КООПЕРАТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИННОВАЦИЯМИ[1]

Мальсагов М.Х.[2]
(*Ингушский государственный университет, Назрань*)
Меркулова М.В.[3]**, Угольницкий Г.А.**[4]
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Разработка и использование инноваций определяют магистральный путь устойчивого развития организаций любого типа и являются необходимым условием экономического роста. В статье рассмотрены задачи мотивации сотрудников организации к продвижению инноваций путем распределения вознаграждения, формализованные как кооперативные дифференциальные игры. При построении таких игр использованы три различные характеристические функции: классическая функция Неймана-Моргенштерна, функции Петросяна-Заккура и Петросяна-Громовой. Первая всегда супераддитивна, но исходит из не вполне реалистичной гипотезы антагонизма между данной и дополнительной коалицией. Вторая более адекватно использует выигрыши игроков в равновесии Нэша, но не всегда гарантирует супераддитивность. Третья функция обеспечивает некий компромисс, гарантируя супераддитивность и используя гарантированный выигрыш коалиции при выборе ее участниками Парето-оптимальных стратегий. Во всех трех случаях в качестве решения игры использован вектор Шепли, компоненты которого находились аналитически и численно с использованием пакета Maple. Проведен сравнительный анализ результатов для тестового примера с тремя игроками для различных параметров модели, сделаны выводы относительно эффективности указанных способов распределения вознаграждения.

Ключевые слова: вектор Шепли, кооперативные дифференциальные игры, управление инновациями

1. Введение

Приоритетной целью государственной политики в области науки и технологий является переход к инновационному пути развития России. Внедрение технологических инноваций названо в качестве одной из основных целей в указе Президента РФ.

Инновациями считаются любые технические, организационные, экономические и управленческие изменения, отличные от существующей практики в данной организации. Они могут использоваться в других организациях, но для тех организаций, в которых они еще не освоены, их внедрение является сложным и трудоемким процессом, часто приводящим к немалым трудностям. Организации обладают различной восприимчивостью к инновациям. Инновационный потенциал и восприимчивость существенно зависят от параметров организационных структур менеджмента, профессионально-квалификационного состава, промышленно-производственного персонала, внешних условий хозяйственной деятельности и других факторов. Инновации находятся, с одной стороны, в

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №17-19-01038.
[2]*Мухарбек Хасанович Мальсагов, кандидат физико-математических наук, доцент* (*mmm1956@bk.ru*).
[3]*Мария Валерьевна Меркулова, магистр прикладной математики и информатики* (*scarlett1994@mail.ru*).
[4] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор* (*ougoln@mail.ru*)

противоречии со всем консервативным, направленным на сохранение существующего положения, с другой стороны, - нацелены, в пределах стратегии изменений, на значительное повышение технико-экономической эффективности деятельности организации [1,3].

Разработка и использование инноваций определяют магистральный путь устойчивого развития организаций любого типа. В РФ утвержден перечень крупных компаний с государственным участием, которые должны разработать и реализовать Программы инновационного развития.

Важнейшим аспектом реализации программы инновационного развития служит создание системы управления инновационной деятельностью компании. Дело в том, что инновации – это внедрение новшеств, а внедрение – процесс насильственного проникновения инородных элементов в сопротивляющуюся среду. Теория и практика внедрения инноваций убедительно показывают, что попытки внедрения новшеств обязательно вызывают противодействие у значительной части сотрудников компании, заинтересованных прежде всего в достижении собственных целей и сохранении существующего порядка. Система управления инновационной деятельностью призвана реализовать механизмы согласования частных интересов сотрудников организации с общей целью разработки и использования инноваций [5]. Без таких механизмов «мотивации инноваций» инновационная система окажется лишенной реального субъекта разработки и сопровождения и будет обречена на неудачу [10].

В данной статье рассматривается компания, состоящая из нескольких сотрудников и руководителя. Руководитель компании заинтересован во внедрении инноваций, а сотрудники (подчиненные) настроены консервативно. Ставится задача мотивировать коллектив на внедрение инноваций, оценить вклад сотрудников в их продвижении и оптимально распределить доход между руководителем и подчиненными.

Для решения этой задачи предлагается динамическая кооперативно-игровая формализация задачи управления инновационной деятельности компании [6,7,8]. При построении кооперативной дифференциальной игры используются три различные характеристические функции [2,7,12], для которых вычисляется вектор Шепли [4,7,11]. Авторский подход представлен в [9,10].

2. Постановка задачи

Рассмотрим сначала иерархическую дифференциальную игру в нормальной форме:

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sum_{j\in M}\sqrt{1-u_j(t)} + x(t)]dt \to \max \qquad (1)$$

$$S : s_i(t) \ge 0, \ \sum_{j\in M} s_j(t) = 1; \qquad (2)$$

$$J_i = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_i(t)} + s_i(t)x(t)]dt \to \max \qquad (3)$$

$$0 \le u_i(t) \le 1, i \in M; \tag{4}$$

$$\dot{x} = -x(t) + \sum_{j \in M} u_j(t), x(0) = x_0. \tag{5}$$

Здесь $0 < \rho < 1$ – коэффициент дисконтирования, связанный с инфляцией, амортизацией и т.д., т.е. уменьшающий выигрыш во времени относительно выигрыша в начальный момент игры. Переменная $x(t)$ моделирует выигрыш от внедрения инноваций, её динамика и начальный выигрыш в базовом году описываются соотношениями (5). Переменные $u_i(t), i \in M$, описывают временн**ы**е затраты на работу сотрудника над инновациями, тогда $1 - u_i(t)$ - время на исполнение других обязанностей сотрудника. Переменные $s_i(t)$ интерпретируются как доля сотрудника в выигрыше при внедрении инноваций (например, бонус). Работа, затраченная сотрудником на внедрение инновационного проекта, а также его выигрыш, контролируются руководителем, интересы которого отражает функционал J_0. Каждый сотрудник и руководитель стремятся максимизировать свой общий доход, включающий выигрыш от инноваций, на бесконечном периоде времени.

Для реализации различных моделей инновационного развития компании используются три основных способа построения кооперативной игры в форме характеристической функции на основе игры в нормальной форме [2,7,12]. Классический подход предложен Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном:

$$v(K) = \sup_{u_K} \inf_{u_{N \setminus K}} \sum_{i \in K} J_i(u_K, u_{N \setminus K}), \tag{6}$$

где u_K - вектор стратегий игроков, входящих в коалицию K, $u_{N\setminus K}$ -вектор стратегий участников дополнительной коалиции $N \setminus K$. Доказано, что функция (6) супераддитивна, т.е. для любых двух непересекающихся коалиций сумма их выгод по отдельности не больше их выгоды при объединении. Однако, в реальных приложениях совсем не очевидно, что если несколько игроков образуют коалицию, то остальные должны играть строго против них. В частности, при рассмотрении инноваций это не так. Поэтому Л.А. Петросян и Ж. Заккур предложили новую характеристическую функцию [12]:

$$v(K) = \sup_{u_K} \sum_{i \in K} J_i(u_K, u_{N \setminus K}^{NE}), \tag{7}$$

где игроки из коалиции K максимизируют свой суммарный выигрыш, а остальные используют равновесные по Нэшу стратегии. К сожалению, характеристическая функция (7) может быть не супераддитивной, что нарушает основной принцип кооперативных игр «объединяться выгодно». Чтобы обойти этот недостаток, Е.В. Громова и Л.А. Петросян ввели характеристическую функцию [2]:

$$v(K) = \inf_{u_{N\setminus K}} \sum_{i\in K} J_i(u_K^{PO}, u_{N\setminus K}), \qquad (8)$$

где участники коалиции K используют Парето-оптимальные стратегии. Для данной модели доказано, что функция супераддитивна. Также отметим, что во всех случаях (6)-(8):

$$v(N) = \sum_{i\in N} J_i(u^{PO}) = J^{PO}. \qquad (9)$$

В настоящей работе решение игры в форме характеристической функции ищется в виде вектора Шепли [4,6,7], который всегда существует и единственен. Это решение определяется формулой

$$\Phi_i(v) = \sum_{i\in K} \gamma(k)[v(K) - v(K\setminus\{i\}]], i\in N, k = |K|, \gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Поиск решения кооперативных дифференциальных игр сводится к задачам оптимального управления. Основными методами исследования таких задач являются принцип максимума Понтрягина и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [8]. В данной работе используется второй подход.

Задача управления предполагает наличие некоторого объекта управления, поведение (развитие) которого описывается дифференциальными или разностными уравнениями. Для определенности будем полагать, что система начинает действовать в момент времени $t = 0$. Запишем закон развития управляемой системы в случае непрерывного времени:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0. \qquad (10)$$

Здесь $x = (x^1,...,x^n) \in R^n$ – вектор фазовых переменных, характеризующих управляемую систему, $u = (u^1,...,u^m) \in U$ – вектор управления. В данной работе рассматриваются задачи оптимального управления для бесконечного горизонта планирования $t \in [0;\infty)$.

