ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Русев В. Н.[1]
(*РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва*)

В работе изучено уравнение восстановления, представляющее собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки с разностным ядром. Данное уравнение рассматривается как для плотности восстановления, так и для ее первообразной: функции восстановления. Функция восстановления имеет существенное значение в теории надёжности технических систем не только в качестве описательной характеристики, но также для оптимизации стратегий эксплуатации при управлении профилактического обслуживания, в предположении выполнения модели рекуррентных потоков восстановлений. Предложен аналитический метод получения асимптотического представления решения уравнения восстановления для некоторого класса распределений при выполнении определенного ряда условий на распределение. Достоверность указанного разложения проверена на базовом в математической теории надёжности показательном распределении. В качестве примера, показывающего, что класс описанных распределений не есть пустое множество, рассмотрено двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко, которое является естественным обобщением показательного распределения. В работе используются аппарат теории рядов и метод производящей функции моментов, которая является преобразованием Лапласа плотности распределения неотрицательной непрерывной случайной величины. Попутно освещена проблема моментов Чебышёва-Маркова-Стильтеса об однозначном восстановлении распределения последовательностью своих моментов, выполнение которой имеет значимость для указанного разложения. Выражение для решения уравнения восстановления в случае плотности восстановления представляет собой ряд типа Грама-Шарлье в терминах вероятностных моментов.

Ключевые слова: уравнение восстановления, функция восстановления, преобразование Лапласа, производящая функция моментов, проблема моментов Чебышёва-Маркова-Стилтьеса, распределение Вейбулла-Гнеденко.

1. Введение

Данная статья посвящена получению асимптотики решения уравнения восстановления из классической теории восстановле-

[1] *Владимир Николаевич Русев, к.т.н. (rusev.v@gubkin.ru).*

ния, которая сформировалась как раздел математики в недрах теории надёжности в середине прошлого века.

Задача изучения асимптотического поведения решений различных классов уравнений – это традиционная задача классического анализа еще со времени А. Пуанкаре (см. [1]), составляющая значительную часть соответствующей теории уравнений. Асимптотика решений интегральных уравнений Вольтерра с разностным ядром впервые изучалась в работе [2]. В связи с задачами теории восстановления активно изучалось поведение решения уравнения восстановления, о чем подробно изложено в [14, 16].

Теория надёжности сравнительно молодая для науки дисциплина. В истории ее развития выделяют три этапа формирования, характеризующие общие тенденции взаимоотношения науки и техники (см. [7]), когда наука сначала отстаёт от техники в своем развитии, потом постепенно догоняет технику, решая насущные технические задачи; и, наконец, наука начинает опережать технику в своем становлении, ставя и решая такие задачи, которые лишь впоследствии, на основе научных исследований и чисто теоретического подхода, находят практические приложения. Соответственно, на первом этапе (30 - 40 гг. XX века) попытки научного подхода к проблеме надёжности носят стихийный характер; теория надёжности уже догоняет технику, происходит бурное развитие статистических методов во время второго этапа (50 - 60 гг. XX века), именно в этот период в качестве одного из ответвлений естественно возникла и стала активно развиваться теория восстановления. Начиная с 70-х годов прошлого века теория надёжности начинает опережать технику в своем развитии, переходя уже на проблемы управления качеством технических устройств, промышленной безопасности и анализу рисков.

Как это часто бывает с отдельными разделами прикладной математики, развитие теории восстановления в значительной степени превысило реальные потребности науки и практики второй половины XX века. В то же время большинство достижений и выводов теории восстановления относится к инженерным приложениям, связанным с планированием и ожиданием ремонтов [10, 13, 19], а также в задачах астрофизики, биологии, медицины [16, 18].

Фундаментальные вопросы классической теории восстановления, включая асимптотические свойства основной характеристики процесса восстановления – функции восстановления – были обстоятельно рассмотрены в работах [5, 14]; применительно к интегральному уравнению восстановления для модели Вейбулла-Гнеденко можно указать ряд исследований: [17, 21, 22]. Отметим, что кроме указанного аналитического подхода к решению уравнения восстановления в модели Вейбулла-Гнеденко, существуют и другие способы получения, основанные на численных методах [6, 8, 20]. В частности, можно рассмотреть модификацию метода Ритца дискретизации интегрального уравнения восстановления, базирующееся на компьютерном моделировании, в результате которого были получены системы рекуррентных формул [9, 12, 13]. Там же имеется подробное освещение истории вопроса к численному подходу нахождения решения уравнению восстановления.

2. Основные результаты

Рассмотрим так называемое уравнение восстановления [5,8], уравнение вида:

(1) $$h(t) = f(t) + \int_0^t h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau ,$$

представляющее собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки с разностным ядром с точки зрения математики [6]. Предполагается, что функции $h(t)$, $f(t)$ являются неотрицательными и достаточно гладкими. Функция $f(t)$ считается заданной. Искомая функция $h(t)$ называется плотностью восстановления, а её первообразная $H(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ в технических приложениях именуется функцией восстановления [7,8]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть имеется неотрицательная непрерывная случайная величина ξ с плотностью $f(t)$ и функцией распределения $F(t)$, у которой существуют все начальные моменты порядка n, $(n \in \mathbb{N})$ $\nu_n = \int\limits_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$, $\nu_1 = M\xi$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\nu_n\right)^{-\frac{1}{2n}} = +\infty$, 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(n+1)\dfrac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \right] = +\infty$,

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\nu_1{}^n \nu_{n+2}}{(n+2)!} \neq 1$, 4. $\lim\limits_{t\to+\infty} f^{(n)}(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

5. $\exists C > 0: \quad \left| f^{(n)}(0) \right| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

тогда асимптотическое представление решения уравнения восстановления (1) имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{\nu_1} \left[F(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{\nu_1^k} F^{(k)}(t) \right],$$

где $F^{(k)}(t)$ означает k-ю производную функции $F(t)$, а коэффициенты разложения c_k находятся по правилу:

$$c_1 = -m_0 = -\frac{\nu_2}{2!}, \qquad m_k = \frac{\nu_1{}^k \nu_{k+2}}{(k+2)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$c_k = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \ldots & 0 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \ldots & 0 & m_3 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \ldots & 0 & -m_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots \\ (-1)^{k+1} m_{k-2} & (-1)^k m_{k-3} & (-1)^{k-1} m_{k-4} & \ldots & -m_0 & (-1)^k m_{k-1} \end{vmatrix}$$

Справедлива рекуррентная зависимость:

$$c_k = m_0 c_{k-1} - m_1 c_{k-2} + m_2 c_{k-3} - \ldots + (-1)^k m_{k-1},$$

а также соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k}{-1+\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k} < \infty ,$$

означающее, что $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0,$ и значит, $\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |c_k| < 1.$

Замечания.

