МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Кондратьев В.Д.
(НИЦ ГИБДД МВД РФ, Москва)

Рассматриваются постановки задач оптимального размещения в зависимости от того, какие ограничения являются существенными, и какие критерии оптимальности выбраны.

Ключевые слова: затраты на размещение, эффект от размещения, синергетический эффект

Введение

Задача размещения объектов различного вида составляют широкий класс задач дискретной оптимизации. Возможны различные постановки задач оптимального размещения в зависимости от того, какие ограничения являются существенными, и какие критерии оптимальности выбраны. Рассмотрим ряд постановок.

Постановка задачи

Пусть определены n пунктов возможного размещения объектов обслуживания. Примем, что все объекты однотипны в том смысле, что эффект от их размещения зависит только от пункта размещения. Обозначим через a_i - эффект от функционирования объекта в пункте i, b_i - затраты на его размещение и ввод в эксплуатацию в пункте i. Введем переменные $x_i = 1$, если объект обслуживания размещается в пункте i и $x_i = 0$ в противном случае. Тогда простейшую задачу оптимального размещения можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. Определить $\{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$, максимизирующие

(1) $A(x) = \sum_i a_i x_i$

при ограничении

(2) $\sum_i b_i x_i \le B$,

где B – объем средств, выделенных на размещение объектов.

Задача (1)-(2) является классической «задачей о ранце» методы решения которой хорошо разработаны. Однако эта задача не учитывает ряд условий, которые могут оказаться существенными. Так, размещение большого числа объектов в одном регионе уменьшает эффект от функционирования каждого из них в силу ограниченности потребностей населения в данном виде услуг. Так, например, если все пункты возможного размещения объектов расположены в одном регионе, то соответствующее ограничение имеет вид

(3) $\sum_i x_i \le p$,

где p – максимальное число объектов, которые целесообразно разместить в данном регионе.

Замечание. При постановке задачи размещения объектов обслуживания предполагается, что размещение такого же типа объектов, принадлежащих другим фирмам, известно, что и позволяет оценивать ожидаемый эффект от размещения объектов.

Задача 2. Определить $\{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$, максимизирующие (1) при ограничениях (2) и (3).

Рассмотрим обобщения задач 1 и 2. Пусть объекты обслуживания не являются однотипными. В этом случае и эффект, и затраты на размещение объекта зависит как от типа объекта, так и от пункта размещения. Обозначим, соответственно, a_{ij} - эффект, b_{ij} - затраты, если объект *i-го* типа разместился в пункте j. Введем переменные $x_{ij} = 1$, если объект типа i размещается в пункте j, $x_{ij} = 0$ в противном случае. Пусть число типов объектов равно m.

Задача 3. Определить $\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, максимизирующие

(4) $$A(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$$

при ограничении

(5) $$\sum_{i,j} b_{ij} x_{ij} \le B$$

(6) $$\sum_{i} x_{ij} \le D_j\,,\ \ j = \overline{1,n}$$

Ограничение (6) отражает тот факт, что в каждом пункте можно разместить не более D_j объектов разных типов. В задаче 3 не учитывается тот факт, что при размещении объектов разных типов в одном пункте эффект, как правило, больше, чем сумма эффектов при размещении этих объектов без учета их совместного функционирования, а затрат, как правило, меньше, чем сумма затрат при независимом размещении (возникает так называемый синергетический эффект).

Для учета этих особенностей поступим следующим образом. В качестве объекта определенного типа будем рассматривать комплекс, состоящий из одного или нескольких объектов разных типов. Такой подход позволяет учесть синергетический эффект, хотя число типов объектов возрастает. В этом случае в ограничении (6) задачи 3 следует положить все $D_j = 1$, так как в одном пункте можно разместить не белее одного комплекса.