Следующий элемент задачи управления – его цель. Обычно она состоит в максимизации (минимизации) некоторого функционала, отражающего эффективность управления. Будем рассматривать функционал с бесконечным горизонтом планирования (задача экономического роста) [8]:

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t))dt \to \max_{u\in U}. \qquad (11)$$

Для задачи (10), (11) уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана принимает вид:

$$\rho V(x)=\max_{u\in U}[V_x f(x(t),u(t))+g(x(t),u(t))]. \qquad (12)$$

Доказано, что если существует единственное непрерывное дифференцируемое решение $V^*(x)$ и $u^*(t)$ - допустимое управление уравнения (12), то $u^*(t)$-оптимальное управление задачи (11), (12) [8].

3. Характеристическая функция по Дж. фон Нейману и О.Моргенштерну

Для (1)-(5) определим характеристическую функцию по Нейману-Моргенштерну и вычислим вектор Шепли. В этом случае $v(K)$-выигрыш коалиции K в антагонистической игре против дополнительной коалиции $N\setminus K$, данная характеристическая функция является супераддитивной. Получим $\{0\}\notin K \Rightarrow \forall t\ s_i(t)=0, i\in K$, так как руководитель обеспечит доходом от внедрения инноваций сотрудников только из своей коалиции. Это означает, что $u_i(t)=0, i\in K$. Учитывая всё вышесказанное, определим доход коалиции, состоящей только из одного подчиненного:

$$v(\{i\})=\int_0^\infty e^{-\rho t}dt=\frac{1}{\rho};\quad v(K)=\frac{k}{\rho}, K\subseteq M.$$

Если коалиция состоит только из руководителя, то имеем $u_i(t)=0, i\in M$. Тогда выигрыш от внедрения инноваций изменяется согласно уравнению: $\dot{x}=-x(t)\Rightarrow x(t)=x_0e^{-t}$. Подстановка дает следующий выигрыш руководителя:

$$v(\{0\})=\int_0^\infty e^{-\rho t}[n+x_0e^{-t}]dt=\frac{n(1+\rho)+x_0\rho}{\rho(1+\rho)}.$$

В общем случае, когда некоторые сотрудники кооперируются с руководителем:

$$v(\{0\}\cup K)=\max_{0\le u_i\le 1, i\in\{0\}\cup K}\{J_0+\sum_{i\in K}J_i\}=\max_{0\le u_i\le 1, i\in\{0\}\cup K}\{\int_0^\infty e^{-\rho t}[\sum_{j\in M}\sqrt{1-u_j(t)}+x(t)]dt+$$

$$+\sum_{i\in K}\int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_i(t)}+s_i(t)x(t)]dt\}=\max_{0\le u_i\le 1, i\in\{0\}\cup K}\{\int_0^\infty e^{-\rho t}[\sum_{i\in K}\sqrt{1-u_i(t)}+\sum_{j\in M\setminus K}\sqrt{1-u_j(t)}+x(t)]dt+$$

$$+\sum_{i\in K}\int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_i(t)}+s_i(t)x(t)]dt\}=\frac{n-k}{\rho}+2\max_{0\le u_i\le 1, i\in\{0\}\cup K}\int_0^\infty e^{-\rho t}[x(t)+\sum_{i\in K}\sqrt{1-u_i(t)}]dt$$

$$\dot{x}=-x(t)+\sum_{i\in K}u_i(t),\ x(0)=x_0.$$

При условии объединения всех сотрудников компании и руководителя:

$v(N) = 2 \max\limits_{0 \le u_i \le 1, i \in M} \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[x(t) + \sum\limits_{i \in M} \sqrt{1-u_i(t)}]dt$, динамика пользы от инноваций описывается уравнением (5).

Для простоты вычислений и без ограничения общности предположим, что компания состоит из трех человек: руководителя и двух сотрудников ($N = \{0,1,2\}, (n=2)$). Вычислим вектор Шепли по формуле:

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in K} \gamma(k)[v(K) - v(K \setminus \{i\}]], i \in N, \gamma = (1/3, 1/6, 1/3), k = |K|.$$

Имеем:

$$\Phi_0(v) = \frac{1}{3}v(\{0\}) + \frac{1}{6}[v(\{0,1\} - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{0,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3}[v(N) - v(\{1,2\})] =$$

$$= \frac{2(1+\rho) + x_0\rho}{3\rho(1+\rho)} + \frac{1}{3}\max_{u_1} \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + x(t)]dt +$$

$$\frac{1}{3}\max_{u_2} \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_2(t)} + x(t)]dt +$$

$$+\frac{2}{3}[\max_{u_1,u_2} \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + \sqrt{1-u_2(t)} + x(t)]dt - \frac{1}{\rho}].$$

Для вычисления второго и третьего слагаемого получаем задачи оптимального управления:

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u(t)} + x(t)]dt \to \max$$

$$0 \le u(t) \le 1; \quad \dot{x} = -x(t) + u(t), x(0) = x_0.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана имеет вид:

$$-\rho V = \max_{0 \le u \le 1}[V_x(u-x) + \sqrt{1-u} + x]. \qquad (13)$$

Для нахождения оптимального управления вычислим производную правой части уравнения (13) по переменной u, получим: $u^* = 1 - \frac{1}{4V_x^2}$.

Замена дает: $-\rho V = V_x + \frac{1}{4V_x} + (1-V_x)x$.

Предполагая, что функция Беллмана линейная: $V(x) = Ax + B, V_x = A$,

получим:

$$A = \frac{1}{1-\rho}, \quad B = -\frac{4+(1-\rho)^2}{4\rho(1-\rho)}, \quad u^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4} = C(\rho)$$

В этом случае динамика описывается уравнением:

$$x^*(t) = C(\rho) - [C(\rho) - x_0]e^{-t},$$

и выигрыш равен:

$$J^* = \int_0^\infty e^{-\rho t}\{\frac{1-\rho}{2} + C(\rho) - [C(\rho) - x_0]e^{-t}\}dt =$$

$$= \frac{1-\rho}{2\rho} + \frac{C(\rho)}{\rho} - \frac{C(\rho) - x_0}{1+\rho} = \frac{5 + 2(1+2x_0)\rho - 3\rho^2}{4\rho(1+\rho)}.$$

На границах отрезка [0,1] имеем:

если $u = 0$, то $x^{(0)}(t) = x_0 e^{-t}$, $\quad J^{(0)} = \dfrac{1 + (1 + x_0)\rho}{\rho(1+\rho)}$;

если $u = 1$, то $x^{(1)}(t) = 1 - (1 - x_0)e^{-t}$, $\quad J^{(1)} = \dfrac{1 + x_0\rho}{\rho(1+\rho)}$.

Сравнение J^*, J^0, J^1, дало следующие результаты

$$J^{\max} = \begin{cases} J^*, 0 < \rho < 1/3, \\ J^{(0)}, 1/3 < \rho < 1. \end{cases}$$

Вычисление четвертого слагаемого также сводится к задаче оптимального управления:

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1 - u_1(t)} + \sqrt{1 - u_2(t)} + x(t)]dt \to \max$$

$$0 \le u_1(t) \le 1; \quad 0 \le u_2(t) \le 1; \quad \dot{x} = -x(t) + u_1(t) + u_2(t), x(0) = x_0$$

.

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана примет вид:

$$-\rho V = \max_{0 \le u_1 \le 1, 0 \le u_2 \le 1}[V_x(u_1 + u_2 - x) + \sqrt{1-u_1} + \sqrt{1-u_2} + x] \tag{14}$$

Для нахождения оптимального управления вычислим производную правой части уравнения (14) по переменным u_1, u_2, получим:

$$u_1^* = u_2^* = u^* = 1 - \frac{1}{4V_x^2}.$$

Предположив, что функция Беллмана линейная: $V(x) = Ax + B$, имеем: $u^* = C(\rho), x^* = 2C(\rho) - [2C(\rho) - x_0]e^{-t}$.

Сравнив выигрыш на границах отрезка [0,1] с J^*, получим:

$$J^{\max} = \begin{cases} J^*, 0 < \rho < 1/3, \\ J^{(0)}, 1/3 < \rho < 1, \end{cases}$$

где $J^* = \dfrac{5 + 2(1 + x_0)\rho - 3\rho^2}{2\rho(1+\rho)}$, $J^{(0)} = \dfrac{2 + (2 + x_0)\rho}{\rho(1+\rho)}$.

Закончив расчеты и собрав результаты, получаем следующие компоненты вектора Шепли:

для $0<\rho<1/3$

$$\Phi_0=\frac{15+2(3+5x_0)\rho-9\rho^2}{6\rho(1+\rho)},\ \Phi_1=\Phi_2=\frac{15+2(3+x_0)\rho-9\rho^2}{12\rho(1+\rho)}$$

;

для $1/3<\rho<1$

$$\Phi_0=\frac{6+2(6+5x_0)\rho}{3\rho(1+\rho)},\ \Phi_1=\Phi_2=\frac{6+(6+x_0)\rho}{6\rho(1+\rho)}.$$

4. Характеристическая функция по Л.А. Петросяну и Ж. Заккуру

Теперь определим для игры (1)-(5)характеристическую функцию по Петросяну-Заккуру (7) и вычислим вектор Шепли. Аналогично, для простоты вычислений предполагаем, что компания состоит из трех человек: руководителя и двух подчиненных.