1. Условие 1 представляет собой достаточное условие Карлемана для однозначной определенности проблемы моментов (см. Раздел 6), иными словами, условие существования производящей функции моментов (см. Раздел 3) для ξ;

2. Условие 2 обеспечивает абсолютную сходимость производящей функции моментов для ξ на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$;

3. Абсолютная сходимость ряда из Условия 3 следует из условия 2. Действительно, применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\nu_1^{\,n+1}\nu_{n+3}}{(n+3)!}}{\dfrac{\nu_1^{\,n}\nu_{n+2}}{(n+2)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\nu_1^{\,n+1}\nu_{n+3}}{(n+3)!}\frac{(n+2)!}{\nu_1^{\,n}\nu_{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\nu_1}{(n+3)}\frac{\nu_{n+3}}{\nu_{n+2}} =$$

$$= \nu_1 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+3)}\frac{\nu_{n+3}}{\nu_{n+2}} = \frac{\nu_1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)\dfrac{\nu_n}{\nu_{n+1}}\right]} = 0 < 1,$$

что влечет за собой сходимость ряда.

Следствие. Асимптотическое разложение функции восстановления $H(t)$ в предположении, что для функции $\dfrac{\tilde{f}(s)}{s^2}$ существует обратное преобразование Лапласа, имеет следующий вид:

$$H(t) = \frac{1}{\nu_1} L^{-1}\left[\frac{\tilde{f}(s)}{s^2}\right] - \frac{1}{\nu_1^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_{k+1}}{\nu_1^k} F^{(k)}(t) ,$$

где $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ обозначает преобразование Лапласа для функции $f(t)$, $s \in \mathbb{C}$, а $L^{-1}[G(s)]$ обозначает обратное преобразование Лапласа для функции $G(s)$.

3. Доказательства

Решим уравнение (1) относительно $h(t)$, используя методы операционного исчисления [6]. Пусть $\tilde{h}(s)$ и $\tilde{f}(s)$ обозначают преобразования Лапласа от функций $h(s)$ и $f(t)$, соответственно. Заметим, что преобразование Лапласа для неотрицательной непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f(t)$ представляет собой производящую функцию моментов, так как

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-st)^n}{n!} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\nu_n}{n!} s^n \quad ,$$

где $s \in \mathbb{C}$, а ν_n – начальный момент порядка n случайной величины ξ с плотностью $f(t)$: $\nu_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$.

Исследуем данный степенной ряд на сходимость в области комплексных чисел. Найдем радиус сходимости ряда R:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^n \dfrac{\nu_n}{n!}}{(-1)^{n+1} \dfrac{\nu_{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left[(n+1) \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \right] = +\infty$$

в силу Условия 2.

Условие 1 гарантирует корректность определения производящей функции моментов, то есть выполнение предположения об однозначном задании распределения последовательностью своих моментов на основании достаточного условия Карлемана [15] для однозначной определенности проблемы моментов (см. Раздел 6).

Соотношение (1) на языке преобразования Лапласа в силу его свойств преобразуется к виду:

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{f}(s).$$

Следовательно

$$\tilde{h}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^n}{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\nu_n}{n!}s^n} = \frac{1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^n}{-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^n} =$$

$$= -\frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^n} - 1 = -\frac{1}{s}\frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^{n-1}} - 1.$$

Применим технику деления бесконечных рядов (см., например [3]) и найдем ряд, обратный к

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^{n-1}.$$

Будем искать его в виде:

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^{n-1}} = \frac{c_0}{\nu_1} + \frac{c_1}{\nu_1^2}s + \frac{c_2}{\nu_1^3}s^2 + \frac{c_3}{\nu_1^4}s^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{n-1}}{\nu_1^n}s^{n-1}.$$

Отсюда следует, что

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\nu_n}{n!}s^{n-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{n-1}}{\nu_1^n}s^{n-1}$$

или

$$1 = \left(-\frac{\nu_1}{1!} + \frac{\nu_2}{2!}s - \frac{\nu_3}{3!}s^2 + \frac{\nu_4}{4!}s^3 - \ldots\right)\left(\frac{c_0}{\nu_1} + \frac{c_1}{\nu_1^2}s + \frac{c_2}{\nu_1^3}s^2 + \frac{c_3}{\nu_1^4}s^3 + \ldots\right).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по степеням s, получаем бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_n:

$$\begin{cases} c_0 = -1, \\ c_1 - m_0 c_0 = 0, \\ c_2 - m_0 c_1 + m_1 c_0 = 0, \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 - m_2 c_0 = 0, \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 + m_3 c_0 = 0, \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 - m_4 c_0 = 0, \\ \ldots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \ldots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 - (-1)^{n+1} m_{n-1} c_0 = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

где

$$m_k = \frac{\nu_1^k \cdot \nu_{k+2}}{(k+2)!}, \quad k = 0,1,2,3\ldots$$

Пусть $A = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ по определению. Тогда из указанной системы уравнений, которую можно рассмотреть по столбцам и сложить все её строки, получаем соотношение:

$$A\left(1 - \frac{\nu_1^0 \cdot \nu_2}{2!} + \frac{\nu_1^1 \cdot \nu_3}{3!} - \frac{\nu_1^2 \cdot \nu_4}{4!} + \ldots\right) = -1,$$

или

$$A\left(1 - m_0 + m_1 - m_2 + m_3 \ldots\right) = -1.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\nu_1^k \cdot \nu_{k+2}}{(k+2)!}} = \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k}.$$

