

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕЙЕРНЫХ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ

**Куприянов Б.В.<sup>1</sup>**

(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)

*В статье предлагается определение конвейерного бизнес-процесса и модель, позволяющая получать вычисляемые характеристики конвейера. К таким характеристикам относятся: производительность конвейера; время выхода в стационарный режим работы; нахождение конвейерной операции, определяющей производительность конвейера. Описан алгоритм вычисления характеристик. Проведен структурный анализ работы конвейера. Показано, что поведение конвейера определяется набором производных от него линейных конвейеров. Доказывается соответствующая теорема. Приводятся графики и диаграммы, описывающие работу конвейеров.*

Ключевые слова: бизнес-процесс, модель, конвейер, производительность, диаграмма, граф, рекурсия.

### **1. Введение**

---

<sup>1</sup> Куприянов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, [kuprianovb@mail.ru](mailto:kuprianovb@mail.ru), тел. (495) 334-89-70).<sup>1</sup>

В настоящее время значительное распространение получило моделирование бизнес-процессов. Существует множество видов моделей и систем моделирования. Среди наиболее известных BPwin (IDEF0, IDEF3, DFD – модели), ARIS и другие. Основной целью систем моделирования является предоставить инструмент для полного и формального описания процесса. Степень формализации и детализации модели зависит от потребностей клиента и возможностей инструмента. Второй задачей моделирования является возможность использования модели для изучения поведения и получения числовых характеристик процесса. Так, например, BPwin позволяет осуществлять функционально-стоимостное моделирование. Оно основывается на постатейном распределении параметризованных (оцифрованных) затрат времени и финансовых ресурсов, связанных с осуществлением тех или иных функций. Функционально-стоимостное моделирование осуществляется и в системе моделирования ARIS. Разрешимость задачи получения той или иной числовой оценки бизнес-процесса вступает в естественное противоречие с общностью модели. Чем более обобщенная модель бизнес-процесса, тем меньше можно получить результатов в численном виде. Естественным путем решения данной проблемы является определение суженных классов бизнес-процессов, для которых возможно получение существенных числовых характеристик по описанию модели. В настоящей статье предлагается такой класс бизнес-процессов, названный конвейерные бизнес-процессы.



*Рис. 1. Конвейерный процесс производства табуреток.*

Рассмотрим пример простейшего конвейерного процесса - производство табуреток. Данное производство представляет собой последовательность фиксированного набора следующих операций: строгание заготовок, распилка заготовок,

сколачивание табуретки, покраска табуретки, контроль качества. Последовательность операций отражена на Рис.1.

Характерной особенностью данного процесса является следующее:

1. Каждая операция осуществляется отдельным рабочим (собственным «механизмом реализации»).
2. Каждая операция начинается снова после того как завершается предыдущая (обработал один комплект заготовок – приступил к следующему).
3. Каждая операция начинается после того как завершится обработка текущего комплекта и поступит комплект от предыдущего рабочего (спусковая функция).

Более формально конвейерный процесс можно представить как конечный ориентированный ациклический граф. Вершина графа имеет структуру, представленную на Рис. 2.

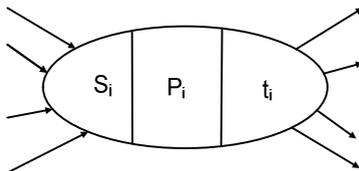


Рис. 2. Вершина ациклического графа, определяющего конвейер.

Здесь  $P_i$  – идентификатор некоторой операции,  $t_i$  – время выполнения операции и  $S_i$  – некоторая вычислимая спусковая функция, определяющая время начала выполнения операции. Каждая операция реализуется своим исполнительным механизмом. Дуги графа определяют отношения предшествования операций. Граф может иметь в общем случае несколько входных и выходных вершин. Каждая операция, определяемая вершиной графа, функционирует в конвейерном режиме следующим образом: на основании отношений предшествования, определяемых входными дугами и спусковой функцией, определяется момент времени запуска операции. Далее после выполнения операции через время  $t_i$  снова вычисляется спусковая функция и снова запускается

выполнение операции и так до бесконечности. Конкретное определение спусковой функции зависит от типа конвейера и будет рассмотрено ниже.

Конвейерные бизнес-процессы в том их определении как это сделано являются широко распространенными. Такие бизнес-процессы выполняются многократно и продолжительное время. Это соответствует той реальности, что предприятие, будучи созданным изначально для производства определенной продукции, ежедневно годами осуществляет некоторый бизнес-процесс, связанный с производством этой продукции. Схематично работу предприятия можно представить следующим образом Рис. 3.