В данном способе построения кооперативной игры сначала ищутся равновесия по Нэшу.

Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш:

$$\begin{cases} J_0=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)}+\sqrt{1-u_2(t)}+x(t)]dt\to\max\limits_{s_1(t),s_2(t)} \\ J_1=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)}+s_1(t)x(t)]dt\to\max\limits_{u_1(t)} \\ J_2=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_2(t)}+s_2(t)x(t)]dt\to\max\limits_{u_2(t)} \end{cases}$$

(15)

$$\dot{x}=-x+u_1(t)+u_2(t),x(0)=x_0, \qquad (16)$$

где динамика выигрыша от внедрения инноваций описывается уравнением (16).

Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений (15). Обозначим функцию Беллмана для этой задачи через $V=V(x)$. Выпишем уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для подчиненных:

$$\begin{cases} -\rho V=\max\limits_{0\le u_1\le 1}[V_x(u_1+u_2-x)+\sqrt{1-u_1}+s_1x] \\ -\rho V=\max\limits_{0\le u_2\le 1}[V_x(u_1+u_2-x)+\sqrt{1-u_2}+s_2x] \end{cases}$$

(17)

Находим оптимальные управления подчиненных, для этого дифференцируем правые части системы (17) по переменным u_1,u_2 соответственно:

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-u}}+V_x=0,$$

$$u^*(t)=1-\frac{1}{4V_x^2}.$$

Сделав предположение о том, что функция Беллмана линейная: $V = Ax + B, V_x = A,$ получим:

$$-\rho(Ax+B) = \frac{1}{2V_x} + s(t)x + V_x(-x+u), A = \frac{s(t)}{1-\rho}, u^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4s^2(t)}.$$

Получили следующие оптимальные управления сотрудников:

$$u_1^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)}, u_2^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)}. \qquad (18)$$

Уравнение динамики имеет вид:

$$\dot{x} = -x + u_1(t) + u_2(t) = -x + 2 - \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)} - \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)}, x(0) = x_0,$$

откуда

$$x(t) = 2 - \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)} - \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)} + e^{-t}(x_0 - 2 + \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)} + \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)}), \qquad (19)$$

Подставляя (18),(19) в первое уравнение системы (15), получим:

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + \sqrt{1-u_2(t)} + x(t)]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho t}[\frac{1-\rho}{2s_1^2(t)} + \frac{1-\rho}{2s_2^2(t)} + 2 - \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)} - \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)} + e^{-t}(x_0 - 2 + \frac{(1-\rho)^2}{4s_1^2(t)} + \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2(t)}]dt \to \max_{s_1(t), s_2(t)}$$

Поиск оптимального управления руководителя программно реализован в математическом пакете Maple, получены следующие результаты:

$$s_1^*(t) = s_2^*(t) = \frac{1}{2}.$$

Стратегии игроков в равновесии по Нэшу равны:

$$s_1^{NE}(t) = s_2^{NE}(t) = \frac{1}{2},$$

$$u_1^{NE} = 1 - (1-\rho)^2, u_2^{NE} = 1 - (1-\rho)^2.$$

Следующим шагом выступает поиск характеристических функций по способу Петросяна-Заккура: $v(K) = \sup_{u_K} \inf_{u_{N\setminus K}} \sum_{i \in K} J_i(u_K, u_{N\setminus K}),$ где игроки из коалиции K максимизируют свой суммарный выигрыш, а остальные используют равновесные по Нэшу стратегии.

Вычисляем выигрыш руководителя:

$$v(\{0\}) = \sup_{u_0, u_1^{NE}, u_2^{NE}} J_0 = \sup_{u_0, u_1^{NE}, u_2^{NE}} \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + \sqrt{1-u_2(t)} + x(t)]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho t}[(1-\rho) + (1-\rho) + x(t)]dt,$$

где уравнение динамики: $x^*(t) = 2 - 2(1-\rho)^2 + e^{-t}(x_0 - 2 + 2(1-\rho)^2)$, тогда выигрыш руководителя равен:

$$v(\{0\}) = \frac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{\rho(\rho+1)}; \qquad (20)$$

Выигрыш коалиции, состоящей только из первого сотрудника, рассчитывается по формуле:

$$v(\{1\}) = \sup_{u_0^{NE}, u_2, u_2^{NE}} J_1 = \sup_{u_0^{NE}, u_2, u_2^{NE}} \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + \frac{x(t)}{2}]dt,$$

что сводится к задаче оптимального управления:

$$-\rho V = \sqrt{1-u} + \frac{x}{2} + V_x(-x+u),$$

Предполагая, что функция Беллмана линейная: $V(x) = Ax + B, V_x = A$, получим:

$$A = \frac{1}{2(1-\rho)}, u^* = 1 - (1-\rho)^2,$$

$$x^*(t) = 2 - 2(1-\rho)^2 + e^{-t}(x_0 - 2 + 2(1-\rho)^2),$$

$$v(\{1\}) = \frac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{2\rho(\rho+1)}. \qquad (21)$$

Так как сотрудники в рассматриваемой фирме симметричны, то $v(\{2\}) = v(\{1\})$.

Теперь найдем характеристическую функцию для коалиции руководителя и сотрудника:

$$v(\{0,1\}) = \sup_{u_0, u_1, u_2^{NE}} (J_0 + J_1) = \sup_{u_0, u_1, u_2^{NE}} \int_0^\infty e^{-\rho t}[\sqrt{1-u_1(t)} + \frac{1-\rho}{2s_2(t)} + x(t) + \sqrt{1-u_1(t)} + s_1(t)x(t)]dt =$$

$$= \sup_{u_0, u_1, u_2^{NE}} \int_0^\infty e^{-\rho t}[2\sqrt{1-u_1(t)} + x(t)(1+s_1(t)) + \frac{1-\rho}{2s_2(t)}]dt,$$

её поиск сводится к задаче оптимального управления:

$$-\rho V = 2\sqrt{1-u_1} + x(t)(1+s_1(t)) + \frac{1-\rho}{2s_2(t)} + V_x(-x+u_1).$$

Функцию Беллмана ищем в виде: $V(x) = Ax + B, V_x = A$,тогда:

$$A = \frac{1+s_1}{1-\rho}, u_1^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{(1+s_1)^2}.$$

$$x^*(t) = 2 - \frac{(1-\rho)^2}{(1+s_1(t))^2} - \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2} + e^{-t}(x_0 - 2 + \frac{(1-\rho)^2}{(1+s_1(t))^2} + \frac{(1-\rho)^2}{4s_2^2}).$$

Оптимальное управление руководителя найдено с помощью программного комплекса:

$$s_1^*(t) = s_2^*(t) = \frac{1}{2},$$

$$v(\{0,1\}) = \frac{-23\rho^2 + 26\rho + 9x_0\rho + 15}{6\rho(1+\rho)}. \qquad (22)$$

Так как сотрудники симметричны, то $v(\{0,1\}) = v(\{0,2\})$.

Поиск выигрыша коалиции из двух подчиненных сводится к решению уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое рассмотрено в пункте 3, поэтому

$$v(\{1,2\}) = \frac{-3\rho^2 + 2\rho + 2x_0\rho + 5}{2\rho(1+\rho)}. \qquad (23)$$

Рассчитаем выигрыш максимальной коалиции по формуле:

$$v(N) = \sup_{u_0,u_1,u_2} (J_0 + J_1 + J_2) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[2\sqrt{1-u_1(t)} + 2\sqrt{1-u_2(t)} + 2x(t)]dt,$$

сводим эту задачу к решению уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$-\rho V = 2\sqrt{1-u_1} + 2\sqrt{1-u_2} + 2x + V_x(-x + u_1 + u_2).$$

Предполагая, что $V(x) = Ax + B$, $V_x = A$, получим:

$$A = \frac{2}{1-\rho}, u_1^* = u_2^* = u^* = 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4}$$

$$x^*(t) = 2 - \frac{(1-\rho)^2}{2} + e^{-t}(x_0 - 2 + \frac{(1-\rho)^2}{2})$$

$$v(N) = \frac{-3\rho^2 + 2\rho + 2x_0\rho + 5}{p(1+\rho)} \qquad (24)$$

Вычислим вектор Шепли по формуле

$$\Phi_i(v) = \sum_{i\in K} \gamma(k)[v(K) - v(K\setminus\{i\}]], i \in N, \gamma = (1/3, 1/6, 1/3), k = |K|$$