Предполагая выполнение Условия 3 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\nu_1{}^n \nu_{n+2}}{(n+2)!} \neq 1$, таким образом, получаем

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n < \infty .$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0 ,$$

что означает:

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |c_k| < 1 .$$

Найдем компактное выражение для коэффициентов c_n. Для этого указанную выше систему перепишем в виде:

$$\begin{cases} c_0 = -1, \\ c_1 = -m_0 , \\ c_2 - m_0 c_1 = m_1 , \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 = -m_2 , \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 = m_3 , \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 = -m_4 , \\ \ldots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \ldots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 = (-1)^{n+2} m_{n-1} , \\ \ldots \end{cases}$$

Для нахождения первых n коэффициентов c_n искомого ряда рассмотрим конечную систему:

$$\begin{cases} c_1 = -m_0 , \\ c_2 - m_0 c_1 = m_1 , \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 = -m_2 , \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 = m_3 , \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 = -m_4 , \\ \ldots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \ldots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 = (-1)^{n} m_{n-1} \end{cases}$$

и воспользуемся правилом Крамера решения систем линейных уравнений:

$$c_k = \frac{\Delta_{c_k}}{\Delta}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_1 & -m_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} m_{n-2} & (-1)^n m_{n-3} & (-1)^{n-1} m_{n-4} & (-1)^{n-2} m_{n-5} & (-1)^{n-3} m_{n-6} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и

$$\Delta_{c_k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -m_0 & \dots & 0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & m_1 & \dots & 0 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & -m_2 & \dots & 0 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \dots & m_3 & \dots & 0 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & -m_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} m_{n-2} & (-1)^n m_{n-3} & (-1)^{n-1} m_{n-4} & \dots & (-1)^n m_{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Причем, определитель n-го порядка Δ_{c_k} редуцируется в итоге к определителю k-го порядка на основании свойств вычисления определителей (см., например [3]).

В частности,

$$c_1 = -m_0,$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} 1 & -m_0 \\ -m_0 & m_1 \end{vmatrix} = -m_0^2 + m_1,$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & m_1 \\ -m_1 & -m_0 & -m_2 \end{vmatrix} = -m_0^3 + 2m_0 m_1 - m_2,$$

$$c_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & m_3 \end{vmatrix} = -m_0^4 + 3m_0^2 m_1 - m_1^2 - 2m_0 m_2 + m_3$$

Или в общем случае:

$$c_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \dots & 0 & m_3 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & 0 & -m_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ (-1)^{k+1} m_{k-2} & (-1)^k m_{k-3} & (-1)^{k-1} m_{k-4} & \dots & -m_0 & (-1)^k m_{k-1} \end{vmatrix}$$

Справедливо также рекуррентное соотношение:

$$c_n = m_0 c_{n-1} - m_1 c_{n-2} + m_2 c_{n-3} - \dots + (-1)^{n+2} m_{n-2} c_1 + (-1)^{n+1} m_{n-1} c_0,$$

$$c_0 = -1, \quad c_1 = -m_0$$

Итак, получаем следующий ряд:

$$\tilde{h}(s) = -\frac{1}{s} \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\nu_n}{n!} s^{n-1}} - 1 = -\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{\nu_1^n} s^{n-1} - 1 =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{\nu_1^n} s^{n-2} - 1 = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{\nu_1^{n+1}} s^{n-1} - 1$$

Выпишем несколько первых членов найденного разложения:

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{\nu_1 s} + \left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2} - 1 \right) + \frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3} s +$$

(2)

$$+ \frac{3\nu_2^3 - 4\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4} s^2 +$$

$$+\frac{45\nu_2^4-90\nu_1\nu_2^2\nu_3+20\nu_1^2\nu_3^2+30\nu_1^2\nu_2\nu_4-6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5}s^3+\ o(s^3)\ .$$

Если от изображения $\tilde{h}(s)$ перейти к оригиналу $h(t)$, то получим следующее выражение:

$$h(t)=\frac{1}{\nu_1}+\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}-1\right)\delta(t)+\frac{3\nu_2^2-2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3}\delta'(t)+\frac{3\nu_2^3-4\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4}\delta''(t)+$$
$$+\frac{45\nu_2^4-90\nu_1\nu_2^2\nu_3+20\nu_1^2\nu_3^2+30\nu_1^2\nu_2\nu_4-6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5}\delta'''(t)+\ldots$$

где $\delta(t)$ обозначает дельта − функцию Дирака, а $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, $\delta'''(t)$,… − её первую, вторую, третью и т.д. производные, соответственно.

Известно (см., например, [6]), что решение уравнения (1) имеет вид

$$h(t)=f(t)+R*f\ ,$$

где $R(t)$ – резольвента уравнения (1), а символ * обозначает свертку функций. Применяя преобразование Лапласа к данному выражению, получаем

$$\tilde{h}(s)=\tilde{f}(s)+\tilde{R}(s)\,\tilde{f}(s)\,.$$

Следовательно,

$$\tilde{R}(s)=\frac{\tilde{h}(s)-\tilde{f}(s)}{\tilde{f}(s)}.$$

Тогда с учетом того что $\tilde{h}(s)=\dfrac{\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}$ имеем:

$$\tilde{R}(s)=\frac{\dfrac{\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}-\tilde{f}(s)}{\tilde{f}(s)}=\frac{\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}=\tilde{h}(s)$$

Таким образом,

$$h(t)=f(t)+h*f$$

или

$$h(t) = f(t) + \tilde{h}(s)\,\tilde{f}(s)$$

Отсюда, если подставить ряд, содержащий дельта – функции, в последнее соотношение, то получим решение в виде бесконечной суммы сверток дельта – функций и их производных с функцией f. Приведем выкладку, обеспечивающую указанное разложение.