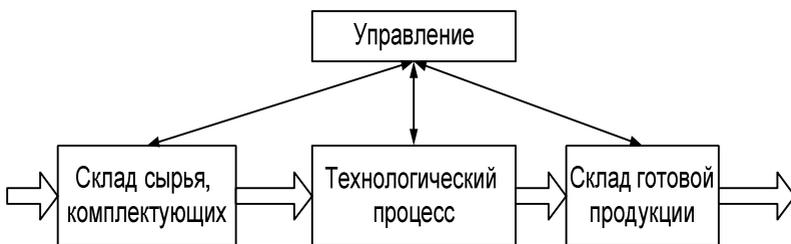


Рис. 3. Схема производственного предприятия

Если входной склад осуществляет бесперебойную поставку сырья и/или комплектующих, а выходной склад бесперебойный прием готовой продукции, то в этом случае достаточно сложный технологический процесс при некоторых допущениях функционирует как конвейерный.

## 2. Модель конвейера

Рассмотрим конечный ориентированный ациклический граф  $G=(A,E)$  с несколькими начальными вершинами и одной конечной.  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  – множество вершин графа, а  $E$  множество дуг, т.е. пар  $(a_i, a_j)$ , определяющих отношение

инцидентности вершин графа. Вершина  $a_j$  называется начальной, если не существует вершина  $a_i \in A$  такая, что  $(a_i, a_j) \in E$ . Вершина  $a_j$  называется конечной, если не существует вершина  $a_i \in A$  такая, что  $(a_j, a_i) \in E$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  - множество начальных вершин, а  $a_n$  - конечная вершина. Будем считать граф связным в том смысле, что в любую вершину существует путь из некоторой начальной вершины и из любой вершины графа существует путь в конечную вершину. Далее везде по тексту статьи, если не оговорено противное, под словом «граф» будет подразумеваться граф с определенными выше свойствами.

Предположим, что каждой вершине графа соответствует некоторая операция  $a_i$  и множество  $E$  дуг графа определяют отношение предшествования операций. Если операция имеет несколько предшествующих ей операций, то начало выполнения операции определяется спусковой функцией.

Для описанного выше графа  $G=(A,E)$  определим конвейер  $K=(G,M,T)$  следующим образом.  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  - множество меток вершин графа, определяющих тип вершины. Вершины графа могут быть трех типов.

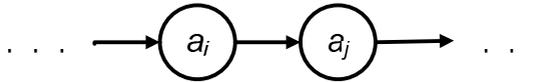
$$m_i = \begin{cases} S - \text{определяет тип вершины "линейная операция"}; \\ AND - \text{определяет тип вершины "операция} \\ \quad \text{со спусковой функцией AND"}; \\ OR - \text{определяет тип вершины "операция} \\ \quad \text{со спусковой функцией OR"} \end{cases}$$

Каждый тип определяет свое поведение.  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  ( $t_i \geq 0$ ) - множество не отрицательных вещественных чисел,  $t_i$  определяет время выполнения операции  $a_i$ .

Вершина типа S имеет графическое изображение в виде круга



и определяет некоторую содержательную операцию бизнес-процесса. Время выполнения операции  $a_i \in A$  равно  $t_i \in T$ . Вершине типа S может предшествовать только одна вершина любого типа. Если имеется конструкция вида

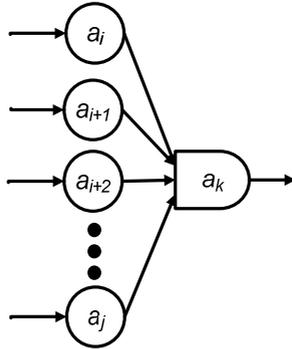


Где  $a_i, a_j$  вершины типа S, то операция  $a_j$ , выполняется циклически, после того как завершилось ее выполнение в предыдущем цикле (освобождение механизма реализации) и завершилось выполнение предшествующей ей операции в текущем цикле. Если операция принадлежит множеству начальных операций  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ , то она начинает выполняться в момент времени равный 0 и далее выполняется циклически, сразу после своего завершения.

Если вершина графа типа AND или OR, то такой вершине могут предшествовать две и более вершины. Спусковая функция AND изображается следующей фигурой



Конструкция вида

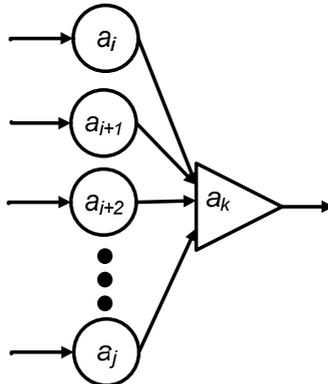


Обозначает, что операция  $a_k$  начнет выполняться после того как завершится выполнение операций  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$ .

Спусковая функция OR изображается следующей фигурой



Конструкция вида



обозначает, что операция  $a_k$  начнет выполняться после того как завершится выполнение хотя бы одной из операций  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$ .