, используя найденные выигрыши (20)-(24):

$$\Phi_0(v) = \frac{1}{3}v(\{0\}) + \frac{1}{6}[v(\{0,1\} - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{0,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3}[v(N) - v(\{1,2\})] =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{\rho(1+\rho)} + \frac{1}{6}[\frac{-23\rho^2 + 26\rho + 9x_0\rho + 15}{6\rho(1+\rho)} - \frac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{2\rho(1+\rho)}] +$$

$$+ \frac{1}{6}[\frac{-23\rho^2 + 26\rho + 9x_0\rho + 15}{6\rho(1+\rho)} - \frac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{2\rho(1+\rho)}] + \frac{1}{3}[\frac{-3\rho^2 + 2\rho + 2x_0\rho + 5}{\rho(1+\rho)} -$$

$$- \frac{-3\rho^2 + 2\rho + 2x_0\rho + 5}{2\rho(1+\rho)}] = \frac{-44\rho^2 + 44\rho + 18x_0\rho + 36}{18\rho(1+\rho)}$$

$$\Phi_1(v)=\frac{1}{3}v(\{1\})+\frac{1}{6}[v(\{0{,}1\})-v(\{0\})]+\frac{1}{6}[v(\{1{,}2\})-v(\{2\})]+\frac{1}{3}[v(N)-v(\{0{,}2\})]=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{-4\rho^2+4\rho+x_0\rho+2}{2\rho(1+\rho)}+\frac{1}{6}[\frac{-23\rho^2+26\rho+9x_0\rho+15}{6\rho(1+\rho)}-\frac{-4\rho^2+4\rho+x_0\rho+2}{\rho(1+\rho)}]+$$
$$+\frac{1}{6}[\frac{-3\rho^2+2\rho+2x_0\rho+5}{2\rho(1+\rho)}-\frac{-4\rho^2+4\rho+x_0\rho+2}{2\rho(1+\rho)}]+\frac{1}{3}[\frac{-3\rho^2+2\rho+2x_0\rho+5}{\rho(1+\rho)}-$$
$$-\frac{-23\rho^2+26\rho+9x_0\rho+15}{6\rho(1+\rho)}]=\frac{-5\rho^2-4\rho+9x_0\rho+27}{18\rho(1+\rho)}.$$

Так как сотрудники симметричны, то $\Phi_1(v)=\Phi_2(v)$.

5. Характеристическая функция по Л.А. Петросяну и Е.В. Громовой

Наконец, определим для игры (1)-(5) характеристическую функцию по Петросяну-Громовой (8) и вычислим вектор Шепли. Для простоты вычислений вновь предполагаем, что компания состоит из трех человек: руководителя и двух сотрудников.

Первым этапом построения кооперативной игры служит поиск Парето-опимальных кооперативных решений. Этот поиск сводится к задаче оптимального управления:

$$J^{PO}=\sum_{i-1}^{3}J_i\to\max_{u_0,u_1,u_2} \qquad (25)$$

Поиск Парето-оптимальных решений был программно реализован в математическом пакете Maple, получены следующие результаты:

$$s_1^{PO}(t)=s_2^{PO}(t)=\frac{1}{2},u_1^{PO}(t)=u_2^{PO}(t)=1-\frac{(1-\rho)^2}{4}.$$

Далее нужно вычислить характеристическую функцию по способу Петросяна-Громовой: $v(K)=\inf\limits_{u_{N\setminus K}}\sum\limits_{i\in K}J_i(u_K^{PO},u_{N\setminus K})$, где участники коалиции K используют Парето-оптимальные стратегии, а участники дополнительной коалиции $N\setminus K$ играют строго против них.

Для поиска всех значений характеристической функции по способу Петросяна-Громовой был разработан программный комплекс на основе метода имитационного моделирования стратегий в математическом пакете Maple. Получены следующие результаты:

- для коалиции, состоящей только из руководителя:
  $u_1^*(t)=u_2^*(t)=1,x^*(t)=2+e^{-t}(x_0-2),$
  $$v(\{0\})=\frac{\rho x_0+2}{\rho(\rho+1)}, \qquad (26)$$
- для коалиции, состоящей только из одного подчиненного:

$$s^*(t)=0, u_2^*(t)=0, x^*(t)=1-\frac{(1-\rho)^2}{4}+e^{-t}(x_0-1+\frac{(1-\rho)^2}{4}),$$

$$v(\{1\})=\frac{(1-\rho)}{2\rho}, \qquad (27)$$

так как сотрудники симметричны, то $v(\{1\})=v(\{2\})$,

- для коалиции, состоящей только из подчиненных:

$$s_1^*(t)=s_2^*(t)=\frac{1}{2}, x^*(t)=2-\frac{(1-\rho)^2}{2}+e^{-t}(x_0-2+\frac{(1-\rho)^2}{2}),$$

$$v(\{1,2\})=\frac{-3\rho^2+2\rho+2x_0\rho+5}{2\rho(\rho+1)}, \qquad (28)$$

- для коалиции, состоящей из одного подчиненного и руководителя:

$$u_2^*(t)=\begin{cases}0, 0<\rho<\frac{1}{2},\\ 1, \frac{1}{2}<\rho<1;\end{cases},$$

$$x^*(t)=\begin{cases}1-\frac{(1-\rho)^2}{4}+e^{-t}(x_0-1+\frac{(1-\rho)^2}{4}), 0<\rho<\frac{1}{2},\\ 2-\frac{(1-\rho)^2}{4}+e^{-t}(x_0-2+\frac{(1-\rho)^2}{4}), \frac{1}{2}<\rho<1.\end{cases}$$

$$v(\{0,1\})=\begin{cases}\frac{-11\rho^2+14\rho+12x_0\rho+25}{8\rho(\rho+1)}, 0<\rho<\frac{1}{2};\\ \frac{-11\rho^2+6\rho+12x_0\rho+29}{8\rho(\rho+1)}, \frac{1}{2}<\rho<1,\end{cases}$$

(29)

учитывая симметричность сотрудников, получим, что $v(\{0,1\})=v(\{0,2\})$

- при полной кооперации компании все сотрудники используют Парето-оптимальные стратегии (9), тогда динамика пользы от инноваций описывается уравнением

$$x^*(t)=2-\frac{(1-\rho)^2}{2}+e^{-t}(x_0-2+\frac{(1-\rho)^2}{2}),$$ и

выигрыш равен:

$$v(N)=\frac{-3\rho^2+2\rho+2x_0\rho+5}{2\rho(\rho+1)}.$$

(30)

Вычислим вектор Шепли по приведенной ранее формуле. Собрав результаты (26)-(30), получим:

для $0 < \rho < 1/2$

$$\Phi_0 = \frac{-19\rho^2 + 22\rho + 28x_0\rho + 57}{24\rho(1+\rho)},\ \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{-53\rho^2 + 26\rho + 20x_0\rho + 63}{48\rho(1+\rho)}$$

;

для $1/2 < \rho < 1$

$$\Phi_0 = \frac{-19\rho^2 + 14\rho + 28x_0\rho + 61}{24\rho(1+\rho)},\ \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{-53\rho^2 + 34\rho + 20x_0\rho + 59}{48\rho(1+\rho)}$$

.

6. Сравнительный анализ и оценка эффективности моделей

В предыдущих трех пунктах описаны три кооперативные дифференциально-игровые модели инновационного развития компании, и для каждой найден вектор Шепли. Выполним сравнительный анализ моделей, чтобы получить представление о сильных и слабых сторонах каждой. Для наглядности по-прежнему предполагаем, что компания состоит из трёх человек. При реализации оценки эффективности моделей был разработан программный комплекс в математическом пакете Maple.

Начнем с анализа способа Неймана-Моргенштерна. Выигрыши игроков равны: $v(\{0\}) = \dfrac{n(1+\rho) + x_0\rho}{\rho(1+\rho)}$, $v(\{1\}) = v(\{2\}) = \dfrac{1}{\rho}$; При полной кооперации, когда выигрыш был разделен между участниками компании по принципу Шепли, доход для каждого составил:

для $0 < \rho < 1/3$

$$\Phi_0 = \frac{15 + 2(3 + 5x_0)\rho - 9\rho^2}{6\rho(1+\rho)},\ \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{15 + 2(3 + x_0)\rho - 9\rho^2}{12\rho(1+\rho)}$$

;

для $1/3 < \rho < 1$

$$\Phi_0 = \frac{6 + 2(6 + 5x_0)\rho}{3\rho(1+\rho)},\ \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{6 + (6 + x_0)\rho}{6\rho(1+\rho)}.$$

Приведем графики функций выигрыша всех трех игроков и графики функций дележа в кооперативном случае при различном начальном выигрыше от инноваций в базовом году при $\rho = 0.1$ (Рис.1):

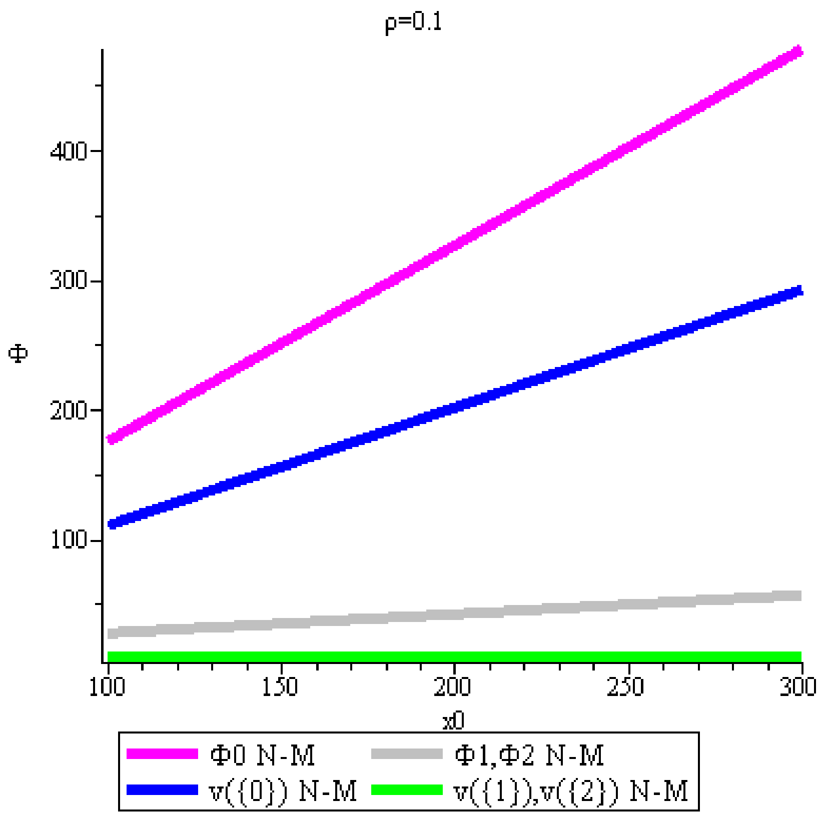

Рис.1 Прибыль игроков в случае конкуренции и кооперации по способу Неймана-Моргенштерна

Здесь прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации, а $v(\{0\}), v(\{1\}), v(\{2\})$ в случае конкуренции.

