МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ[1]

Федоткин М.А.[2], **Кудрявцев Е.В.**[3]
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

В современной жизни существует значительное число реальных управляемых больших систем, для которых одной из основных задач является создание адекватных вероятностных моделей адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. Такими системами могут быть: 1) экспертные системы диспетчерского контроля и управления в пространстве за последовательностью взлетов и приземлений самолетов; 2) автоматы пространственного управления технологическими и информационными сигналами производственного комплекса компьютерных схем; 3) интеллектуальные системы регулирования транспортных потоков неоднородных машин на магистралях. Эффективное управление потоками неоднородных требований в таких системах является нетривиальной задачей, так как их функционирование описывается сложной вероятностной математической моделью. В работе рассматриваются вопросы построения и анализа математической модели системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. В качестве математического описания таких систем выбирается изменение состояний обслуживающего устройства и динамика длин очередей по конфликтным входным потокам. Векторная случайная последовательность состояний системы обладает свойством марковости. Для данной последовательности проведена классификация состояний по их арифметическим свойствам. Основной результат работы заключается в выводе рекуррентных соотношений для одномерных распределений векторной последовательности состояний системы и для их производящих функций. Как правило, изучение свойств рекуррентных соотношений позволяет находить условия существования стационарного режима в такого рода системах.

Ключевые слова: управляемые системы массового обслуживания, конфликтные потоки, адаптивное управление, стационарное распределение, производящие функции.

---

[1] *Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию №2014/134 и при финансовой поддержке РФФИ* (*проект № 18-413-520005*).

[2] *Михаил Андреевич Федоткин, д.ф.-м.н., профессор* (*fma5@rambler.ru*).

[3] *Евгений Владимирович Кудрявцев, преподаватель* (*evgkudryavcev@gmail.com*).

1. Введение

Данная работа связана с важной проблемой создания адаптивных алгоритмов управления в интеллектуальных транспортных системах, системах связи и системах массового обслуживания неоднородных требований конфликтных потоков. Под конфликтностью понимается невозможность одновременного обслуживания требований из разных потоков. Предлагается класс нециклических управлений конфликтными потоками. Алгоритмы управления потоками из этого класса зависят не только от длин очередей, но и от очередности поступления заявок в систему обслуживания. Построена и изучена математическая модель такой системы E управления потоками. Примером такой системы является система управления транспортными потоками на пересечении магистралей крупных городов. При современной заселенности городов остро встает вопрос транспортных «пробок». Решение этой проблемы возможно с помощью различных способов, в том числе эффективного регулирования транспортными перекрестками с помощью сложных алгоритмов. Для решения проблемы регулирования транспорта необходимо провести построение стохастической модели функционирования процесса управления потоками автомобилей на пересечении магистралей.

В работе будем рассматривать вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ [6]. Здесь Ω есть достоверный исход (событие), а через символ $\omega \in \Omega$ обозначим описание некоторого элементарного исхода системы E или случайного эксперимента. Описание ω определяет как процесс поступления требований в систему, так и процесс управления конфликтными потоками и обслуживания заявок. Множество всех наблюдаемых исходов данного эксперимента E составляет σ-алгебру $\mathfrak{F}$, на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}(A)\colon \mathfrak{F} \to [0, 1]$. Все случайные события, случайные величины и случайные элементы будем рассматривать на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Иногда для сокращения записи не будем явно фиксировать символ ω как аргумент каких-либо случайных величин или случайных элементов.

В системе управления конфликтными потоками можно выделить два самых интенсивных потока. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать два конфликтных потока неоднородных требований. Построение моделей такого рода реальных потоков начинается с математического описания его пространственной и временной характеристик. В работе [7] приведены конкретные примеры потоков из неоднородных требований и предложен механизм их образования. Также в [7] показана возможность аппроксимации потоков такого вида неординарными пуассоновскими потоками. Это дает возможность рассматривать в качестве входных потоков конфликтные неординарные пуассоновские потоки Π_1 и Π_2. При $j = 1, 2$ и $k = 1, 2, \ldots$ в каждый вызывающий момент по потоку Π_j приходит k заявок с вероятностями $P_j(k)$

$$P_j(1) = p_j = (1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1 - \gamma_j))^{-1},$$
$$P_j(2) = \alpha_j(1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1 - \gamma_j))^{-1},$$
$$P_j(k) = \alpha_j\beta_j\gamma_j^{k-3}(1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1 - \gamma_j))^{-1}, \quad k \geqslant 3,$$