Учет ограничения вида (3) в задаче 3 является более сложным делом, так как речь идет о функционировании комплексов разных типов. Примем, что в каждом комплексе имеется определяющий тип объекта, а все остальные объекты, входящие в комплекс, являются, дополняющими. Такой подход позволяет учитывать ограничения вида (3) только по определяющему типу объектов, что существенно упрощает и постановку, и решение задачи. Действительно, в этом случае все сложные объекты (комплексы) разбиваются на непересекающиеся классы по определяющему типу объектов, а ограничения вида (3) выписываются для каждого класса объектов.

Решение задачи 1

Как уже отмечалось, задача 1 является классической задачей о ранце, и для ее решения существуют эффективные алгоритмы, основанные на методах динамического и дихотомического программирования. Поскольку эта задача является базовой для всех остальных задач, рассмотрим на примере ее решение методом дихотомического программирования [1].

Пример 1. Пусть число пунктов размещения объектов равно 6. Данные об эффектах и затратах приведены в таблице 1.

Таблица 1. Эффекты и затраты

i	1	2	3	4	5	6
a_i	12	14	16	18	21	25
b_i	3	4	5	6	7	8

Примем B = 12.

1 шаг. Строим дерево дихотомического представления задачи. Для этого объединяем пункт один с шестым, пункт 2 – с пятым и пункт 3 – с четвертым (рис 1).

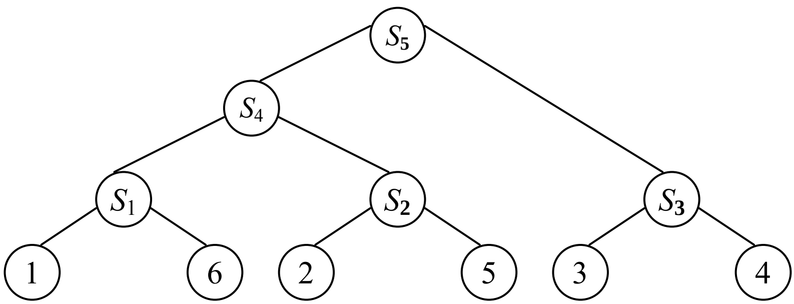

Рис. 1. Дерево дихотомического представления задачи

Рассматриваем вершину S_1, что соответствует задаче оптимизации размещения объектов в пунктах 1 и 6. Результаты вычислений удобно представлять в виде матрицы, приведенной ниже.

$x_6 \backslash x_1$		
	$\frac{25}{8}$	$\frac{37}{11}$
		$\frac{12}{3}$

$(y_1, z_1)=$ ⇒

11	37
8	25
3	12
y_1	z_1

В каждой клетке матрицы 2 числа. Верхнее число определяет эффект от размещения объектов, а нижнее - затраты. Результаты оптимизации приведены справа. При затратах y_1 = 3 получаем эффект z_1= 12, что соответствует размещению объекта в пункте 1**.**

При затратах y_1 = 8 получаем эффект z_1= 25, что соответствует размещению объекта в пункте 6.

Наконец, при затратах y_1 = 11 получаем эффект z_1 = 37, что соответствует размещению объектов в обоих пунктах - 1 и 6.

Рассматриваем вершину S_2, и решаем задачу оптимизации размещения объектов в пунктах 2 и 5.

Результаты приведены ниже.

$x_5 \backslash x_2$		
	$\frac{21}{7}$	$\frac{35}{11}$
		$\frac{14}{4}$

$(y_2,z_2)=$ ⇒

11	35
7	21
4	14
y_2	z_2

Рассматриваем вершину S_3, и решаем задачу оптимизации размещения объектов в пунктах 3 и 4.

$(y_3, z_3)=$ ________________________ ⇒

11	34

$\frac{18}{6}$	$\frac{34}{11}$
x_4 \ x_3	$\frac{16}{5}$

6	18
5	16
y_3	z_3

Рассматриваем вершину S_4, и решаем задачу оптимизации размещения объектов в пунктах 1,6,2 и 5.

Результаты приведены ниже.

$(y_4, z_4)=$

$\frac{35}{11}$	—	—	—
$\frac{21}{7}$	$\frac{33}{10}$	—	—
$\frac{14}{4}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{39}{12}$	—
S_2 \ S_1	$\frac{12}{3}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{37}{11}$

Пустым клеткам соответствуют затраты больше 12.