Как видим, прибыль руководителя и сотрудников больше в случае кооперации. Анализируя полученные результаты, приходим к выводу: при данном способе построения характеристической функции выгодно объединяться.

Далее проанализируем дележ по принципу Шепли для первой модели. Рассмотрим графики распределения доходов сотрудников и руководителя компании при различных начальных выигрышах от инноваций в базовом году и различных коэффициентах дисконтирования ($\rho = 0.1$, $\rho = 0.4$, $\rho = 0.8$):

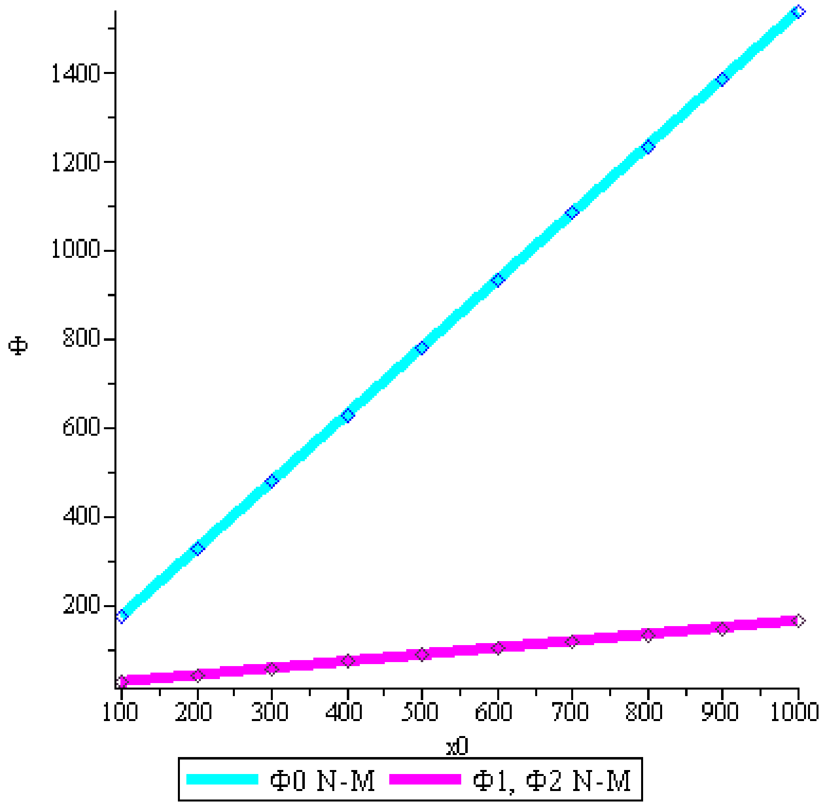

Рис.2 Распределение дохода при $\rho = 0.1$

На Рис. 2 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации. По графику видно, что при увеличении начального выигрыша от инноваций в базовом году растет доход всей компании. Также заметно, что чем больше доход компании, тем большую часть получит руководитель. Например, при начальном выигрыше в 100 у.е. и $\rho = 0.1$, прибыль компании составит 229 у.е., из них 175 у.е. достанется руководителю, что составляет примерно 76,5% от общего дохода. А при начальном выигрыше в 1000 у.е. доход составит 1865 у.е., и руководителю отойдет 1538 у.е., что уже составляет 82,5% от всей прибыли.

На Рис.3, Рис. 4 рассмотрим графики распределения доходов сотрудников и руководителя компании при различных начальных выигрышах от инноваций в базовом году и различных коэффициентах дисконтирования:

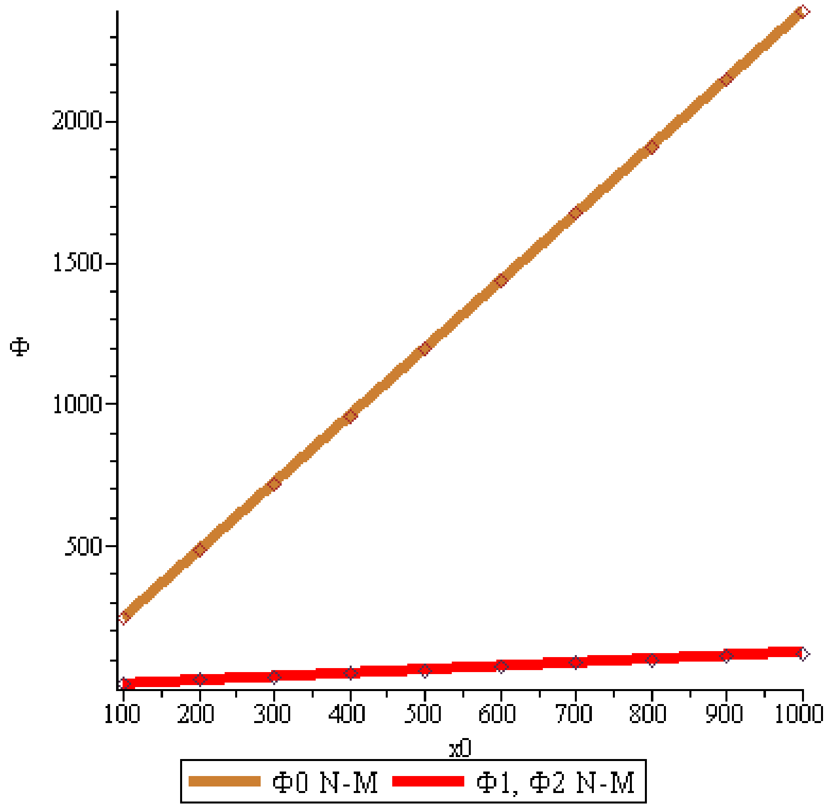

Рис.3 Распределение дохода при $\rho = 0.4$

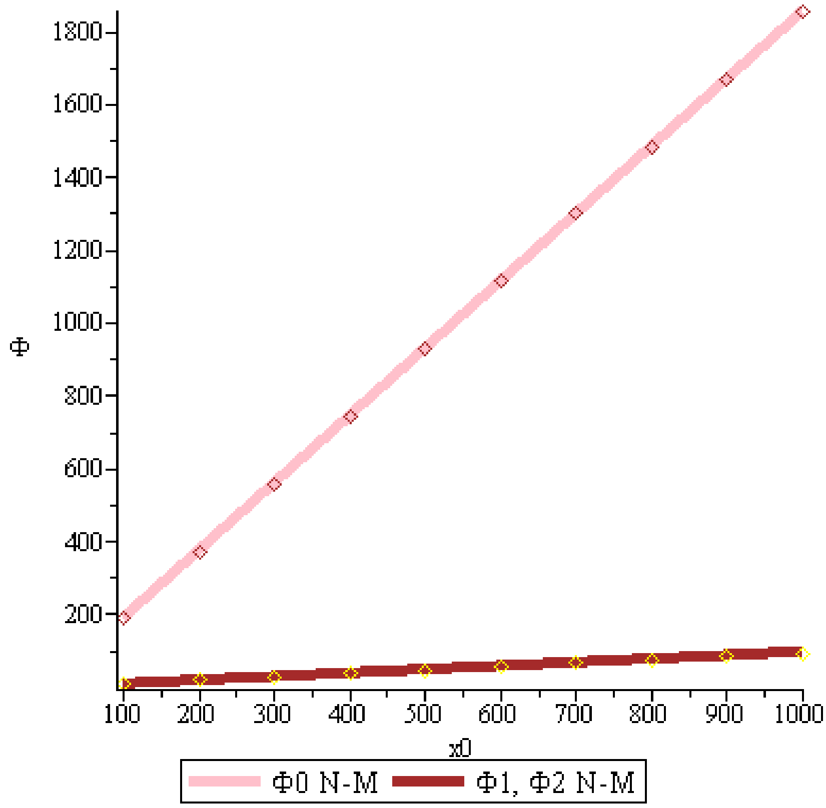

Рис. 4 Распределение дохода при $\rho = 0.8$

На Рис. 3, Рис. 4 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации. С увеличением начального выигрыша от внедрения новшеств наблюдается рост дохода компании, и аналогично предыдущему случаю, когда $\rho = 0.1$, увеличивается разрыв между доходом руководителя и подчиненного.