где α_j, β_j и γ_j — некоторые параметры распределения, физический смысл которых определен в [7]. Заметим, что среднее количество M_j требований в вызывающий момент по потоку Π_j вычисляется по следующей формуле

$$M_j = p_j[1 + 2\alpha_j + \alpha_j\beta_j(2(1 - \gamma_j)^{-1} + (1 - \gamma_j)^{-2})].$$

Интенсивность поступления вызывающих моментов по потоку Π_j равна λ_j. Свойства таких потоков с неоднородными требованиями изучены в [7, 8]. Обозначим теперь через $\eta_j(\omega; t)$ случайное число поступивших заявок на промежутке времени $[0, t)$ по потоку Π_j, $j = 1, 2$. В частности, была получена вероятность $P(\{\omega\colon \eta_j(\omega; t) = k\}) = P_j(t, k)$ поступления k требований за время $[0, t)$ по потоку Π_j следующего вида

$$P_j(t, k) = e^{-\lambda_j t} \sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha_j^n \frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n}}{n!(k-2n)!} +$$

$$+ e^{-\lambda_j t} \sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha_j^n \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta_j^m \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma_j^l \frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!}, k \geqslant 0.$$

Управление конфликтными потоками при обслуживании требований производится с помощью адаптивного алгоритма, подробное описание которого приведено в работах [4, 5].

2. Описание системы

Если в качестве рассматриваемой системы взять транспортный перекресток, то в системе обслуживающим устройством (ОУ) будет светофор, а требованиями — автомобили, подъезжающие к перекрестку. Множество состояний ОУ обозначим через $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(8)}\}$. В работе [5] приведены описания всех состояний и длительности пребывания в них, которые выражаются через некоторые параметры T_i, $i = 1, \ldots, 6$.

Будем рассматривать систему в моменты τ_i, $i = 0, 1, \ldots$, или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь величина τ_0 — начальный момент времени, а τ_i, $i \geqslant 1$ — моменты смены состояний обслуживающего устройства. Пусть $y_0 = (0, 0)$, $y_1 = (1, 0)$, $y_2 = (0, 1)$ и X — одномерная целочисленная неотрицательная решетка. Для нелокального описания [3] системы при $i = 0, 1, \ldots$ введем следующие случайные величины и элементы:

1) $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние ОУ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$;

2) $\eta_{j,i} \in X$ — число заявок потока Π_j, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, и $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;

3) η'_i — случайный вектор, принимающий значение y_0, если в систему на i-ом такте $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не поступило ни одной заявки, и значение y_j, если на i-ом такте первой пришла заявка (или заявки) потока Π_j;

4) $\kappa_{j,i} \in X$ — число заявок потока Π_j, которые находятся в системе в момент τ_i, и $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$;

5) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число заявок потока Π_j, которые система может обслужить на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, и $\xi_i = (\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$.

При $j = 1, 2$ примем следующие соотношения для параметров (длительностей) T_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$,

$$\begin{gathered} T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\theta_j\mu_{j,1}^{-1}, \\ T_{3j-1} = l_{3j-1}\theta_j\mu_{j,2}^{-1}, \\ T_{3j} = l_{3j}\theta_j\mu_{j,2}^{-1}, \end{gathered}$$

где $l_{3j-2} \in X$, l_{3j-1}, $l_{3j} \in \mathbb{N}$. При этом постоянные величины $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$ определяют длительности обслуживания одной заявки потока Π_j на первом (начало обслуживания) и втором (продолжение обслуживания) этапе соответственно. Величина $0 < \theta_j \leqslant 1$ обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию потока Π_j, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае $\theta_j < 1$ одновременно может обслуживаться несколько требований.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается рекуррентным соотношением $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta'_i)$. Функция $U(\Gamma^{(r)}, a, b)$, где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $a \in X^2$ и $b \in \{y_0, y_1, y_2\}$, определяется следующим образом