В силу известных из теории обобщенных функций свойств дельта – функции имеем (см. [3,6]) в точках непрерывности функции $f(t)$:

$$\delta * f = f(t), \quad \delta' * f = f'(t), \quad \delta'' * f = f''(t), \quad \delta''' * f = f''(t), \ldots$$

а также

$$1 * f = \int_0^t f(\tau)\,d\tau .$$

В итоге получаем, что

$$h(t) = f(t) + \frac{1}{\nu_1}\cdot\int_0^t f(\tau)\,d\tau + \left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2} - 1\right) f(t) +$$
$$+\frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3} f'(t) + \frac{3\nu_2^3 - 4\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4} f''(t) +$$
$$+\frac{45\nu_2^4 - 90\nu_1\nu_2^2\nu_3 + 20\nu_1^2\nu_3^2 + 30\nu_1^2\nu_2\nu_4 - 6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5} f'''(t) + \ldots$$

Или после упрощения:

$$h(t) = \frac{1}{\nu_1}\cdot\int_0^t f(\tau)\,d\tau + \frac{\nu_2}{2\nu_1^2} f(t) + \frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3} f'(t) +$$
$$+\frac{3\nu_2^3 - 4\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4} f''(t) + \tag{3}$$
$$+\frac{45\nu_2^4 - 90\nu_1\nu_2^2\nu_3 + 20\nu_1^2\nu_3^2 + 30\nu_1^2\nu_2\nu_4 - 6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5} f'''(t) + \ldots$$

В качестве первичного, очевидного обоснования заметим, что

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\nu_1}\cdot\int_0^t f(\tau)\,d\tau + \frac{\nu_2}{2\nu_1^2} f(t) + \frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3} f'(t) + \ldots \right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\nu_1}\cdot\int_0^t f(\tau)\,d\tau \right) = \frac{1}{\nu_1}\cdot\int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\nu_1}$$

в силу выполнения Условия 4:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} f''(t) = 0 \ \text{ и т.д.}$$

Отметим также, что полученное разложение для $h(t)$ имеет только асимптотический характер при $t \to +\infty$. Действительно, в силу (2) коэффициенты выражаются через моменты распределения с плотностью f

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{\nu_1 s} + c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots..$$

Тогда

$$\tilde{h}(s)\tilde{f}(s) = \frac{1}{\nu_1 s}\tilde{f}(s) + c_0\tilde{f}(s) + c_1 s\tilde{f}(s) + c_2 s^2\tilde{f}(s) + c_3 s^3\tilde{f}(s) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\nu_1 s}\tilde{f}(s) + c_0\tilde{f}(s) + c_1\left(s\tilde{f}(s) - f(0) + f(0)\right) +$$

$$+ c_2\left(s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0) + sf(0) + f'(0)\right) +$$

$$+ c_3\left(s^3\tilde{f}(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) + s^2 f(0) + sf'(0) + f''(0)\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\nu_1 s}\tilde{f}(s) + c_0\tilde{f}(s) + c_1 f'(t) + c_2 f''(t) + c_3 f'''(t) + \ldots +$$

$$+ c_1 f(0) + c_2 sf(0) + c_2 f'(0) + c_3 s^2 f(0) + c_3 sf'(0) + c_3 f''(0) + \ldots. =$$

$$= \frac{1}{\nu_1}\int_0^t f(x)\,dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) + f(0)\left(c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 + \ldots\right) +$$

$$+ f'(0)\left(c_2 + c_3 s + c_4 s^2 + c_5 s^3 + \ldots\right) + f''(0)\left(c_3 + c_4 s + c_5 s^2 + \ldots\right) + f'''(0)\left(c_4 + c_5 s + c_6 s$$

$$= \frac{1}{\nu_1}\int_0^t f(x)\,dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) + \overset{=}{o}(s), \quad (s \to 0)$$

В результате получаем:

$$h(t) = f(t) + \tilde{\omega}(s)\,\tilde{f}(s) = \frac{1}{\nu_1}\int_0^t f(x)\,dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) +$$

$$+\delta(t)\sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) + \overset{=}{o}(t),\ (t \to +\infty)$$

Берётся во внимание только первые три слагаемые в предположении, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) < \infty\,.$$

Но по Условию 5 имеем $\exists C > 0:\ \left|f^{(n)}(0)\right| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Значит

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0)\right| < \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1}\left|f^{(k)}(0)\right| < C\sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} < CA < \infty\,.$$

Полученное разложение (3) можно записать более компактно:

$$h(t) = \frac{1}{\nu_1}\left[F(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_k}{\nu_1^k}F^{(k)}(t)\right],$$

где коэффициенты c_k определены выше.

Перейдем к функции восстановления. Соотношение $h(t) = H'(t)$ в терминах преобразования Лапласа можно записать как $\tilde{H}(s) = \tilde{h}(s)/s$. Принимая во внимание (2), имеем

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{s} = \frac{1}{\nu_1 s^2} + \left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2} - 1\right)\frac{1}{s} + \frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3} + \frac{3\nu_2^3 - 4\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4}s + \ldots$$

Введем обозначения d_k, связанные с введенными выше c_k:

$$d_k = \frac{c_k}{\nu_1^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

так что $d_0 = \dfrac{1}{\nu_1}$, $d_1 = \dfrac{\nu_2}{2\nu_1^2}$, $d_2 = \dfrac{3\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3}$,

$$d_3 = \frac{3\nu_2^3 - 4\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4},$$

$$d_4 = \frac{45\nu_2^4 - 90\nu_1\nu_2^2\nu_3 + 20\nu_1^2\nu_3^2 + 30\nu_1^2\nu_2\nu_4 - 6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5}.$$

Тогда

$$\tilde{H}(s) = \frac{d_0}{s^2} + \left(d_1 - 1\right)\frac{1}{s} + d_2 + d_3 s + d_4 s^2 + d_5 s^3 + d_6 s^4 + \ldots .$$

Следовательно

$$H(t) = F(t) + L^{-1}\left[\frac{d_0}{s^2}\,\tilde{f}(s) + \left(d_1 - 1\right)\frac{1}{s}\,\tilde{f}(s) + d_2\,\tilde{f}(s) + d_3 s\tilde{f}(s) + d_4 s^2\,\tilde{f}(s) + \ldots\right]$$

где $L^{-1}[G(s)]$ обозначает обратное преобразование Лапласа для функции $G(s)$.