Численное моделирование показало, что при коэффициенте дисконтирования $\rho = 0.1$ в среднем около 80% прибыли от внедрения новшеств получит руководитель, остальные 20% распределятся между сотрудниками. При $\rho = 0.4$ прибыль распределится следующим образом: 90% от общей прибыли достается руководителю, а подчиненные получат по 5% , а при $\rho = 0.8$ руководитель получит около 95% всего дохода, остальные 5% достанутся подчиненным.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что при данном способе построения модели инновационного развития компании почти весь доход от внедрения новшеств получит руководитель. Данный способ применим на практике в случае, когда сотрудники сильно дорожат своим местом работы (например в период циклической безработицы), так как данная модель почти не мотивирует подчиненных компании и может вызвать противодействие у значительной её части.

Далее проанализируем способ Петросяна-Заккура. Прибыли игроков равны: $v(\{0\}) = \dfrac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{\rho(\rho+1)}$;

$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \dfrac{-4\rho^2 + 4\rho + x_0\rho + 2}{2\rho(\rho+1)}$. При полной кооперации, когда выигрыш делится между участниками компании по принципу Шепли, доход каждого составит:

$$\Phi_0(v) = \frac{-44\rho^2 + 44\rho + 18x_0\rho + 36}{18\rho(1+\rho)},$$

$$\Phi_1(v) = \Phi_2(v) = \frac{-5\rho^2 - 4\rho + 9x_0\rho + 27}{18\rho(1+\rho)}.$$

Рассмотрим графики функций дележа в кооперативном случае и графики функций выигрыша всех трех игроков при различном начальном выигрыше от инноваций в базовом году при $\rho = 0.1$ (Рис.5):

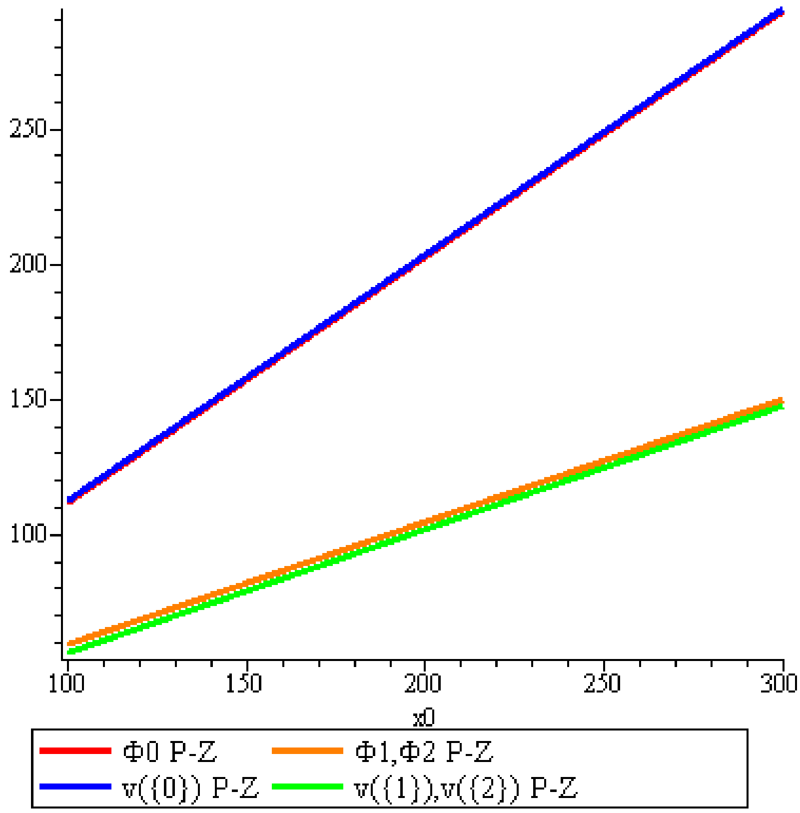

Рис. 5 Прибыль игроков в случае конкуренции и кооперации по способу Петросяна-Заккура

На Рис. 5 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации, прямые $v(\{0\}), v(\{1\}), v(\{2\})$ в случае конкуренции.

Как уже отмечалось ранее, характеристическая функция, построенная по способу Петросяна-Заккура, может быть не супераддитивной, что наглядно видно на графике: доход участника процесса внедрения инноваций, при условии, что участник ни с кем не вступает в сотрудничество, почти совпадает с дележом Шепли, а для руководителя даже превосходит его.

Аналогично проанализируем дележ по принципу Шепли для второй модели. Рассмотрим графики распределения дохода компании между сотрудниками и управляющим при различном начальном выигрыше от инноваций в базовом году, и различных коэффициентах дисконтирования $\rho = 0.1$ (Рис. 6), $\rho = 0.4$ (Рис. 7), $\rho = 0.8$ (Рис. 8):