$$\text{(1)}\quad \Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta'_i) =$$
$$= \begin{cases} \Gamma^{(3j-2)}, & \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& \left[(\kappa_{j,i} > 0) \vee (\kappa_{s,i} \geqslant K_s) \vee \right.\right. \\ & \left.\left. \vee (\eta'_i = y_j)\right]\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}\right] \& [\kappa_{s,i} = 0] \& \right. \\ & \left. \& [\kappa_{j,i} \leqslant K_j] \& [\eta'_i = y_j]\right\}; \\ \Gamma^{(3j-1)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i = y_j]\right\}; \\ \Gamma^{(3j)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i \neq y_j]\right\}; \\ \Gamma^{(6+j)}, & \left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& [\kappa_{j,i} = 0] \& [\kappa_{s,i} < K_s] \& [\eta'_i = y_0]. \end{cases}$$

В формуле (1) и далее в работе $j \neq s$ и j, $s = 1, 2$. Постоянная K_s определяет пороговую длину очереди по потоку Π_s. При этом если длина очереди по потоку Π_s превышает K_s, то продлеваем состояние $\Gamma^{(3s-1)}$.

Как видно из приведенного соотношения состояние ОУ на следующем шаге зависит от состояния на предыдущем шаге, длин очередей и очередности прихода заявок. При этом динамика длины очереди по потокам задается следующими рекуррентными соотношениями $\kappa_{i+1} = V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = (v_1(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i), v_2(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i))$, где функции $v_j(\Gamma^{(r)}, a, b, c)$, a, b, $c \in X^2$, $j = 1, 2$, определяются следующим образом

$$\kappa_{j,i+1} = v_j(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) =$$

$$= \begin{cases} \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0, \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases} \tag{2}$$

Используя соотношения (1) и (2), при $i = 0, 1, \ldots$ получаем следующее рекуррентное функциональное соотношение $(\Gamma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = (U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i'), V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i))$.

Ниже рассматривается векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i);\ i = 0, 1, \ldots\}$, которая определяет динамику состояний ОУ и изменение длин очередей. Приведем свойства этой последовательности, доказанные в работе [1].

Лемма 1. *Случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с заданным начальным распределением вектора $\{(\Gamma_0, \kappa_0)\}$ является марковской.*

Теорема 1. *Пусть $x = (x_1, x_2) \in X^2$ и множества G, $G^{(3j-2)}$, $G^{(3j-1)}$, $G^{(6+j)}$, G_j определяются равенствами*

$$G = \{(\Gamma^{(h)}, x) \colon \Gamma^{(h)} \in \Gamma, x \in X^2\},$$

$$G^{(3j-2)} = \{(\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(3j-1)} = \{(\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(6+j)} = \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_j > 0\} \cup \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_s \geqslant K_s - l_{3s}\},$$

$$G_j = \begin{cases} G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)}, & \textit{если } l_{3j-2} > 0; \\ G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} \cup G^{(3j-1)}, & \textit{если } l_{3j-2} = 0. \end{cases}$$

Тогда: 1) *состояния из* G_j *являются несущественными;*
2) *класс* $G_0 = G \backslash (G_1 \cup G_2)$ *является неразложимым апериодическим классом существенных состояний.*

Теорема 1 классифицирует состояния изучаемой марковской последовательности. Таким образом, марковская цепь $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ является разложимой (то есть все ее состояния не образуют один класс сообщающихся состояний).

3. Соотношения для одномерных распределений марковской последовательности

Для любого $i \geqslant 0$, $r = \overline{1,8}$; $x \in X^2$ введем обозначение:

$$Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x).$$

Рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x) \colon r = \overline{1,8},\ x \in X^2\}$, $i \geqslant 0$, векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ зависят от совместных условных распределений входных потоков $\{\eta_i; i = 0, 1, \ldots\}$, последовательностей $\{\eta_i'; i = 0, 1, \ldots\}$ и $\{\xi_i; i = 0, 1, \ldots\}$ вида:

$$\varphi_{3j-2}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x), \tag{3}$$

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j, b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = k l_{3j-1} y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x),$$

$$\varphi_{3j,d}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_d | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x),$$

$$\varphi_{6+j,d,a_j}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y_d | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x),$$

где величины $b = (b_1, b_2) \in X^2$, $x = (x_1, x_2) \in X^2$, $d \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ K_j\}$, $a_j \leqslant l_{3j-2}$. Вид условных распределений (3) приводится в работе [2].