Таким образом,

$$H(t) = F(t) + L^{-1}\left[\frac{d_0}{s^2}\,\tilde{f}(s)\right] + \left(d_1 - 1\right)\int_0^t f(\tau)d\tau +$$
$$+ d_2 f(t) + d_3 f'(t) + d_4 f''(t) + \ldots =$$
$$= L^{-1}\left[\frac{d_0}{s^2}\,\tilde{f}(s)\right] + d_1 F(t) + d_2 F'(t) + d_3 F''(t) + d_4 F'''(t) + \ldots,$$

что совпадает с представлением

$$H(t) = \frac{1}{\nu_1}L^{-1}\left[\frac{\tilde{f}(s)}{s^2}\right] - \frac{1}{\nu_1^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_{k+1}}{\nu_1^k}F^{(k)}(t)$$

с учётом $d_k = \dfrac{c_k}{\nu_1^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$.

4. Проверка разложения на тестовом распределении

Проверим формулу (3) на простом законе распределения, когда известно, чему равен в точности параметр потока отказов, а именно, показательном распределении с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} .$$

Как известно (см., например, [7,8]), в этом случае

(4) $h(t) \equiv \lambda$.

Действительно, для показательного распределения имеем (см. [4]):

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \nu_2 = \frac{2}{\lambda^2}, \quad \nu_3 = \frac{6}{\lambda^3}, \ ..., \quad \nu_n = \frac{n!}{\lambda^n},$$

то есть,

$$\frac{\nu_n}{n!} = \frac{1}{\lambda^n} .$$

Значит

$$m_k = \frac{\nu_1^k \cdot \nu_{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{\lambda^{2k+2}}, \quad k = 0,1,2,3...$$

Тогда, пользуясь рекуррентной зависимостью для c_n, получаем:

$$c_0 = -1,\ c_1 = -\frac{1}{\lambda^2},\ c_2 = m_0 c_1 + m_1 = \frac{1}{\lambda^2}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\lambda}(-1) = 0,$$

$$c_3 = m_0 c_2 - m_1 c_1 - m_2 = 0 - \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{\lambda^4}\frac{1}{\lambda^2}(-1) = 0,$$

$$c_4 = m_0 c_3 - m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_3 = 0 + 0 + \frac{1}{\lambda^4}\frac{1}{\lambda^2}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\lambda^3}(-1) = 0,$$

$$c_5 = m_0 c_4 - m_1 c_3 + m_2 c_2 - m_3 c_1 - m_4 =$$

$$= 0 + 0 + 0 - \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\lambda^3}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{\lambda^6}\frac{1}{\lambda^4}(-1) = 0.$$

Используя метод доказательства по индукции, получаем, что

$$c_n = m_0 c_{n-1} - m_1 c_{n-2} + m_2 c_{n-3} - \ldots + (-1)^n m_{n-1} =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + \frac{1}{\lambda^n} \frac{1}{\lambda^{n-2}} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^{n-1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (-1) = 0$$

Следовательно, для показательного распределения получаем, что

$$\tilde{h}(s) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{\nu_1^{n+1}} s^{n-1} - 1 = -1 + \frac{1}{s\nu_1} + \frac{1}{\lambda^2 \nu_1^2} = \frac{1}{\lambda^2 \nu_1^2} - 1 + \frac{1}{s\nu_1},$$

что означает

$$h(t) = f(t) + \frac{1}{\nu_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau + \left(\frac{1}{\lambda^2 \nu_1^2} - 1 \right) f(t).$$

В итоге, получаем

$$h(t) = \lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{\nu_1} \cdot \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \, d\tau + \left(1 - 1\right) \lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} + \lambda \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \equiv \lambda,$$

что согласуется с указанным выше свойством параметра потока отказов для показательного распределения (4).

5. Случай распределения Вейбулла-Гнеденко

Рассмотрим выражение для плотности вероятности неотрицательной случайной величины в виде

$$f(t) = \begin{cases} \alpha^\beta \beta t^{\beta - 1} e^{-(\alpha t)^\beta}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \tag{5}$$

представляющее собой двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко с параметром формы $\beta > 0$, являющейся безразмерной величиной, и параметром масштаба $\alpha > 0$, имеющей размерность времени.

Начиная с 70-х годов прошлого века, распределение Вейбулла-Гнеденко использовалось в весьма обширном спектре прикладных задач из самых разных областей знаний и нашло чрезвычайно широкое применение в машиностроении, приборостроении, радиоэлектронике, особенно в аспекте теории надёжности. Анализ данных на основе распределения Вейбулла-

Гнеденко включает в себя: моделирование скорости ветра над океаном, изучение моделей продолжительности промышленных кризисов, динамические модели течения этнополитических конфликтов, задачи об оффшорных торгах по аренде нефтяных и газовых месторождений, описание процессов ползучести материалов, изучение проблем надёжности нефтепромыслового оборудования [7, 8, 9, 18, 20].

Преобразование Лапласа для данного распределения в терминах производящей функции моментов имеет вид:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\left(\frac{s}{\alpha}\right)^n ,$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Найдем радиус сходимости ряда R, используя функциональное свойство и асимптотическое разложение для гамма-функции Эйлера (см., например [3]) в зависимости от значений параметра $\beta \in \mathbb{R}_+$:

$$\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right) = \frac{n}{\beta}\Gamma\left(\frac{n}{\beta}\right), \Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\left[1+\overset{=}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad (x \to +\infty),$$

$$\Gamma(1+\kappa n) = \kappa n \Gamma(\kappa n) \approx \kappa n e^{-\kappa n} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}, \quad (n \to +\infty),$$

где $\kappa = \dfrac{1}{\beta}$.