**Определение 1.** Назовем такую структуру, определяемую ациклическим графом с метками вершин, временами выполнения операций и способом функционирования **конвейером**.

**Определение 2.** Выполнение последовательности из  $n$  операций конвейера в соответствии с отношениями предшествования назовем **циклом конвейера**.

Для упрощения аналитических выкладок воспользуемся некоторыми свойствами конвейера.

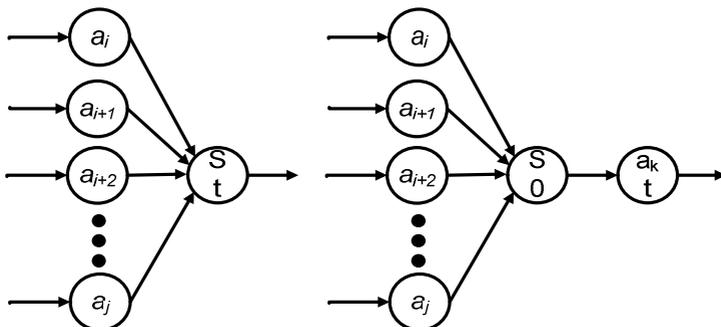


Рис. 4. Выражение операции AND или OR длины  $t$  через операцию нулевой длины.

Операция типа AND или OR не нулевой длины может быть выражена через операцию нулевой длины так как это показано на Рис. 4. Здесь слева операция  $S$  с временем выполнения  $t$  заменяется справа на операцию  $S$  нулевой длины и операцию  $a_k$  длины  $t$ . В свою очередь,  $n$ -арное определение операции AND или OR можно выразить через бинарное Рис. 5. В дальнейшем мы будем рассматривать операции AND и OR как бинарные нулевой длины, если не оговорено противное.

Функционирование конвейера принято описывать диаграммами. Рассмотрим пример приведенного на Рис. 6.

конвейера и его диаграмму. Граф конвейера состоит из 5-ти вершин.

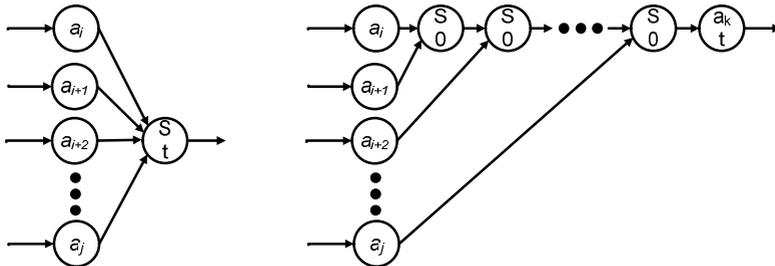


Рис. 5. Выражение  $n$ -арной операции (слева) через бинарную (справа).  $S$ - операция типа AND или OR.

Справа от графа в прямоугольниках указаны через тире номера операций и их продолжительности в условных единицах времени. Ширина прямоугольников пропорциональна длительности операций.

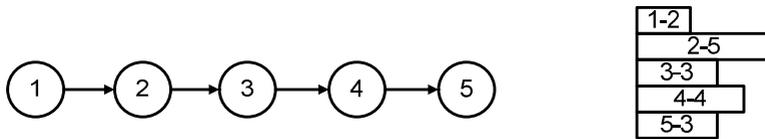


Рис. 6. Пример графа конвейера.

Функционирование конвейера может описываться с помощью диаграмм в системе координат (время, цикл) или диаграмм в системе координат (время, операция) [1]. В первом случае диаграмма рисуется в следующей системе координат: по оси  $x$  отложено время, а по оси  $y$  – номер цикла функционирования конвейера. Считаем, что функционирование конвейера начинается в момент времени равный 0 и нумерация циклов начинается с нуля. Каждое выполнение операции отражается на такой диаграмме соответствующим прямоугольником с номером операции. Пример временной диаграммы такого конвейерного процесса представлен на Рис.

7. На диаграмме отражено 7 конвейерных циклов. Каждый цикл начинается в момент начала выполнения первой операции и заканчивается в момент окончания последней операции (в нашем примере 5-й операции). Нулевой цикл нижний начинается в момент времени равный нулю и имеет номер равный 0. Последний рассматриваемый цикл - верхний.

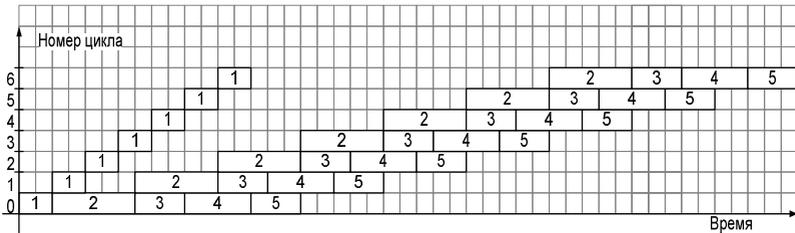


Рис. 7. Пример диаграммы конвейера из 7-ми циклов.