Выведем последовательно рекуррентные соотношения для всех $Q_{i+1}^{(r)}(w)$, где $r = \overline{1,8}$, $w \in X^2$. В этих рекуррентных соотношениях суммирование ведется по всем допустимым значениям переменных $x \in X^2$, $a \in X^2$, $b \in X^2$, $y \in \{y_0, y_1, y_2\}$, если не указаны конкретные границы суммирования. Сначала получим выражение для $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$. Для этого рассмотрим четыре случая: 1) при $w_j > 0, w_s = 0$ получаем

$$
\begin{gathered}
(4) \qquad Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_j y_j) = \\
= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times \\
\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_j y_j) = \\
= \sum_x Q_i^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) \times \\
\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3s)}, x, b, l_{3s} y_s) = w_j y_j) + \\
+ \sum_x Q_i^{(3j)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) \times \\
\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3j)}, x, b, l_{3j} y_j) = w_j y_j) = \\
= \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_i = (w_j - x_j) y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) + \\
+ \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) \mathbf{P}(\eta_i = w_j y_j, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) + \\
+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) \mathbf{P}(\eta_i = w_j y_j, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) + \\
+ \sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1, w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) \times \\
\times \mathbf{P}(\eta_i = (w_j + l_{3j} - x_j) y_j, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) = \\
= \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s,j}((w_j - x_j) y_j) +
\end{gathered}
$$

$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s,j}(w_j y_j)+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}(w_j y_j))+$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}(w_j-l_{3j})y_j);$$

2) при $w_j>0, w_s\leqslant K_s-l_{3s}$ находим

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)= \tag{5}$$

$$=\sum_x\sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x)\sum_{b,a,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=a,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(r)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(r)},x,b,a)=w)=$$

$$=\sum_x Q_i^{(3s)}(x)\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(3s)},x,b,l_{3s}y_s)=w)+$$

$$+\sum_x Q_i^{(3j)}(x)\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(3j)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(3j)},x,b,l_{3j}y_j)=w)=$$

$$=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\mathbf{P}(\eta_i=w-x_jy_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\mathbf{P}(\eta_i=w-x+l_{3s}|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\mathbf{P}(\eta_i=w,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1,w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\times$$

$$\times\mathbf{P}(\eta_i=(w+(l_{3s}-x_s)y_s,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)\mathbf{P}(\eta_i = w, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) +$$

$$+ \sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1, w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\eta_i = w + (l_{3j-x_j}) y_j, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(w - x_j y_j) +$$

$$+ \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(w - x + l_{3s}) +$$

$$+ \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) \varphi_{3s,j}(w) +$$

$$+ \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1, w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) \varphi_{3s,j}(w + (l_{3s} - x_s) y_s) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) \varphi_{3j,j}(w) +$$

$$+ \sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1, w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) \varphi_{3j,j}(w + (l_{3j} - x_j) y_j);$$

3) при $w_j > 0$, $w_s \geqslant K_s - l_{3s}$ имеем

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w) = \tag{6}$$

$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_x Q_i^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(3s)},x,b,l_{3s}y_s)=w)+$$

$$+\sum_{x}Q_i^{(3j)}(x)\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(3j)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(3j)},x,b,l_{3j}y_j)=w)=$$

$$=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\mathbf{P}(\eta_i=w-x_jy_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\mathbf{P}(\eta_i=w-x+l_{3s}|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\mathbf{P}(\eta_i=w+(l_{3s}-x_s)y_s|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\mathbf{P}(\eta_i=w,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1,w_s+l_{3s}\}}Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\times$$

$$\times\mathbf{P}(\eta_i=(w+(l_{3s}-x_s)y_s,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}}Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\mathbf{P}(\eta_i=w,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3j)},\kappa_i=x)+$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}}Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\times$$

$$\times\mathbf{P}(\eta_i=w+(l_{3j-x_j})y_j,\eta_i'=y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3j)},\kappa_i=x)=$$

$$=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x_jy_j)+$$

$$+\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})+$$

$$+\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s}(w+(l_{3s}-x_s)y_s)+$$

$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w)+$$

$$+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1,w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_s)y_s)+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)\varphi_{3j,j}(w)+$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_j)y_j);$$