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n!}\Gamma(1+\kappa n)\alpha^{-n}}{\frac{1}{(n+1)!}\Gamma\left(1+\kappa(n+1)\right)\alpha^{-(n+1)}} =$$

$$= \alpha \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)\Gamma(1+\kappa n)}{\Gamma\left(1+\kappa(n+1)\right)} =$$

$$= \alpha \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)\kappa n e^{-\kappa n} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\kappa(n+1) e^{-\kappa(n+1)} (\kappa(n+1))^{\kappa(n+1)-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} =$$

$$= \alpha \lim_{n \to +\infty} \frac{n e^{\kappa} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}}}{(\kappa(n+1))^{\kappa(n+1)-\frac{1}{2}}} =$$

$$=\alpha\frac{e^{\kappa}}{\kappa^{\kappa}}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\kappa n-\frac{1}{2}}\frac{n}{(n+1)^{\kappa}}=$$

$$=\alpha\frac{e^{\kappa}}{\kappa^{\kappa}}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\kappa}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{n}{(n+1)^{\kappa}}=$$

$$=\alpha\frac{1}{\kappa^{\kappa}}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)^{\kappa}}=\begin{cases}0, & \kappa>1\Leftrightarrow\beta<1\\ \alpha, & \kappa=1\Leftrightarrow\beta=1\\ \infty, & \kappa<1\Leftrightarrow\beta>1\end{cases}$$

Итак, при $\beta>1$ указанный ряд сходится абсолютно везде в области комплексных чисел, а при $\beta\geq 1$ ряд сходится в окрестности нуля: $|s|\leq\alpha$. Предельная ситуация $s\to 0$ соответствует случаю $t\to\infty$, который нас интересует в первую очередь.

Докажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{\nu_1^k\cdot\nu_{k+2}}{(k+2)!}$$

абсолютно сходится в случае распределения Вейбулла-Гнеденко.

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|(-1)^k m_k\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}m_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\nu_1^k\nu_{k+2}}{(k+2)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^k\Gamma\left(1+\frac{k+2}{\beta}\right)}{\alpha^{2k+2}(k+2)!}$$

в силу того, что

$$\nu_k=\frac{1}{\alpha^k}\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\beta}\right).$$

Для обоснования сходимости полученного ряда используем признак Даламбера, учитывая, что $\beta>1$, и, применяя формулу Стирлинга:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{m_{k+1}}{m_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\nu_1^{k+1}\cdot\nu_{k+3}\cdot(k+2)!}{(k+3)!\cdot\nu_1^k\cdot\nu_{k+2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\nu_1}{k+3}\cdot\frac{\nu_{k+3}}{\nu_{k+2}}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}{k+3}\frac{\frac{1}{\alpha^{k+3}}\Gamma\left(1+\frac{k+3}{\beta}\right)}{\frac{1}{\alpha^{k+2}}\Gamma\left(1+\frac{k+2}{\beta}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k+3}\frac{\Gamma\left(1+\frac{k+3}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k+2}{\beta}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{k+3}{\beta}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{k+3}{\beta}}\sqrt{2\pi}}{(k+3)\left(\frac{k+2}{\beta}\right)^{\frac{k+2}{\beta}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{k+2}{\beta}}\sqrt{2\pi}}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k+3}\left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{1+k+2}{\beta}}}{\left(\frac{k+2}{\beta}\right)^{\frac{k+2}{\beta}}}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{k+3}\left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{\frac{k+2}{\beta}}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+3)^{\frac{1}{\beta}}}{k+3}\left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{k+2}\right)^{k+2}\right]^{\frac{1}{\beta}}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\beta}}e^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\lim_{k\to+\infty}(k+3)^{\frac{1}{\beta}-1}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\frac{1}{2}}=0<1$$

Численные расчеты, выполненные в среде Wofram Mathematica, показывают, что $-1+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k \neq 0, \quad \forall\beta>0, \quad \forall\alpha>0$.

В частности, первые четыре коэффициентов имеют вид:

$$c_0=\frac{1}{\nu_1}, \quad c_1=\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}, \quad c_2=\frac{3\nu_2^2-2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3}, \quad c_3=\frac{3\nu_2^3-4\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4},$$

$$c_4=\frac{45\nu_2^4-90\nu_1\nu_2^2\nu_3+20\nu_1^2\nu_3^2+30\nu_1^2\nu_2\nu_4-6\nu_1^3\nu_5}{720\nu_1^5}.$$

Более того, учитывая общую формулу для производной n-го порядка от сложной функции из [3], которая для распределения Вейбулла-Гнеденко принимает вид:

$$\left(e^{-(\alpha t)^\beta}\right)^{(k)}=e^{-(\alpha t)^\beta}t^{-k}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\frac{(-1)^j\left(-(\alpha t)^\beta\right)^l(1+\beta(l-j)-k)_k}{j!(l-j)!},$$

где $\left(a\right)_k=\dfrac{\Gamma\left(a+k\right)}{\Gamma(a)}$ – символ Похгаммера, можно записать следующую формулу для нахождения $h(t)$:

$$h(t)=\frac{1}{\nu_1}\left[1-e^{-(\alpha t)^\beta}+e^{-(\alpha t)^\beta}\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\frac{c_k}{\nu_1^k t^k}\frac{(-1)^j\left(-(\alpha t)^\beta\right)^l(1+\beta(l-j)-k)_k}{j!(l-j)!}\right]$$

Укажем теперь выражение для функции восстановления в модели распределения Вейбулла-Гнеденко. В силу того, что в этом случае

$$L^{-1}\left[\frac{d_0}{s^2}\tilde{f}(s)\right]=d_0\int_0^t(t-\tau)\alpha^\beta\beta\tau^{\beta-1}e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau=$$

$$=d_0\alpha^\beta\beta\left[t\int_0^t\tau^{\beta-1}e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau-\int_0^t\tau^\beta e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau\right]=$$

$$=d_0\alpha^\beta\beta\left[\frac{t}{\alpha^\beta\beta}\gamma\left(1,(\alpha t)^\beta\right)-\frac{1}{\alpha^{\beta+1}\beta}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^\beta\right)\right]=$$

$$=d_0\left[tF(t)-\frac{1}{\alpha}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^\beta\right)\right],$$

где $\gamma(a,x)=\int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt$ – неполная гамма-функция Эйлера [3], и ввиду равенств:

$$\int_0^t \tau^{\mu} e^{-(\alpha\tau)^{\beta}} d\tau = \frac{1}{\alpha^{\mu+1}\beta}\cdot\gamma\left(\frac{\mu+1}{\beta},(\alpha t)^{\beta}\right),$$

$$\gamma\left(1,(\alpha t)^{\beta}\right)=\int_0^{(\alpha t)^{\beta}} e^{-z}dz = F(t),$$