Чтобы получить результирующую таблицу «затраты-эффект», рассматриваем затраты в порядке возрастания, при этом, если имеются несколько клеток с одинаковыми затратами, то берем ту, которой соответствует максимальная величина эффекта.

Так, например, затратам 7 соответствуют две клетки с эффектами 21 и 26. Выбираем клетку с максимальным эффектом - 26.

В результате получаем следующую таблицу:

y_4	3	4	7	8	10	11	12

z_4	12	14	26	25	33	37	39

Заметим, что в этой таблице вариант $y_4 = 8$, $z_4 = 25$ очевидно хуже варианта $y_4 = 7$, $z_4 = 26$, поскольку в последнем случае при меньших затратах мы получаем больший эффект. В этом случае говорят, что вариант $(y_4, z_4) = (8, 25)$ доминируется вариантом $(y_4, z_4) = (7,26)$.

Очевидно, что все доминируемые варианты следует исключить, поскольку они не могут войти в оптимальное решение.

Таблица недоминируемых (Парето-оптимальных) вариантов приведена ниже:

y_4	3	4	7	10	11	12
z_4	12	14	26	33	37	39

Рассматриваем вершину S_5, что соответствует задаче оптимизации размещения всех объектов.

Результаты приведены ниже.

$S_5=(y_5, z_5)=$

$\frac{34}{11}$	—	—	—	—	—	—
$\frac{18}{6}$	$\frac{30}{9}$	$\frac{32}{10}$	—	—	—	—
$\frac{16}{5}$	$\frac{28}{8}$	$\frac{30}{9}$	$\frac{42}{12}$	—	—	—
S_2 / S_1	$\frac{12}{3}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{37}{11}$	$\frac{39}{12}$

Результирующая таблица с исключенными доминируемыми вариантами выглядит следующим образом:

y_5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z_5	12	14	16	18	26	28	30	33	37	42

В этой таблице каждой величине затрат соответствует максимальный эффект, который можно получить при этих затратах.

Так при затратах B = 12 максимальный эффект равен 42.

Для того чтобы получить оптимальное решение, то есть множество пунктов, в которых размещаются объекты, применяем алгоритм «обратного хода».

Рассматриваем последнюю таблицу (y_5,z_5) и находим клетку (y_5,z_5)= (12,42). Этой клетке соответствуют клетка (y_4,z_4)= (7,26) и (y_3, z_3)=(5,16).

Рассматриваем таблицу (y_4,z_4) и находим клетку (y_4,z_4)=(7,26). Этой клетке соответствуют клетки (y_2,z_2) = (4,14) и (y_1, z_1) = (3,12).

Рассматриваем таблицу (y_3, z_3) и находим клетку (y_3, z_3) = (5,16). Этой клетке соответствует размещение объекта в пункте 3 и неразмещение объекта в пункте 4.

Рассматриваем таблицу (y_2, z_2) и находим клетку (y_2, z_2) = (4,14). Этой клетке соответствует размещение объекта в пункте 2 и неразмещение объекта в пункте 5.

Наконец, рассматриваем таблицу (y_1, z_{11}) и находим клетку (y_1 z_1) = (3,12). Этой клетке соответствует размещение объекта в пункте 1 и неразмещение объекта в пункте 6.

Окончательно получаем следующее оптимальное решение: x_4=x_5=x_6=0, то есть объекты размещаются в первых трех пунктах.

Решение задачи 2

Перейдем к задаче 2, то есть учтем ограничения (4), связанные с нецелесообразностью размещения в одном регионе (или в близких пунктах) большого числа объектов.

В данном случае сетевое представление задачи приведено на рис. 2 для случая n = 4 и P=(3;4).