4) при $w_j=0$, $w_s \geqslant K_s-l_{3s}$ последовательно выводим

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_s y_s)= \tag{7}$$

$$=\sum_x\sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x)\sum_{b,a,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=a,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(r)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(r)},x,b,a)=w_s y_s)=$$

$$=\sum_x Q_i^{(3s)}(x)\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)\times$$

$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)},x,y)=\Gamma^{(3j-2)},V(\Gamma^{(3s)},x,b,l_{3s}y_s)=w_j y_j)=$$

$$=\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\mathbf{P}(\eta_i=(w_s-x_s+l_{3s})y_s|\Gamma_i=\Gamma^{(3s)},\kappa_i=x)=$$

$$=\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,s}((w_s-x_s+l_{3s})y_s).$$

Далее найдем рекуррентное выражение для $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)$. Выделим два случая:

1) при $w_j=0$ получаем

(8) $$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w_s y_s) =$$

$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) =$$

$$= \sum_x Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-2)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(3j-2)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w_s y_s) +$$

$$+ \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \sum_b \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y_j) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w_s y_s) =$$

$$= \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \times$$

$$\times \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \times$$

$$\times \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s);$$

2) при $w_j > 0$ находим

(9) $$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w) =$$

$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_x Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-2)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(3j-2)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w) +$$

$$+ \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \sum_b \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y_j) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w) =$$

$$= \sum_{x_j=0}^{w_j + l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\eta_i = w - x + l_{3j-2} y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{w_j + l_{3j-2} - 1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\eta_i = w - x + l_{3j-2} y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \sum_{x_j=0}^{w_j + l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2} y_j) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{w_j + l_{3j-2} - 1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j, j, l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j).$$

Далее получим выражения для $Q_{i+1}^{(3j)}(w)$. Рассмотрим три случая: 1) при $w_j = 0$ выводим

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w_s y_s) = \tag{10}$$

$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) =$$

$$= \sum_x Q_i^{(3j-1)}(x) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(3j-1)}, x, b, a) = w_s y_s) +$$

$$+ \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \times$$

$$\times \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, a) = w_s y_s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \times$$

$$\times \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s, \xi_i = kl_{3j-1} y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) +$$

$$+ \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{a_j} \sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \times$$

$$\times \sum_{y \neq y_j} \mathbf{P}(\eta_i = w_s - x_s, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \varphi_{3j-1,k}(x_j, b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) +$$

$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + w_s y_s) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) +$$

$$+ \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{a_j} \sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + (w_s - x_s) y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(x_s y_s);$$

2) при $0 < w_j < K_j$ находим

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w) = \tag{11}$$

$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_x Q_i^{(3j-1)}(x) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(3j-1)}, x, b, a) = w) +$$

$$+ \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \times$$

$$\times \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{w_j + kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\eta_i = w - x + kl_{3j-1}, \xi_i = kl_{3j-1}y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) +$$

$$+ \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w_j y_j + a_j y_j + x_s) \times$$

$$\times \sum_{y \neq y_j} \mathbf{P}(\eta_i = w_s - x_s, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{w_j + kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,k}(x_j, w - x + kl_{3j-1}) +$$

$$+ Q_i^{(6+j)}(w + l_{3j-2}y_j) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) +$$

$$+\sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w+a_jy_j-x_sy_s)\varphi_{6+j,s,a_j}(x_sy_s);$$

3) при $w_j \geqslant K_j$ имеем

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w)= \tag{12}$$

$$=\sum_x\sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x)\sum_{b,a,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=a,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(r)},\kappa_i=x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)},x,y)=\Gamma^{(3j)},V(\Gamma^{(r)},x,b,a)=w)=$$
$$=\sum_x Q_i^{(3j-1)}(x)\times$$
$$\times\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=n_jl_{3j-1}y_j,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(3j-1)},\kappa_i=x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)},x,y)=\Gamma^{(3j)},V(\Gamma^{(3j-1)},x,b,a)=w)+$$
$$+\sum_x Q_i^{(6+j)}(x)\times$$
$$\times\sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{b,y}\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=a_jy_j,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)},\kappa_i=x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)},x,y)=\Gamma^{(3j)},V(\Gamma^{(6+j)},x,b,a)=w)=$$
$$=\sum_{x_j=0}^{w_j+n_jl_{3j-1}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\eta_i=w-x+n_jl_{3j-1},\xi_i=n_jl_{3j-1}y_j|\Gamma_i=\Gamma^{(3j-1)},\kappa_i=x)+$$
$$+\sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w_jy_j+a_jy_j+x_s)\times$$
$$\times\sum_{y\neq y_j}\mathbf{P}(\eta_i=w_s-x_s,\xi_i=a_jy_j,\eta_i'=y|\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)},\kappa_i=x)=$$