Второй вид диаграммы представляется в системе координат: время, операция-вершина графа, т.е. по оси  $x$  отложено время, а по оси  $y$  номер операции. На этой диаграмме отмечены те отрезки времени для каждой операции, в которые она выполняется. Например, для описанного выше конвейера диаграмма выглядит так, как представлено на Рис. 8.

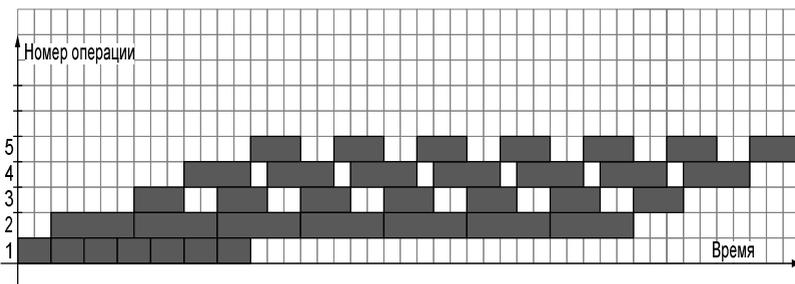


Рис. 8. Диаграмма работы конвейера.

В данном случае использование нумерации операций в самой диаграмме необязательно. Исходя из системы координат понятно, какой вид диаграммы используется.

Введем ряд определений.

**Определение 3.** Диаграмма  $A$  является поддиаграммой диаграммы  $B$ , если время начала и конца исполнения каждой операции в диаграмме  $A$  в точности совпадает с временем начала и конца выполнения этой операции в диаграмме  $B$ .

Пусть дан конвейер  $K=(G,M,T)$ .

**Определение 4.** Будем считать, что фаза начала  $a_i$ -й операции  $k$ -го цикла конвейера  $K$  есть время начала выполнения  $a_i$ -й операции  $k$ -го цикла конвейера  $K$  и будет обозначаться как  $h_{a_i}^k(K)$ , где  $1 \leq i \leq n$  и  $k \geq 0$ .

**Определение 5.** Будем считать, что фаза окончания (или просто фаза)  $a_i$ -й операции  $k$ -го цикла конвейера  $K$  есть время окончания выполнения  $a_i$ -й операции  $k$ -го цикла конвейера  $K$  и обозначим ее как  $f_{a_i}^k(K)$ , где  $1 \leq i \leq n$  и  $k \geq 0$ .

$$(1) \quad f_{a_i}^k(K) = h_{a_i}^k(K) + t_i.$$

**Определение 6.** Фазой  $k$ -го цикла конвейера  $K$  назовем  $F^k(K)$  время окончания выполнения последней операции  $k$ -го цикла конвейера т.е. фазой  $k$ -го цикла является

$$F^k(K) = f_{a_n}^k(K).$$

В нашем примере это время окончания 5-й операции конвейера.

**Определение 7.** Интервалом  $a_i$ -й операции  $k$ -го цикла  $d_{a_i}^k(K)$  (для  $k \geq 1$ ) назовем продолжительность времени между моментами окончаний  $a_i$ -й операции в  $k$ -м и  $(k-1)$ -м циклах.

$$d_{a_i}^k(K) = f_{a_i}^k(K) - f_{a_i}^{k-1}(K)$$

Интервал операции определяется как разность фаз операции в соседних циклах.

**Определение 8.** Интервалом конвейера  $D^k(K)$   $k$ -го цикла (для  $k \geq 1$ ) назовем продолжительность времени между

моментами окончаний последних операций конвейера в  $k$ -м и  $(k-1)$ -м циклах.

$$D^k(K) = d_{a_n}^k(K) = f_{a_n}^k(K) - f_{a_n}^{k-1}(K).$$

Интервалом конвейера является разность фаз конвейера в  $k$ -м и  $(k-1)$ -м циклах. В нашем примере это интервал времени между окончаниями операции №5 в соседних циклах.

*Если с выполнением последней операции конвейера ассоциировать выход готовой продукции конвейера, то интервал конвейера является показателем производительности конвейера (обратной величиной). Чем меньше интервал конвейера, тем больше производительность конвейера.*

Если не возникает неоднозначностей, то будем для простоты не писать в формулах имя конвейера или использовать вместо имени операции ее номер, т.е. использовать записи вида:  $f_i^k(K)$ ,  $f_{a_i}^k$ ,  $d_i^k$ ,  $F^k$  и тому подобные.

Определим функцию  $pred(a)$  для  $a \in A$ , вычисляющую множество вершин графа непосредственно предшествующих вершине  $a$ , т.е.

$$pred(a_i) = \{a_j \mid (a_j, a_i) \in E\}.$$

В этом случае функционирование конвейера  $K=(G, M, T)$  определяется следующими рекуррентными соотношениями.

