	4,910	12,17	6,006	17,52
15	2,612	16,57	3,120	22,95	4,271	21,3	5,605	27,15
20	2,259	27,1	2,733	26,11	3,512	29,77	3,774	35,11
25	2,015	38,74	2,506	33,29	3,055	34,2	3,368	43,99
30	1,805	65,25	2,341	38,07	2,723	56,61	3,114	58,62

На рис. 6 и 7 представлено графическое изображение результатов решения задачи построения многократных покрытий и упаковок равных кругов при $n = 10, k = 2$ и $n = 15, k = 3$, связанных с табл. 5 и 6.

Заметим, что на рис. 6 и 7 представлены круги с одинако-

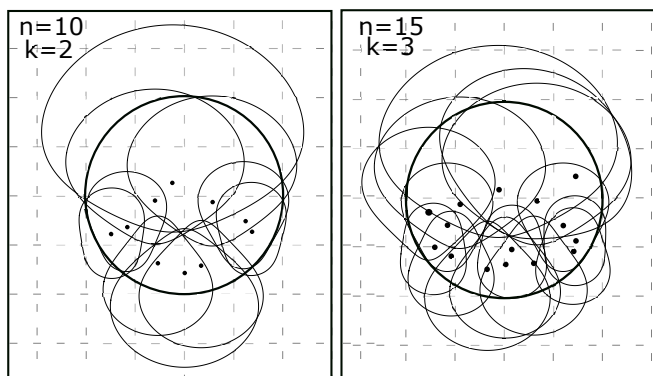


Рис. 6. Наилучшие многократные покрытия равными кругами в слоистой среде

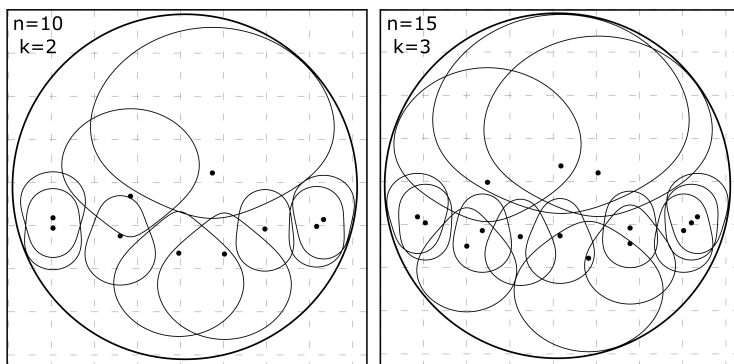


Рис. 7. Наилучшие многократные упаковки равных кругов в слоистой среде

Таблица 6. Наилучшие многократные упаковки равных кругов в слоистой среде

n	r_n^2	t_n^2	r_n^3	t_n^3	r_n^4	t_n^4	r_n^5	t_n^5
3	6,448	3,71						
4	6,448	4,48	6,448	6,01				
5	5,032	7,30	6,448	9,86	6,448	10,98		
6	5,012	8,15	6,448	11,13	6,448	13,51	6,448	15,33
7	4,151	8,01	5,032	12,66	6,448	16,75	6,448	19,38
8	4,111	11,24	5,012	15,94	6,448	18,62	6,448	22,05
9	3,492	12,71	5,004	18,40	5,032	17,25	6,448	24,19
10	3,128	14,92	4,174	18,01	5,012	22,07	6,448	23,00
15	2,499	19,36	3,028	22,22	4,097	30,81	5,004	29,49
20	2,206	23,99	2,654	26,43	3,069	36,53	3,333	36,02
25	1,956	30,15	2,407	35,95	2,682	40,16	3,089	45,98
30	1,774	33,21	2,215	36,84	2,476	45,37	2,712	44,03

выми радиусами в заданной метрике, при этом форма волновых фронтов заранее неизвестна. •