окончательно получаем следующее представление:

$$H(t)=F(t)+d_0\left[t\cdot F(t)-\frac{1}{\alpha}\cdot\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^{\beta}\right)\right]+$$

$$+\left(d_1-1\right)F(t)+d_2F'(t)+d_3F''(t)+\ldots$$

$$=F(t)\left[1+d_0t\right]-\frac{d_0}{\alpha}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^{\beta}\right)+\left(d_1-1\right)F(t)+d_2F'(t)+d_3F''(t)+\ldots=$$

$$=d_0t\cdot F(t)-\frac{d_0}{\alpha}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^{\beta}\right)+d_1F(t)+d_2F'(t)+d_3F''(t)+\ldots$$

где коэффициенты $d_k=\frac{c_k}{\nu_1^{k+1}}, \quad k=1,2,3,\ldots$

Другая запись полученного соотношения:

$$H(t)=F(t)\left(\frac{1}{\nu_1}t+d_1\right)-\frac{d_0}{\alpha}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^{\beta}\right)+$$

$$+d_2F'(t)+d_3F''(t)+d_4F'''(t)+\ldots$$

Полученное соотношение согласуется с асимптотической формой функции восстановления [5] (асимптотика Смита), которая в наших обозначениях имеет вид:

$$H(t)=\frac{1}{\nu_1}t+d_1-1+o(1), \quad t\to\infty.$$

6. Проблема моментов Чебышёва-Маркова-Стилтьеса

6.1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС

Задача однозначного определения распределения вероятностей по последовательности ее моментов впервые (когда распределение рассматривается на отрезке конечной длины) была рассмотрена великим русским математиком и механиком П.Л. Чебышёвым еще в 1874 году в связи с исследованиями по предельным теоремам теории вероятностей. Данная задача носит название проблемы моментов, и позже оказалось, что она тесно связана с общей теорией ортогональных многочленов, теорией непрерывных дробей, теорией квадратурных формул. Только спустя 10 лет, в 1884 году в своей диссертации А.А. Марков, один из самых известных учеников Чебышёва, полностью обосновал проблему моментов Чебышёва, восполнив единственный пробел в работе Чебышева (отсутствие доказательства одного неравенства, был намечен только путь доказательства). Позже в 1885 году П.Л. Чебышёв распространяет все на случай функции, заданной в бесконечном интервале.

Почти одновременно с А. А. Марковым, но всё же несколько позже, аналогичные результаты по проблеме моментов опубликовал голландский математик Т. Стилтьес, не упоминая, к сожалению, о работах П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова.

На основании первого тома фундаментальной монографии по теории вероятностей и математической статистике [57], а также известной книги [104] можно сделать вывод, что в зарубежной научной литературе ничего не известно про вклад в проблему моментов П.Л. Чебышёва, а есть только проблема моментов Стилтьеса (если распределение задано на неотрицательной полуоси) и проблема моментов Гамбургера (если распределение задано на всей числовой оси). С учетом вышеизложенного, будем называть проблему моментов проблемой моментов Чебышёва-Маркова-Стилтьеса.

6.2. КРИТЕРИИ ОДНОЗНАЧНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СВОИМИ МОМЕНТАМИ

Имеются различные условия, с помощью которых возможна проверка единственности проблемы моментов, являющиеся как достаточными, так и необходимыми и достаточными в случае абсолютно непрерывного распределения, каким является, например, распределение Вейбулла-Гнеденко.

Условие Карлемана (см. [15]) для неотрицательной случайной величины состоит в проверке следующего условия:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\nu_n\right)^{-\frac{1}{2n}} = +\infty \ ,$$

где ν_n – начальный момент случайной величины с плотностью $f(t)$ порядка n: $\nu_n = \int\limits_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$.

Критерий Крейна М.Г. заключается в том, что если для абсолютно непрерывной неотрицательной случайной величины выполнено условие (см. [15]):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{-\ln f(x^2)}{1+x^2}\,dx < \infty \ ,$$

то она **не** определяется однозначно последовательностью своих моментов $\left\{\nu_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

6.3. КРИТЕРИИ КАРЛЕМАНА И КРЕЙНА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА- ГНЕДЕНКО

В случае распределения Вейбулла-Гнеденко ( )

$$\nu_n = \int\limits_0^{+\infty} t^n \alpha^\beta \beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}\,dt = \alpha^\beta \beta \int\limits_0^{+\infty} t^{n+\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}\,dt = \frac{1}{\alpha^n}\cdot \Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)$$

и условие Карлемана выполняется только не для всех значениях параметра формы β .

Действительно:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\right)^{-\frac{1}{2n}}=\sqrt{\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\right)^{-\frac{1}{2n}}.$$

Но

$$\left(\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\right)^{-\frac{1}{2n}}=e^{-\frac{1}{2n}\ln\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\ln\Gamma(1+x)\approx\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi),\qquad (x\to\infty)$$

и тогда

$$-\frac{1}{2n}\ln\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)=-\frac{1}{2\beta x}\ln\Gamma(1+x),\qquad x=\frac{n}{\beta}.$$

Следовательно

$$-\frac{1}{2\beta x}\ln\Gamma(1+x)\approx-\frac{1}{2\beta x}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\beta}\ln x-\frac{1}{4\beta}\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2\beta}-\frac{\ln(2\pi)}{4\beta x}\sim-\frac{1}{2\beta}\ln x+\frac{1}{2\beta},\quad (x\to\infty)$$

Таким образом, имеем

$$e^{-\frac{1}{2n}\ln\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}\sim e^{\frac{1}{2\beta}}e^{-\frac{1}{2\beta}\ln\frac{n}{\beta}}=e^{\frac{1}{2\beta}}\left(\frac{n}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2\beta}}=(e\beta)^{\frac{1}{2\beta}}n^{-\frac{1}{2\beta}}$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\right)^{-\frac{1}{2n}}\sim(e\beta)^{\frac{1}{2\beta}}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

Ввиду того что

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{1}{2\beta}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2\beta}}}=\begin{cases}<\infty, & \frac{1}{2\beta}>1\\ =\infty, & \frac{1}{2\beta}\le 1\end{cases},$$

окончательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\nu_n\right)^{-\frac{1}{2n}} = \sqrt{\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\right)^{-\frac{1}{2n}} = \begin{cases} <\infty, & \beta<\dfrac{1}{2} \\ =\infty, & \beta\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Поэтому, только при значении параметра формы $\beta \ge 0,5$ проблема моментов для распределения Вейбулла-Гнеденко решается однозначным образом.