Для вершины графа типа S:

$$\begin{aligned} h_i^0 &= 0 \quad \text{для } 1 \leq i \leq m, \\ f_i^0 &= t_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq m, \\ f_i^0 &= f_j^0 + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } a_j \in pred(a_i), \\ f_i^k &= f_i^{k-1} + t_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq m \text{ и } k \geq 1, \\ f_i^k &= \max(f_i^{k-1}, f_j^k) + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } k \geq 1. \end{aligned}$$

Для бинарной вершины графа типа AND:

$$\begin{aligned} f_i^0 &= \max(f_p^0, f_q^0) + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i), \\ f_i^k &= \max(f_i^{k-1}, f_p^k, f_q^k) + t_i \\ &\quad \text{для } i > m, k \geq 1 \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i). \end{aligned}$$

Для бинарной вершины типа OR:

$$f_i^0 = \min(f_p^0, f_q^0) + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } a_p, a_q \in \text{pred}(a_i),$$

$$f_i^k = \max(f_i^{k-1}, \min(f_p^k, f_q^k)) + t_i$$

для  $i > m, k \geq 1$  и  $a_p, a_q \in \text{pred}(a_i)$ .

### Пример конвейера

На Рис. 9 приведен пример конвейера по производству табуреток с совмещением некоторых операций. В модели не определены длины операций. Они условны и могут иметь умозрительные значения. Все содержательные вершины-операции представлены в виде прямоугольников составных операций, допускающих их последующую детализацию вплоть до неделимых операций.

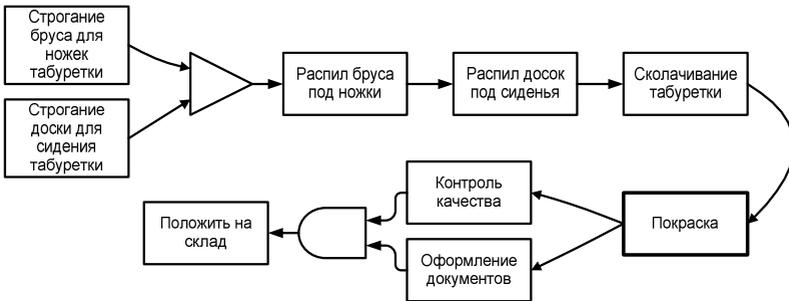


Рис. 9. Пример графа конвейера по производству табуреток.

### 3. Переходный процесс

Рассмотрим пример графа конвейера, представленный на Рис. 10.

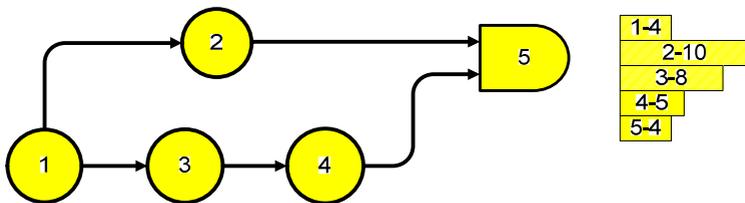


Рис. 10. Пример графа конвейера с операцией AND.

Длительность самой продолжительной операции №2 равна 10 единиц. На Рис. 11 построена временная диаграмма в несколько циклов. Мы увидим, что первый цикл имеет интервал равный 8, потом интервал цикла равен 9, а потом становится равным 10. Из диаграммы видно, что интервал конвейера увеличивается от цикла к циклу до некоторого значения и потом становится постоянным.

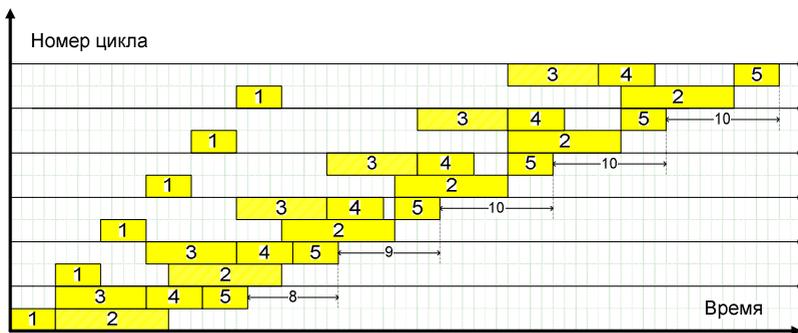


Рис. 11. Диаграмма работы конвейера с увеличивающимся интервалом.

Рассмотрим конвейер на примере другого графа, представленного на Рис. 12.