5. Заключение

Подводя итог проведенного исследования, отметим, что в ходе работы были рассмотрены известные задачи об оптимальном упаковке и оптимальном покрытии в относительно малоизученной постановке, когда а) в качестве метрического расстояния между объектами рассматривается минимальное время, потребное для преодоления пути между ними; б) покрытия и упаковки являются кратными. Для решения обеих задач предложены вычислительные алгоритмы, которые, хотя и не гарантируют нахождения глобального решения, в ходе проведенного вычислительного эксперимента продемонстрировали свою работоспособность, по крайней мере, для выпуклых областей.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны, прежде всего, с усложнением конфигураций областей и метрик, для которых работа алгоритма отлажена. Также большой интерес представляет доказательство каких-либо утверждений о сходимости предложенных методов, однако

на этом пути, очевидно, придется столкнуться с большими аналитическими трудностями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00604).

Литература

1. АСТРАКОВ С.Н., КВАШНИН А.Г., КОРОЛЕНКО Л.А. *Построение эффективных сенсорных сетей с учётом стоимостных затрат* // Математические структуры и моделирование. – 2017. – №3 (43). – С. 50–62.
2. ГАЛИЕВ Ш.И., ХОРЬКОВ А.В. *Оптимизация числа и расположения кругов двух радиусов для k -покрытия ограниченного множества* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, №4. – С. 716–728.
3. ГАЛИЕВ Ш.И., ХОРЬКОВ А.В. *Множественные покрытия кругами равностороннего треугольника, квадрата и круга* // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, №6. – С. 5–28.
4. ЕРЗИН А.И., ШАБЕЛЬНИКОВА Н.А. *О плотности покрытия полосы одинаковыми секторами* // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, №4. – С. 21–34.
5. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А. *Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Т. 72, №7. – С. 50–57.
6. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А., НГУЕН Г.Л. *Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой* // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, №2. – С. 177–188.
7. ЛЕБЕДЕВ П.Д. *Итерационные методы построения аппроксимаций оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств* // Челябинский физико-математический журнал. – 2019. – Т. 4, №1. – С. 5–17.
8. ЛЕБЕДЕВ П.Д., ЛАВРОВ Н.Г. *Алгоритмы построения оптимальных упаковок шаров в эллипсоиды* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2018. – Т. 52. – С. 59–74.

9. УСПЕНСКИЙ А.А., ЛЕБЕДЕВ П.Д. *Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, №1. – С. 282–293.
10. УШАКОВ В.Н., ЛЕБЕДЕВ П.Д. *Алгоритмы построения оптимального покрытия множеств в трехмерном евклидовом пространстве* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, №2. – С. 276–288.
11. BÁNHÉLYI B., PALATINUS E., LÉVAI, B.L. *Optimal circle covering problems and their applications* // Central European J. Operations Research. – 2015. – Vol. 23. – P. 815–832.
12. BOROVSKIKH A. *The two-dimensional eikonal equation* // Siberian Mathematical Journal. – 2006. – Vol. 47, No. 2. – P. 813–834.
13. BYCHKOV I.V., KAZAKOV A.L., LEMPERT A.A., BUKHAROV D.S., STOLBOV A.B. *An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure* // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, No. 2. – P. 332–343.
14. CARDEI M., WU J., LU M. *Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges* // Int. J. Sensor Networks. – 2006. – Vol. 1, No. 1-2. – P. 41–49.
15. CONWAY J.H., SLOANE N.J.A. *Sphere Packing. Lattices and Groups*. – NY: Springer, 1999. – 706 p.
16. DORNINGER D. *Thinnest covering of the euclidean plane with incongruent circles* // Anal. Geom. Metr. Spaces. – 2017. – Vol. 5, No. 1. – P. 40–46.
17. DREZNER Z. *Facility location: A survey of applications and methods*. – NY: Springer, 1995. – 571 p.
18. HALES T.C. *Cannonballs and honeycombs* // Notices of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 47. – P. 440–449.
19. HEPPE A., MELISSEN, J.B.M. *Covering a rectangle with equal circles* // Periodica Mathematica Hungarica. – 1997. –