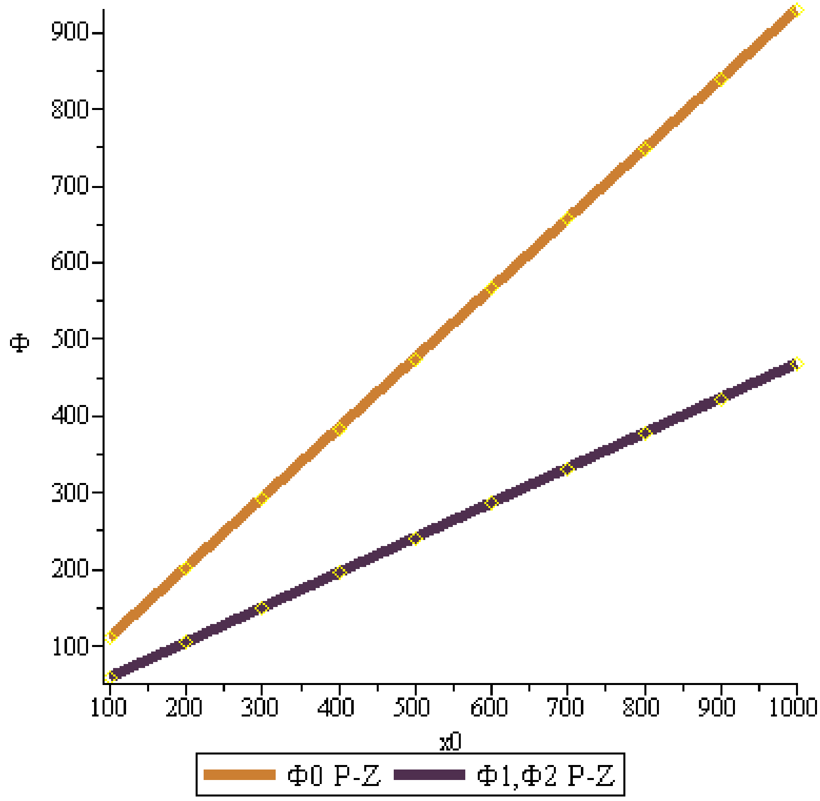

Рис.6 Распределение дохода при $\rho = 0.1$

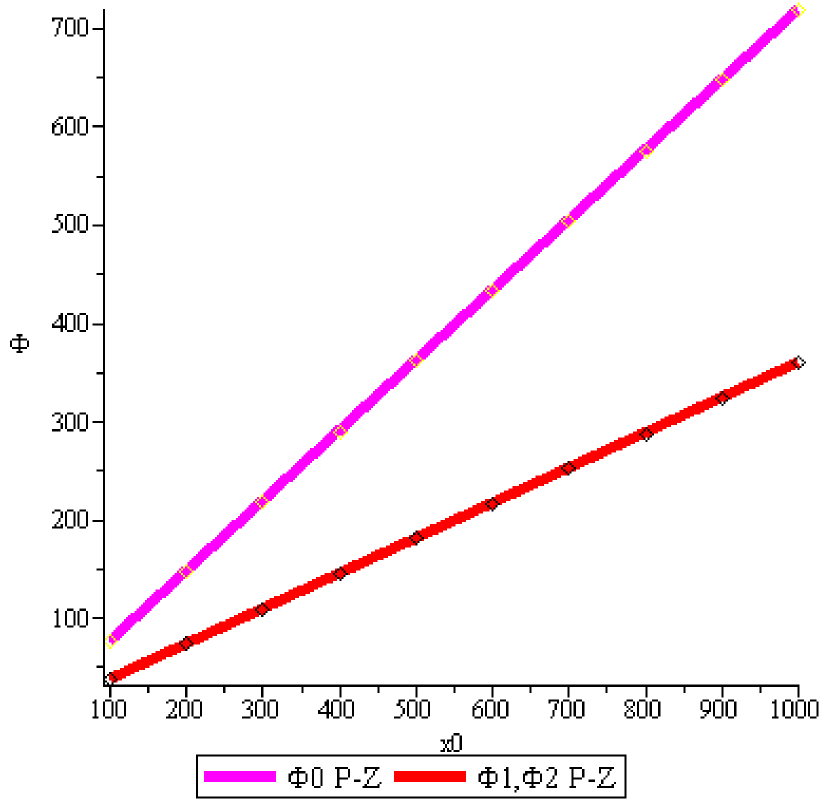

Рис.7 Распределение дохода при $\rho = 0.4$

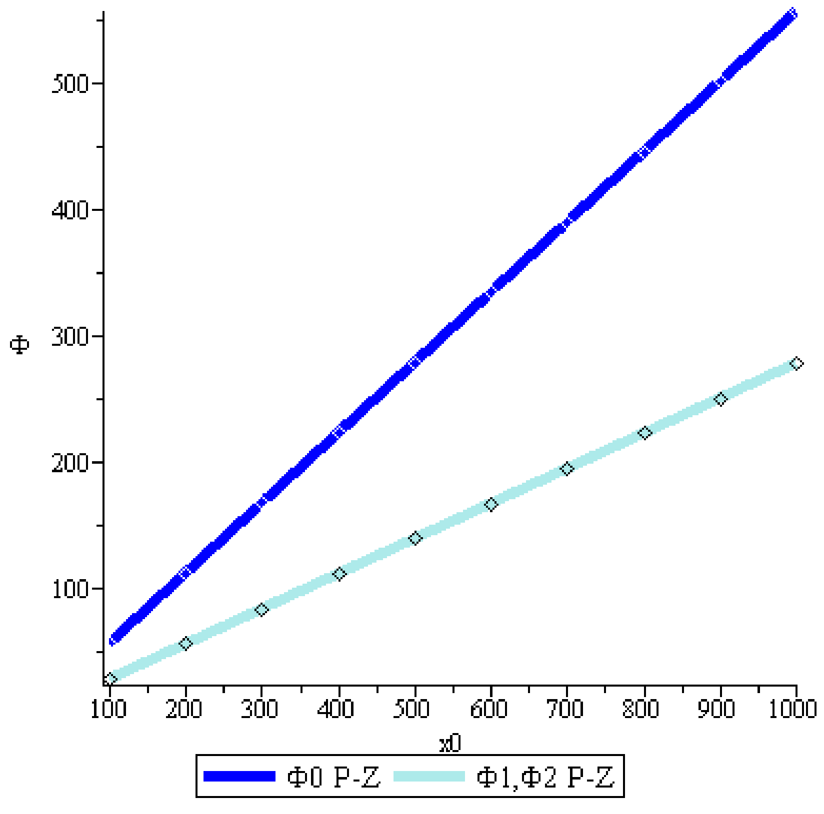

Рис.8 Распределение дохода при $\rho = 0.8$

На Рис. 6, Рис. 7, Рис. 8 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации. Видно, что с увеличением начального выигрыша от внедрения новшеств наблюдается рост дохода компании, и разрыв между доходом руководителя и подчиненного почти не увеличивается.

Вычисления показали, что при коэффициенте дисконтирования $\rho = 0.1$ и $\rho = 0.4$ в среднем 49 % прибыли достанется руководителю компании, а 51% сотрудникам. При $\rho = 0.8$ руководитель получит около 50% всего дохода, остальные 50% достанутся подчиненным.

Анализируя полученные результаты, можно сказать, что при данной модели инновационного развития компании прибыль распределяется между руководителем и сотрудниками почти равномерно.

Проанализируем способ Петросяна-Громовой. Прибыли игроков равны: $v(\{0\}) = \dfrac{\rho x_0 + 2}{\rho(\rho+1)}$ $v(\{1\}) = v(\{2\}) = \dfrac{(1-\rho)}{2\rho}$. При полной кооперации, когда выигрыш делится между участниками компании по принципу Шепли, доход каждого составит:

для $0 < \rho < 1/2$

$$\Phi_0 = \frac{-19\rho^2 + 22\rho + 28x_0\rho + 57}{24\rho(1+\rho)}, \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{-53\rho^2 + 26\rho + 20x_0\rho + 63}{48\rho(1+\rho)}$$

;

для $1/2 < \rho < 1$

$$\Phi_0 = \frac{-19\rho^2 + 14\rho + 28x_0\rho + 61}{24\rho(1+\rho)}, \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{-53\rho^2 + 34\rho + 20x_0\rho + 59}{48\rho(1+\rho)}$$

.

Рассмотрим графики функций выигрыша всех трех игроков в случае конкуренции, и графики функций дележа в кооперативном случае при $\rho = 0.1$ (Рис. 9):

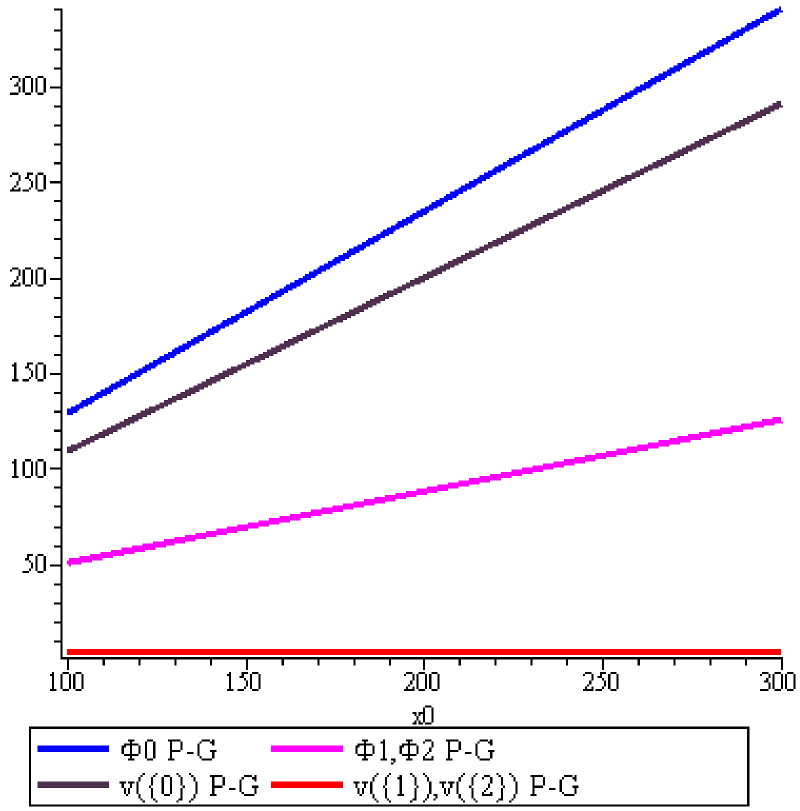

Рис. 9 Прибыль игроков в случае конкуренции и кооперации по способу Петросяна-Громовой

На Рис. 9 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации, а $v(\{0\}), v(\{1\}), v(\{2\})$ в случае конкуренции.

Из Рис. 9 видно, что прибыль руководителя и сотрудников больше в случае кооперации, значит, при данном способе построения характеристической функции необходимо объединиться, чтобы увеличить свой доход.

Проанализируем дележ по принципу Шепли для третьей модели. Рассмотрим графики распределения дохода компании между сотрудниками и управляющим при различном начальном выигрыше от инноваций в базовом году и различных коэффициентах дисконтирования $\rho = 0.1$ (Рис. 10), $\rho = 0.4$ (Рис. 11), $\rho = 0.8$ (Рис. 12):

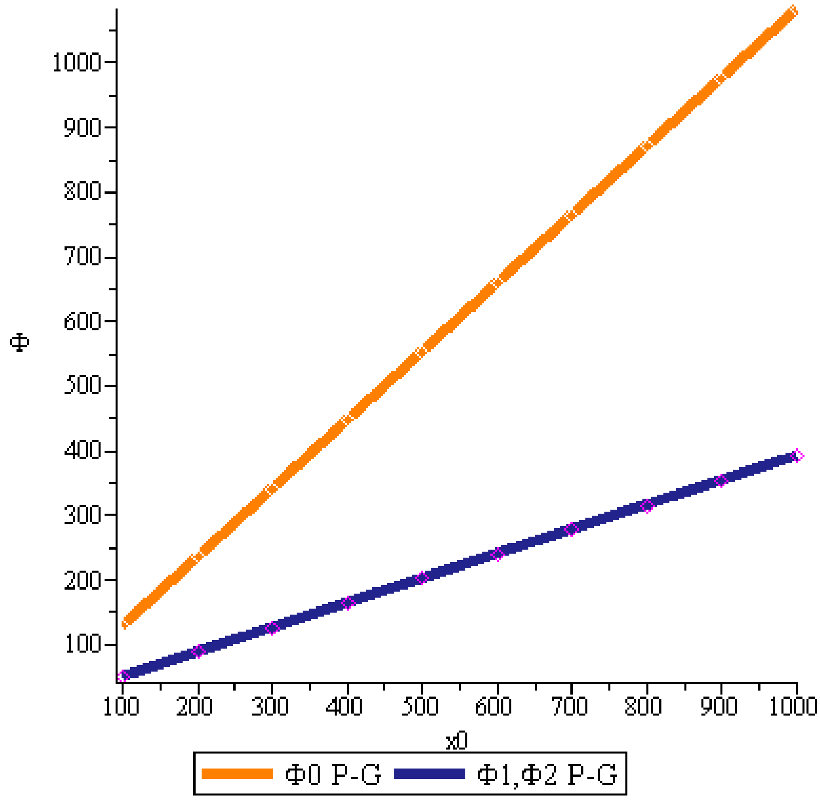

Рис.10 Распределение дохода при $\rho = 0.1$

На Рис. 10, Рис. 11, Рис. 12 прямые Φ_0, Φ_1 и Φ_2 моделируют выигрыши руководителя и сотрудников в случае кооперации. С увеличением начальной пользы от внедрения новшеств наблюдается рост дохода компании, разрыв между доходом руководителя и сотрудника увеличивается незначительно.