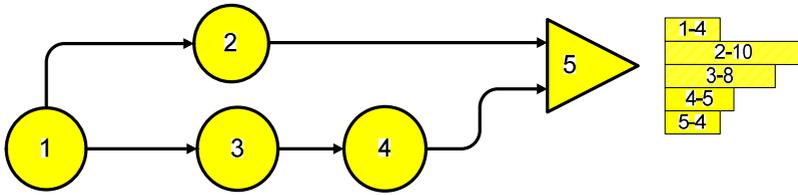


Рис. 12. Пример графа конвейера с операцией OR.

На Рис. 13 построена временная диаграмма в несколько циклов. Первый цикл имеет интервал равный 10, потом интервал цикла равен 9, а потом становится равным 8.

Более глубокие исследования приводят к следующему общему выводу: на некотором начальном этапе функционирования интервал конвейера может изменяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, однако, впоследствии он становится постоянным, равным некоторому значению. Пусть  $k^s$  определяет номер цикла, начиная с которого интервал конвейера становится постоянным. В этом случае назовем режим работы конвейера до цикла  $k^s$  *переходным*, а начиная с номера  $k^s$  *стационарным*.

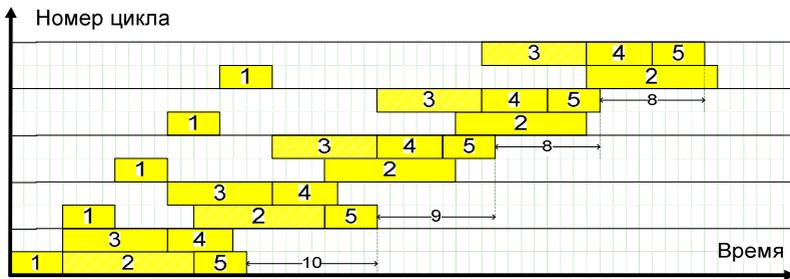


Рис. 13. Диаграмма работы конвейера с убывающим интервалом.

#### 4. Линейный конвейер

Рассмотрим частный случай конвейера – *линейный конвейер*.

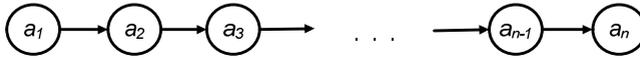


Рис. 14. Граф линейного конвейера.

Граф, определяющий такой конвейер, представлен на Рис. 14, состоит из вершин типа S и является элементарным путем. Примером линейного конвейера является рассмотренное выше производство табуреток.

**Теорема о линейном конвейере.** Пусть мы имеем линейный конвейер  $K = (G, M, T)$ , содержащий последовательность из  $n$  операций  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . Пусть время выполнения  $i$ -й операции равно  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). В этом случае интервал  $d_j^k(K)$   $j$ -й операции линейного конвейера ( $1 \leq j \leq n$ ) не зависит от  $k$  (для  $k \geq 1$ ) и равен

$$(2) \quad d_j^k(K) = \max(t_1, t_2, \dots, t_j).$$

Соответственно, интервал линейного конвейера равен

$$(3) \quad D^k(K) = \max(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Т.е. интервал линейного конвейера не зависит от номера цикла и равен длительности самой продолжительной операции конвейера.  $\square$

Введем для линейного конвейера специальное обозначение



Здесь  $N$  – номер операции,  $F$  – нулевая фаза конвейера и  $D$  – интервал конвейера.

## 5. Свойства конвейера

Введем определение. Пусть мы имеем конвейер  $K=(G,M,T)$  и соответствующий ему ациклический граф  $G=(A,E)$ , состоящий из  $n$  ( $n>1$ ) вершин  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Построим множество  $\mathcal{L}=\{L_i\}$  ( $1 \leq i \leq g$ ) всех путей графа  $G$  из начальных вершин в конечную. Это будут элементарные пути.  $g$ -количество путей. Каждый путь является графом  $\mathcal{L}_i = (A_i, E_i)$ . Поскольку все пути в графе  $G$  элементарные, то мы будем далее использовать термин «путь» в смысле «элементарный путь».

Для каждого графа  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$  определим линейный конвейер  $L$  следующим образом.

Пусть  $\mathcal{L} = (A_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$  граф-путь, где  $A_{\mathcal{L}} \subset A$  и  $E_{\mathcal{L}} \subset E$ . Тогда  $L = (\mathcal{L}, M_{\mathcal{L}}, T_{\mathcal{L}})$ -линейный конвейер, где  $T_{\mathcal{L}} \subset T$  и  $T_{\mathcal{L}} = \{t_i \mid \text{если } a_i \in A_{\mathcal{L}}, \text{ то } t_i \in T_{\mathcal{L}}\}$ , а  $M_{\mathcal{L}} = \{S \mid \text{для } a \in A_{\mathcal{L}}\}$ . Назовем данное множество линейных конвейеров индуцированным конвейером  $K$ .