$$= \sum_{x_j=0}^{w_j+n_j l_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_j}(x_j, w-x+n_j l_{3j-1})+$$
$$+Q_i^{(6+j)}(w+l_{3j-2}y_j)\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)+$$
$$+\sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w+a_j y_j - x_s y_s)\varphi_{6+j,s,a_j}(x_s y_s).$$

Теперь получим рекуррентные соотношения для $Q_{i+1}^{(6+j)}(w)$. Рассмотрим два случая:
1) при $w_s = 0$ выводим

(13) $$Q_{i+1}^{(6+j)}(y_0) =$$
$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = y_0) =$$
$$= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\mathbf{P}(\eta_i = y_0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) =$$
$$= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s,0}(y_0);$$

2) при $0 < w_s < K_s - l_{3s}$ получаем

(14) $$Q_{i+1}^{(6+j)}(w_s y_s) =$$
$$= \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x)\times$$
$$\times\mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) =$$
$$= Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s})y_s)\mathbf{P}(\eta_i = y_0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) =$$
$$= Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s})y_s)\varphi_{3s,0}(y_0).$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для одномерных распределений марковской последовательности* $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ *имеют место рекуррентные соотношения* (4) – (14).

4. Рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений марковской последовательности

Пусть $z = (z_1, z_2)$, где компоненты z_1, z_2 — действительные или комплексные переменные, удовлетворяющие условиям $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$. Положим $z^x = z_1^{x_1} z_2^{x_2}$, где $x = (x_1, x_2) \in X^2$. Рассмотрим производящие функции

$$W_i^{(r)}(z) = \sum_{x \in X^2} Q_i^{(r)}(x) z^x, r = \overline{1,8};$$

$$W_i(z) = \sum_{r=1}^{8} W_i^{(r)}(z).$$

Используя рекуррентные соотношения (4) – (14) для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x) \colon r = \overline{1,8}, x \in X^2\}$, $i \geqslant 0$, векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$, стандартным образом можно получить рекуррентные соотношения для производящих функций $W_i^{(r)}(z)$, $r = \overline{1,8}$, $i > 0$. Введем обозначения

$$\overline{W}_i^{(3j)}(z) = \sum_{x_j=0}^{K_j-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) z_j^{x_j}.$$

Теорема 3. *Рекуррентные соотношения для производящих функций векторной марковской последовательности*

$\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ *имеют следующий вид*

$$W_{i+1}^{(3j-2)}(z) = q_{3s}(z)W_i^{(3s)}(z) + q_{3j,j}(z)\overline{W}_i^{(3j)}(z)-$$

$$-q_{3s,0}(z)\overline{W}_i^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z)\overline{W}_i^{(3s)}(z) + R_{i,j}^{(3s)}(z) + R_{i,j}^{(3j)}(z),$$

$$W_{i+1}^{(3j-1)}(z) = q_{3j-2}(z)W_i^{(3j-2)}(z)+$$

$$+q_{6+j,j}(z)W_i^{(6+j)}(z) + R_i^{(3j-2)}(z) + R_{i,j}^{(6+j)}(z),$$

$$W_{i+1}^{(3j)}(z) = \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)W_i^{(6+j)}(z) + q_{6+j,s}(z)W_i^{(6+j)}(z)+$$

$$+q_{3j-1}^{n_j}(z)W_i^{(3j-1)}(z) + \sum_{k=1}^{n_j-1}(1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) + R_i^{(3j-1)}(z),$$

$$W_{i+1}^{(6+j)}(z) = q_{3s,0}(z)W_i^{(3s)}(z) + R_{i,0}^{(3s)}(z),$$

где

$$q_r(z) = z_j^{-l_r} \exp\left(\lambda_1(z_1 - 1) + \lambda_2(z_2 - 1)\right)T_r,\ r = \overline{3j-2, 3j};$$