- Vol. 34. – P. 65–81.
20. JAIN A.K., DUBES R.C. *Algorithms for clustering data.* – New Jersey: Prentice Hall, 1988. – 320 p.
 21. LEMPERT A.A., KAZAKOV A.L. *On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure* // Int. J. Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 13, No. 1. – P. 200–210.
 22. KAZAKOV A., LEMPERT A., LEBEDEV P. *Congruent circles packing and covering problems for multiconnected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics* // CEUR Workshop Proceedings – 2017. – Vol. 1839. – P. 334–343.
 23. LEMPERT A.A., KAZAKOV A.L., BUKHAROV D.S. *Mathematical model and program system for solving a problem of logistic objects placement*// Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 8. – P. 1463–1470.
 24. LOPEZ C., BEASLEY J. *A formulation space search heuristic for packing unequal circles in a fixed size circular container* // European Journal of Operational Research. – 2016, – Vol. 251, No. 1. – P. 64–73.
 25. PEDROSO J.P., CUNHA S., TAVARES J.N. *Recursive circle packing problems* // International Transactions in Operational Research. – 2014. – Vol. 23. – P. 355–368.
 26. STOYAN Y.G., PATSUK, V.M. *Covering a compact polygonal set by identical circles* // Comput. Optim. Appl. – 2010. – Vol. 46. – P. 75–92.
 27. SZABÓ P.G., SPECHT E. *Packing up to 200 equal circles in a square.* – In: Torn A., Zilinskas Ju. (eds) *Models and Algorithms for Global Optimization.* – NY: Springer. – 2007. – P. 141–156.
 28. TABIRCA T., YANG L.T., TABIRCA S. *Smallest number of sensors for k-covering* // Int. J. Comput. Commun. Control. – 2013. – Vol. 8, No. 2. – P. 312–319.
 29. TARNAI T., GASPARD ZS. *Covering a square by equal circles* // Elem. Math. – 1995. – Vol. 50. – P. 167–170.
 30. TOTH G.F. *Multiple packing and covering of the plane with*

circles // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1976. – Vol. 27. –
P. 135–140.

ON MULTIPLE COVERINGS AND PACKINGS PROBLEMS IN A TWO-DIMENSIONAL NON-EUCLIDEAN SPACE

Alexander Kazakov, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, Professor (kazakov@icc.ru).

Anna Lempert, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Moscow, Cand.Sc., Assistant Professor (lempert@icc.ru).

Quang Mung Le, Irkutsk National Research Technical University (Baikal School of BRICS), Irkutsk, PhD Student (quangmungle2010@gmail.com).

Abstract: The article is devoted to the study of two significant problems of computational geometry. The first one is the multiple circle covering problem for a closed bounded set in a two-dimensional metric space, and the second one is the multiple circle packing problem. In the first case, the objective is to minimize the radius of the circles, and in the second one, we are aimed to maximize it. In both cases, the number of circles k is given. The considered metric is generally non-Euclidean. The source of such a statement is transport logistics, where there are tasks in which the distance between objects is necessary to be replaced by a minimum time to travel between them. And optimum is not always achieved when moving in a straight line due to the terrain or urban features. To solve the problems we propose computational algorithms. They include the joint use of an optical-geometric approach based on the principles of Fermat and Huygens and the K-means method. The key step is to construct a generalized k -order Voronoi diagram. Each Voronoi cell with a fixed set of n centroids includes points, which are closer to some k centroids than to the remaining $n - k$. Here, in contrast to the classical Voronoi diagram, the cells can intersect each other. Computational experiments are carried out, and the results are presented and discussed.

Keywords: multiple packing, equal circles, non-Euclidean metric, algorithm, Voronoi-Dirichlet diagram, Fermat and Huygens principles.

УДК 514.174.2

ББК 22.19

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...*

Системный анализ

Поступила в редакцию ...

Дата опубликования ...