**Теорема.** Пусть дан конвейер  $K=(G,M,T)$  где  $G=(A,E)$ . Пусть  $\vec{L} = \{L_i\}$  ( $1 \leq i \leq g$ ) множество линейных конвейеров индуцированных конвейером  $K$ . В этом случае для любого цикла конвейера  $K$  с номером  $k$  существует линейный конвейер  $L_i \in \vec{L}$  такой, что его диаграмма  $k$ -го цикла является поддиаграммой диаграммы  $k$ -го цикла конвейера  $K$ . Или для  $\forall k(k \geq 0) \exists L \in \vec{L}$  такой, что для  $\forall a \in A_{\mathcal{L}} \Rightarrow f_a^k(L) = f_a^k(K)$ .

Сущность этой теоремы состоит в следующем. Она доказывает, что на любом цикле работы конвейера его фаза изменяется по закону некоторого индуцированного им линейного конвейера.

Доказательство.

Доказательство осуществим методом описания алгоритма построения множества путей, диаграммы которых являются поддиаграммами  $k$ -го цикла ( $k \geq 0$ ) исходного конвейера. Перед этим дадим ряд определений. Пусть  $\mathcal{L}$  некоторый граф-путь  $\mathcal{L} \in \mathcal{I}$ . Определим *положение*, соответствующее этому пути как конструкцию вида

$$\bar{\mathcal{L}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n].$$

Метасимвол-маркер  $\nabla$  отделяет пройденную часть пути от не пройденной.

Начальное положение имеет вид

$$\bar{\mathcal{L}} = [\nabla a_1, a_2, a_3, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n], \text{ а конечное}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n \nabla], \text{ остальные положения вида}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n] \text{ промежуточные.}$$

Определим состояние значением двух множеств  $(H_i, P_i)$ :  $H_i$  – множество вершин графа  $G$  и  $P_i$  – множество положений.

**Начальное состояние**  $(H_0, P_0)$ : определим следующим образом:

$H_0 = \{ \}$ ;  $P_0$  – содержит начальные положения для всех путей множества  $\mathcal{I}$ .

**Правило перехода.** Пусть  $(H_p, P_p)$  значения множеств некоторого промежуточного состояния. Выберем любую операцию  $a \in A$  и  $a \notin H_p$  такую, что  $pred(a) = \{ \}$  или

$$pred(a) \subset H_p. \text{ Положим } H_{p+1} = H_p \cup \{a\}. \text{ Далее положим}$$

$P_{p+1} = P_p$ , и для каждого положения  $\bar{\mathcal{L}} \in P_{p+1}$  такого, что

$$\bar{\mathcal{L}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n], \quad a = a_{j+1} \text{ и } f_a^k(K) = f_a^k(L)$$

заменить данное положение на положение вида

$$\bar{\mathcal{L}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, a_{j+1} \nabla a_{j+2}, \dots, a_n]. \text{ Если же } a = a_{j+1} \text{ и}$$

$f_a^k(K) \neq f_a^k(L)$ , то исключить данное положение из множества  $P_{p+1}$ .

**Конечное состояние**  $(H_n, P_n)$  такое, что  $H_n = A$ , а  $P_n$  – состоит из конечных положений тех путей, диаграммы  $k$ -х

циклов которых являются поддиаграммами конвейера  $K$ . Это следует из правила переходов алгоритма.

Алгоритм заключается в том, что начав с начального состояния  $(H_0, P_0)$ , последовательно  $n$ -раз применяется правило перехода

$$(H_0, P_0) \rightarrow (H_1, P_1) \rightarrow (H_2, P_2) \rightarrow \dots \rightarrow (H_n, P_n),$$

до перехода в конечное состояние.

Доказательство.

Доказательство корректности алгоритма осуществим методом математической индукции. Сначала докажем корректность для  $k=0$ . Далее предположим, что свойство выполняется для некоторого произвольного цикла  $k>0$  и докажем, что в этом случае оно выполняется и для цикла с номером  $k+1$ .

Шаг 1. Пусть  $k=0$ . Начальное состояние  $(H_0, P_0)$  такое, что  $H_0 = \{ \}$ , а  $P_0$  содержит множество начальных положений вида  $[\nabla a_i \alpha]$ , где  $1 \leq i \leq m$  и  $\alpha \in A^+$ . Доказательство для  $k=0$  так же осуществим методом математической индукции. Сначала докажем, что свойство выполняется для произвольной начальной операции. Потом предположим, что свойство выполняется для всех операций  $a_i \in H$  ( $1 \leq i < n$ ) и докажем, что условие выполняется для произвольной операции  $a \notin H$  и такой, что  $pred(a) \subset H$ . Для произвольной начальной операции свойство выполняется, т.к. для любого  $a_i$  ( $1 \leq i \leq m$ )  $f_{a_i}^0(K) = t_i$  в соответствии с (1), а с другой стороны существует путь  $\mathcal{L}$  и соответствующее ему начальное положение  $\bar{\mathcal{L}} = [\nabla a_i \alpha]$  такое, что  $f_{a_i}^0(L) = t_i$ . Таким образом существует  $L$  такой, что  $f_{a_i}^0(K) = f_{a_i}^0(L)$  для  $1 \leq i \leq m$ .