$$q_{3j,0}(z) = z^{-l_{3j}}\varphi_{3j,0}(y_0);$$

$$q_{3s,j}(z) = z^{-l_{3s}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3s,j}(b)z^b;$$

$$q_{3j,j}(z) = z^{-l_{3j}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b)z^b;$$

$$q_{6+j,j}(z) = z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b)z^b;$$

$$\Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) = \sum_{x_j=0}^{K_j+kl_{3j-1}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x)z^x z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{b\in X^2}\varphi_{3j-1,k}(x_j, b)z^b,$$

$$k = \overline{1, n_j - 1};$$

$$R_i^{(3j-2)}(z) = \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x)z_s^{x_s}\times$$

$$\times \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-2}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}});$$

$$R_i^{(3j-1)}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}-1} Q_i^{(3j-1)}(x) z_s^{x_s} \times$$

$$\times \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j, b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{x_j+b_j-kl_{3j-1}});$$

$$R_{i,d}^{(3j)}(z) = q_{3j,d}(z) \sum_{x_j=0}^{l_{3j}-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)(z_j^{l_{3j}} - z_j^{x_j}),\ d = 0, j;$$

$$R_{i,s}^{(3j)}(z) = q_{3j}(z) \sum_{x_j=0}^{l_{3j}-1} \sum_{x_s=1}^{\infty} Q_i^{(3j)}(x) z_s^{x_s} (z_j^{l_{3j}} - z_j^{x_j}) +$$

$$+ q_{3j,s}(z) \sum_{x_j=0}^{l_{3j}-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)(z_j^{l_{3j}} - z_j^{x_j});$$

$$R_{i,j}^{(6+j)}(z) = \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z_s^{x_s} \times$$

$$\times \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}}).$$

Приведем вывод рекуррентного соотношения для производящей функции $W_{i+1}^{(3j-1)}(z)$:

$$W_{i+1}^{(3j-1)}(z) = \sum_{w_j=0}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} Q_{i+1}^{(3j-1)} z^w =$$

$$= \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} +$$

$$+\sum_{w_s=0}^{\infty}\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x)\times$$

$$\times\sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j+(w_s-x_s)y_s)z_s^{w_s}+$$

$$+\sum_{w_j=1}^{\infty}\sum_{w_s=0}^{\infty}\sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x)\varphi_{3j-2}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w+$$

$$+\sum_{w_j=1}^{\infty}\sum_{w_s=0}^{\infty}\sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x)\times$$

$$\times\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w=$$

$$=\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x)\sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{3j-2}(b_j y_j+(w_s-x_s)y_s)z_s^{w_s}+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x)\times$$

$$\times\sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j+(w_s-x_s)y_s)z_s^{w_s}+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_j=1}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x)\varphi_{3j-2}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w+$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x)\times$$

$$\times\varphi_{3j-2}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_j=1}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x)\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w+$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j-2}}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty}\sum_{w_s=x_s}^{\infty}Q_i^{(6+j)}(x)\times$$

$$\times\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w-x+l_{3j-2}y_j)z^w+$$

$$=\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(3j-2)}(x)z_s^{x_s}\sum_{b_s=0}^{\infty}\sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{3j-2}(b)z_s^{b_s}+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(6+j)}(x)z_s^{x_s}\sum_{b_s=0}^{\infty}\sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b)z_s^{b_s}+$$

$$+z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(3j-2)}(x)z^x\sum_{b_j=1-x_j+l_{3j-2}}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}\varphi_{3j-2}(b)z^w+$$

$$+z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(3j-2)}(x)z^x\sum_{b_j=0}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}\varphi_{3j-2}(b)z^b+$$

$$+z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{\infty}\sum_{b_j=1-x_j+l_{3j-2}}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}Q_i^{(6+j)}(x)\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b)z^w+$$

$$+z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=l_{3j-2}}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(6+j)}(x)z^x\sum_{b_j=1}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b)z^b=$$

$$=z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=0}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(3j-2)}(x)z^x\sum_{b_j=0}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}\varphi_{3j-2}(b)z^w+$$

$$+z_j^{-l_{3j-2}}\sum_{x_j=0}^{\infty}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(6+j)}(x)\sum_{b_j=1}^{\infty}\sum_{b_s=0}^{\infty}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b)z^w+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{\infty}Q_i^{(3j-2)}(x)z_s^{x_s}\times$$