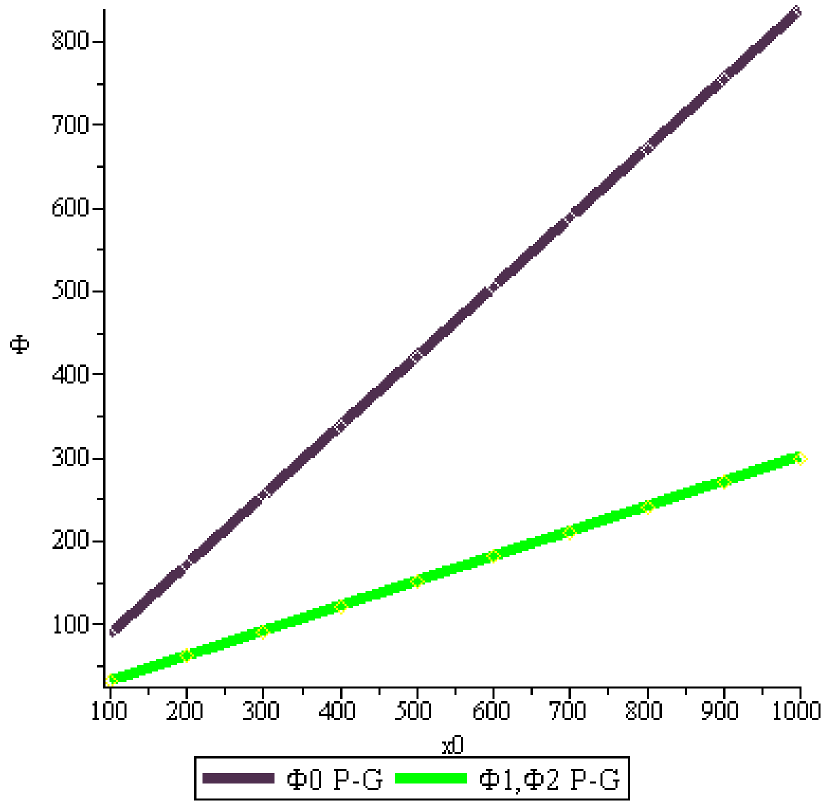

Рис.11 Распределение дохода при $\rho = 0.4$

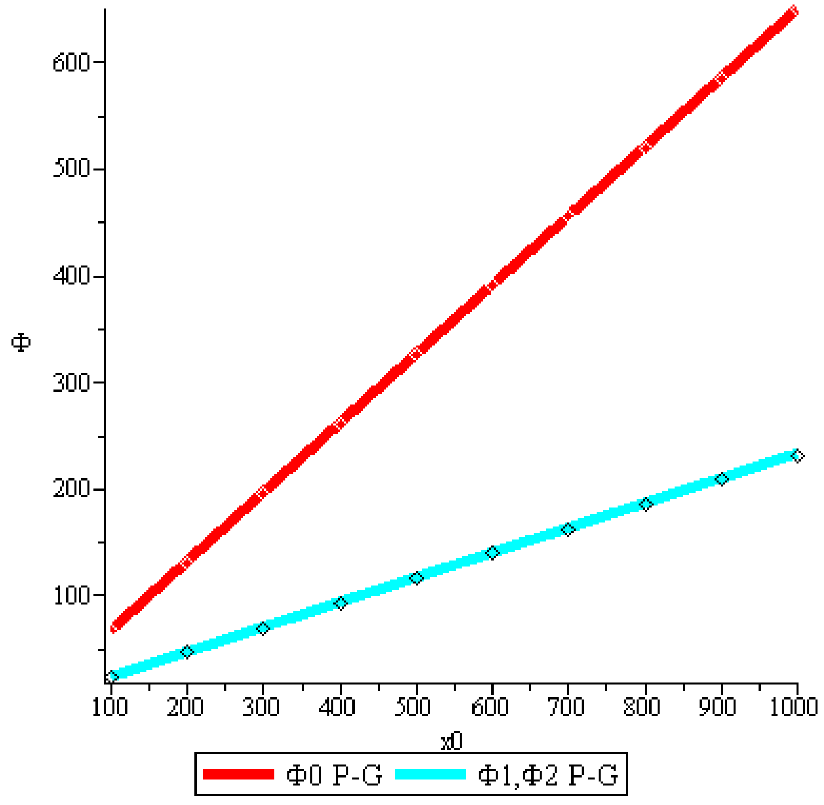

Рис.12 Распределение дохода при $\rho = 0.8$

7. Заключение

В статье изучены три модели инновационного развития компании, формализованные как дифференциальные кооперативные игры с различными характеристическими функциями, выполнен сравнительный анализ представленных моделей. Для реализации моделей и оценки их эффективности был разработан программный комплекс в математическом пакете Maple.

Численные расчеты показали, что при трех выбранных значениях коэффициента дисконтирования доход распределялся почти одинаково: в среднем, около 58% получал руководитель, а сотрудники пополам делили оставшуюся часть.

Таким образом, анализируя полученные результаты, можно сказать, что данная модель инновационного развития компании распределяет прибыль между участниками внедрения новшеств достаточно лояльно: чуть более половины дохода уходит к руководителю, остальная часть равномерно распределяется между подчиненными. Данная модель применима на практике только в той компании, руководитель которой заинтересован в развитии организации, а не только в своем доходе. Наиболее эффективная мотивация сотрудников к продвижению инноваций достигается при распределении дохода согласно характеристической функции Петросяна-Громовой.

Литература

1. Барютин Л.С. Основы инновационного менеджмента. Теория и практика: Под ред. А.К. Казанцева, Л.Э. Миндели. 2-е изд. – 518 с.
2. Громова Е.В., Петросян Л.А. Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения, 2015, 7(4), 19-39.
3. Жданова О. А. Роль инноваций в современной экономике. Экономика, управление, финансы: материалы Междунар. науч. конф. (г. Пермь, июнь 2011 г.). - Пермь. Меркурий. 2011. – 38-40 с.
4. Зенкевич Н.А., Козловская Н.В. Устойчивый вектор Шепли в кооперативной задаче территориального экологического производства // Управление большими системами, 2010, 31.1, 303–330.
5. Новиков Д.А., Иващенко А.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием. - М.: ЛЕНАНД, 2006. - 336 с.
6. Петросян Л.А., Данилов Н.В. Кооперативные дифференциальные игры и приложения. – Томск: Изд-во Томского университета, 1985.
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. - СПб., БХВ-Петербург, 2012. - 432 р.
8. Реттиева А.Н. Кооперация и конкуренция в динамических моделях управления возобновляемыми ресурсами // Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук. - Санкт-Петербург, 2016.
9. Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А., Дьяченко В.К. Модели кооперации в системе социального партнерства // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1555.
10. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии корпорации // Компьютерные исследования и моделирование, 2016, 8(4), 673-684.
11. Gromova E., Plekhanova K. A differential game of pollution control with participation of developed and developing countries // Contributions to Game Theory and Management, 2015, 8, 64–83.
12. Petrosjan L.A., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V.27. No. 3.

COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME THEORETIC MODELS OF INNOVATIONS CONTROL

Mukharbeck Malsagov, Ingush State University, Nazran, Cand. Sc., Associate Professor (mmm1956@bk.ru).
Maria Merkulova, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Master of Science (scarlett1994@mail.ru).
Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: Creation and use of innovations determine a mainstream of the sustainable development of organizations of any type and are a necessary condition of the economic growth. In this paper we consider the problems of incentives of the employees for promotion of innovations by means of their reward allocation. The problems are formalized as cooperative differential games. In building of such games we used three different characteristic function: the classical Neumann-Morgenstern function as well as the functions proposed by Petrosyan and Zaccour, and Petrosyan and Gromova. The first function is always superadditive but is based on a not very realistic hypothesis of antagonism between a coalition and its complement. The second function more adequately used the players' payoffs in a Nash equilibrium but cannot guarantee the superadditivity. The third characteristic function provides a superadditive trade-off by guaranteeing the maximal payoff of a coalition when its members use their Pareto-optimal strategies. In all three cases the Shapley value is used as the optimality principle. Its components are calculated analytically and numerically by means of the Maple package. A comparative analysis of the results is made for a model example with three players for different values of the model parameters. The conclusions about the efficiency of the described methods of reward allocations are made.

Keywords: cooperative differential games, innovations control, Shapley value
УДК 512.8
ББК 22.14+22.19я73