Можно также показать, что только при значении параметра формы $\beta \ge 0,5$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln f(x^2)}{1+x^2}\,dx = \infty ,$$

что означает однозначную определенность распределения Вейбулла-Гнеденко своими моментами в силу выполнения критерия Крейна [104].

Литература

1. БЕЛЛМАН Р., КУК И. К. *Дифференциально-разностные уравнения* – М., изд-во «МИР», 1966. − 548 с.
2. ВИНЕР Н., ПЭЛИ Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* – М.: Наука, 1964. – 268 с.
3. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.
4. КЕНДАЛЛ М. ДЖ., СТЬЮАРТ А. *Теория распределений.* – М.: Наука, 1966. – 587 с.
5. КОКС Д. Р., СМИТ В. Л. *Теория восстановления.* Пер. с англ. В.В. Рыков, Ю. К. Беляев, под ред. и доп. Ю. К. Беляева. – М. Советское радио, 1967. − 299 с.
6. КРАСНОВ М. Л. *Интегральные уравнения: Введение в теорию.* − М.: Едиториал УРСС, 2010.− 304 с.
7. ОСТРЕЙКОВСКИЙ В. А. *Теория надёжности: Учебник для вузов* – 2-е изд., испр. – М.: Высшая Школа, 2008. – 463 с.

8. ПОЛОВКО А.М., ГУРОВ С.В. *Основы теории надёжности.* – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
9. РУСЕВ В.Н. *Модели и методы построения вероятностно-статистических оценок для мониторинга показателей надежности в диспетчерском управлении транспортом газа*: дис. канд. техн. наук: 05.13.01. – М. 2019. – 180 с.
10. РУСЕВ В.Н., СЕДЫХ И.А., СКОРИКОВ А.В. *Стратегия управления эксплуатационными затратами для модели Гнеденко – Вейбулла* // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ – 2019: Труды [Электронный ресурс] Москва 17 – 30 июня 2019 г. М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 2879 – 2883.
11. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Анализ элементов систем газоснабжения с помощью метода производящих функций моментов* // Сборник «Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина» – 2016. – № 1 (282) – С. 68–79.
12. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Аналитические и дискретные методы в исследовании параметра потока отказов в транспорте газа* // Сборник «Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина» – 2016. – № 3 (284) – С. 104 – 117.
13. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Аппроксимации функции восстановления и стратегия управления эксплуатационными затратами* // НТЖ «Проблемы управления» – 2018. – № 4. – С. 28 –35.
14. СЕВАСТЬЯНОВ Б. А. *Теория восстановления* // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теор. кибернетика, М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 11. – С. 99–128.
15. СТОЯНОВ Й. *Контрпримеры в теории вероятностей* – М.: МЦНМО, 2012. — 294 с.
16. ФЕЛЛЕР В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2.* – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 766 с.

17. CONSTANTINE A.G., ROBINSON N.I. *The Weibull renewal function for moderate to large arguments.* // Computational Statistics & Data Analysis. – 1997. –N.24. – P. 9–27.
18. ELSAYED, ELSAYED A. *Reliability Engineering (Wiley Series in Systems Engineering and Management).*– 2. ed., John Wiley & Sons Limited, 2012. – 795 p.
19. HANSCOM M.A., CLÉROUX R. *The block replacement problem* // Journal of Statistical Computation and Simulation – 1975. – Volume 3, Number 3. – P. 233–248.
20. RINNE H. *The Weibull Distribution: a handbook* / Horst Rinne. London, New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2009. − 784 p.
21. RUSEV V., SKORIKOV A. *On Solution of Renewal Equation in the Weibull-Gnedenko Model* // Reliability: Theory & Applications. – Volume 12, Number 4 (47), 2017. – P. 60-68.
22. SMITH W.L., LEADBETTER M.R. *On the Renewal Function for the Weibull Distribution.* // Technometrics. –1963. – N. 5. – P. 393–396.

ON SOME ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTION OF RENEWAL EQUATION

Vladimir Rusev, National University of Oil and Gas «Gubkin University», Moscow, Cand. Sc., senior lecturer (rusev.v@gubkin.ru).

Abstract: In this paper, the renewal equation is studied. It is the Volterra integral convolution equation of the second kind with a difference kernel. This equation is considered both for the renewal density and for its primitive, the renewal function. The renewal function is essential in the theory of technical systems reliability not only as a descriptive characteristic, but also for operational strategies optimization in the preventive maintenance management, assuming the implementation of the recurrent recovery flows model. A certain analytical method is suggested for obtaining an asymptotic representation of the recovery equation solution for the special class of distributions under some given conditions. The validity of the stated expansion was checked for the exponential distribution, which is basic in the reliability mathematical theory. To show that the class of the described distributions is not an empty set, as an example, the two-parameter Weibull-Gnedenko distribution was considered, which is a natural generalization of the exponential distribution. The apparatus of series theory and the generating moment function method are used.

The last is a Laplace transform of non-negative continuous random variable density distributions. The Chebyshev-Markov-Stieltjes moment problem is also highlighted. It means the possibility of the unique distribution restoration by the sequence of its moments. This problem is significant for the mentioned expansion. The expression for the renewal equation solution in the case of the renewal density has the form of Gram-Charlier's type series in terms of probability moments.

Keywords: renewal equation, renewal function, Laplace transform, moments generating function, Chebyshev-Markov-Stieltjes moment problem, Weibull-Gnedenko distribution.

УДК 519.218.4 + 517.956.8 + 517.968.22
ББК 22.161.6 + 30.14

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии …заполняется редактором…

Поступила в редакцию …заполняется редактором…
Опубликована …заполняется редактором…