$$\times\sum_{b_s=0}^{\infty}\sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{3j-2}(b)z_s^{b_s}(1-z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}})+$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z_s^{x_s}\times$$

$$\times\sum_{b_s=0}^{\infty}\sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z_s^{b_s}(1-z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}}) =$$

$$= q_{3j-2}(z)W_i^{(3j-2)}(z) + q_{6+j,j}(z)W_i^{(6+j)}(z)+$$

$$+R_i^{(3j-2)}(z) + R_{i,j}^{(6+j)}(z).$$

Вывод рекуррентных соотношений для остальных производящих функций $W_{i+1}^{(3j-2)}(z)$, $W_{i+1}^{(3j)}(z)$ и $W_{i+1}^{(6+j)}(z)$ производится аналогичным образом.

5. Заключение

В работе была изучена система адаптивного управления двумя конфликтными потоками неоднородных требований. Было показано, что математическую модель такой системы можно описать векторной марковской последовательностью. Для компонент такой марковской последовательности были получены функциональные соотношения. Это позволяет найти рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной марковской последовательности состояний системы и для их производящих функций. Полученные соотношения позволяют при дальнейших исследованиях получить условия существования стационарного распределения в таких системах.

Литература

1. КУДРЯВЦЕВ Е.В., ФЕДОТКИН М.А. *Анализ дискретной модели системы адаптивного управления конфликтными неоднородными потоками* // Вестник московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – М.: 2019. – №1, – С. 19–26.
2. КУДРЯВЦЕВ Е.В., ФЕДОТКИН М.А. *Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2019. – №1. – С. 23–37.
3. ФЕДОТКИН М.А. *Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 424 с.
4. ФЕДОТКИН М.А., КУДРЯВЦЕВ Е.В. *Построение математической модели адаптивного управления неординарными потоками* // Материалы Международной научной конференции «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». – Минск: БГУ, – 2015. – С. 106–111.
5. ФЕДОТКИН М.А., КУДРЯВЦЕВ Е.В. *Предельные свойства системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований* // Материалы Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-15)». – М.: Техносфера, – 2015. – С. 233–240.
6. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятность*-1. – М.: МЦНМО, 2011. – 552 с.
7. FEDOTKIN M.A., FEDOTKIN A.M., KUDRYAVTSEV E.V. *Construction and analysis of a mathematical model of spatial and temporal characteristics of traffic flows* // Automatic control and computer sciences. – 2014. 48. No. 6. P. 358–367. https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9_9

8. FEDOTKIN M.A., FEDOTKIN A.M., KUDRYAVTSEV E.V. *Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations* // Automatic control and computer sciences. – 2015. 49. No. 1. P. 29–36. https://doi.org/10.3103/S0146411615010034

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF THE ADAPTIVE CONTROL SYSTEM OF CONFLICT FLOWS OF NON-HOMOGENEOUS REQUESTS

Fedotkin Mikhail, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Doctor of Science, professor (fma5@rambler.ru).
Kudryavtsev Evgeniy, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, assistant (evgkudryavcev@gmail.com).

Abstract: There are a large number of real large-scale systems control in modern life. One of the main tasks for these systems is creating adequate adaptive control probabilistic models for conflict flows of non-homogeneous requests. Such systems can be: 1) expert systems of supervisory control and management in space for the sequence of takeoffs and landings of aircraft; 2) machines for spatial control of technological and information signals of the production complex of computer circuits; 3) intelligent control systems for traffic flows of non-homogeneous vehicles on highways. Effective flows control of non-homogeneous requests in such systems is a non-trivial task, since description of the system functioning is a complex probabilistic mathematical model. The paper considers the issues of constructing and analyzing a mathematical model of the adaptive control system of conflict flows of non-homogeneous requests. The mathematical description of the system is the server state changes and the queue lengths dynamics of conflict input flows. A vector random sequence of system states has the Markov property. The states of this sequence are classified by arithmetic properties. The main result of the work is obtaining recurrence relations for one-dimensional probability distributions of the vector sequence of system states and recurrence relations for generating functions. Generally, the study of the properties of recurrence relations provides the conditions for the stationary mode existence in such systems .

Keywords: control queuing systems, conflict flows, adaptive control, stationary probability distribution, generating functions.

УДК 519.2, 519.7
ББК 22.17, 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...