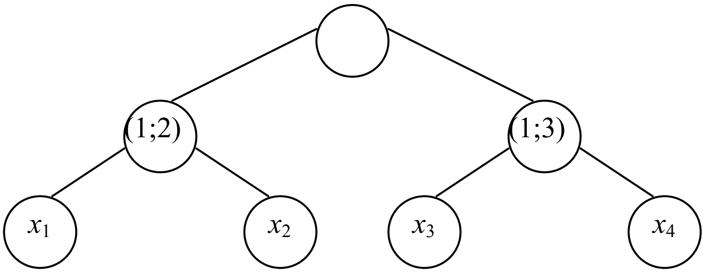

Рис. 1. Сетевое представления задачи 2

Структура этого представления уже не является деревом, и поэтому необходимо применение общего метода сетевого программирования. Для этого разделим вершины 3 и 4 (в общем случае - все вершины множества *P*) на две, соответственно разделив на две части и величины эффекта.

(7) $a_i = u_i + a_i'$, $i \in P$.

Соответственно рассмотрим две подзадачи. Первая заключается в определении $\{x_i\}$, максимизирующих

(8) $$\sum_i x_i a_i'$$

при ограничении (2), а вторая - в определении $\{x_i\}$, $i \in P$, максимизирующих

(9) $$U(x) = \sum_{i \in p} u_i x_i$$

при ограничении (3).

Заметим, что решение второй задачи очевидно. Следует положить x_i=1 для *p* пунктов с наибольшими u_i.

Обозначим *A(u), U(u)* - значения целевых функций (8), (9) в оптимальных решениях соответствующих задач. Величина

(10) $A(u) + U(u)$

является оценкой сверху для целевой функции исходной задачи (1), (2), (3). Оценочная (двойственная) задача заключается в определении $\{u_i\}$ и соответственно $a_i'=a_i - u_i$, минимизирующих оценку (10).

Покажем, что в оптимальном решении оценочной задачи все u, одинаковы, то есть $u_i = u,\ i \in P$.

Заметим, во-первых, что если в решении задачи (9), (3) x_i=0, то положив $u_i= u_{min}$, где u_{min} - минимальная величина u_i среди $i \in P$ таких, что $x_i = 1$, мы не увеличим оценку (10), поскольку $U(u)$ не изменится, а $A(u)$ не увеличится. Поэтому положим $u_i=u_{min}$ для всех $i \in P$ таких, что x_i=0.

Далее, возьмем любое $u_i > u_{min}$ (очевидно, что $x_i = 1$ в решении задачи (9), (3)) и положим $u'_i= u_{min}$. При этом величина $u(a)$ уменьшается на разность $u_i - u_{min}$, а величина $A(u)$ может увеличиться не более чем на ту же разность $u_i- u_{min}$. Поэтому оценка (10) не увеличится.

Таким образом, мы получим оптимальное решение оценочной задачи, в котором $u_i= u$ для всех $i \in P$.

Тем самым оценочная задача сведена к определению u, минимизирующего

(11) $$pu + \max_x \sum_i (a_i - u)x_i$$

где $x= \{x_i\}$ удовлетворяют ограничениям (2). Отметим близость выражения (11) к функции Лагранжа.

Описание алгоритма

1 шаг. Берем $u = 0$ и решаем задачу (8), (2). Если в полученном решении

(12) $$\sum_{i \in p} x_i \le P$$

то это решение является оптимальным. Иначе переходим к шагу 2.

2 шаг. Увеличиваем u на некоторую величину $\delta > 0$ (выбор шага δ представляет собой отдельную задачу), и снова решаем задачу (8), (2). Если в полученном решении

(13) $\sum_{i \in p} x_i = P$

то это решение является оптимальным. Если в полученном решении

(14) $\sum_{i \in p} x_i > P$

то повторяем шаг 2. Если же

(15) $\sum_{i \in p} x_i > P$

то из двух решений (полученного на данном и на предыдущем шаге) берем решение с минимальной величиной оценки (11).

Имея метод получения оценки сверху для целевой функции исходной задачи (1), (2), (3) можно применить метод ветвей и границ, либо взять решение, полученное на последнем шаге в качестве приближенного решения.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В. *Метод сетевого программирования* / Проблемы управления. 2005, № 3. С. 23-29.