Положим, что мы находимся в состоянии  $(H_p, P_p)$  ( $p > m$ ), т.е.  $H_p$  содержит  $p$  вершин, а  $P_p$  некоторое множество промежуточных положений. Выберем из  $A$  вершину

$a$  такую, что  $pred(a) \subset H_p$ . Поскольку вершина может быть трех типов S, AND или OR рассмотрим три варианта.

Вариант 1. Пусть  $a$  вершина типа S. Для  $a$  существует хотя бы один путь  $\mathcal{L}$  и соответствующее ему положение такое, что  $\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и  $pred(a) = \{c\}$ . По определению  $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$ . С другой стороны  $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$ . Поскольку  $c \in H$  то  $f_c^0(K) = f_c^0(L)$ . Следовательно  $f_a^0(K) = f_a^0(L)$ .

Вариант 2. Пусть  $a$  вершина типа AND и  $pred(a) = \{c, b\}$ , где  $c$  и  $b$  некоторые вершины принадлежащие  $H_p$ . Пусть для  $c$  выполняется свойство  $f_c^0(K) = \max(f_c^0(K), f_b^0(K))$ . По предположению математической индукции для  $c$  существует  $\mathcal{L}$  такой, что

$$(4) \quad f_c^0(K) = f_c^0(L)$$

в то же время  $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$ . С другой стороны в  $P_p$  существует положение  $\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и  $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$ . Следовательно  $f_a^0(K) = f_a^0(L)$ .

Вариант 3. Пусть  $a$  вершина типа OR. В этом случае  $pred(a) = \{c, b\}$ , где  $c$  и  $b$  некоторые вершины, принадлежащие  $H_p$ . Пусть для  $c$  выполняется свойство  $f_c^0(K) = \max(f_c^0(K), f_b^0(K))$ . По предположению математической индукции для  $c$  существует  $\mathcal{L}$  такой, что

$$(5) \quad f_c^0(K) = f_c^0(L)$$

в то же время  $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$ . С другой стороны в  $P_p$  существует положение  $\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и  $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$ . Следовательно  $f_a^0(K) = f_a^0(L)$ .

Шаг 2. Пусть свойство выполняется для всех  $a \in A$  в  $k$ -м цикле ( $k > 0$ ), т.е. для любого  $a$  существует путь  $\mathcal{L}$  такой, что  $f_a^k(K) = f_a^k(L)$ .

Шаг 3. Докажем, что в этом случае свойство выполняется для  $k+1$  цикла.

Для начальной вершины  $a_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) очевидно, что существует  $\mathcal{L}$  такой что  $\bar{\mathcal{L}} = [\nabla a_i \alpha]$   $\alpha \in A^+$  и  $f_{a_i}^{k+1}(K) = f_{a_i}^k(K) + t_{a_i} = f_{a_i}^k(L) + t_{a_i}$ .

Положим, что мы находимся в состоянии  $(H_p, P_p)$  ( $p > m$ ), т.е.  $H_p$  содержит  $p$  вершин, а  $P_p$  некоторое множество промежуточных положений. Выберем из  $A$  вершину  $a$  такую, что  $pred(a) \subset H_p$  и  $a \notin H_p$ . Поскольку вершина может быть трех типов S, AND или OR рассмотрим три варианта.

Вариант 1. Пусть  $a$  вершина типа S. Для  $a$  существует хотя бы один путь  $\mathcal{L}$  и соответствующее ему положение такое, что  $\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и  $pred(a) = \{c\}$ . По определению  $f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$ . С другой стороны по предположению метода индукции  $f_a^k(K) = f_a^k(L)$  и  $f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L)$  поскольку  $c \in H_p$  следовательно  $f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L)$ .

Вариант 2. Пусть  $a$  вершина типа AND. В этом случае  $pred(a) = \{c, b\}$ , где  $c$  и  $b$  некоторые вершины принадлежащие  $H_p$ . По определению

$$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K)) + t_a.$$

В силу условий метода индукции

$$f_a^k(K) = f_a^k(L), \quad f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L), \quad f_b^{k+1}(K) = f_b^{k+1}(L).$$

Пусть для  $c$  выполняется свойство

$$f_c^{k+1}(K) = \max(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K)).$$

В  $P$  существует положение

$\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и следовательно

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$  подставим значения

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(L), f_c^{k+1}(L)) + t_a$ . Правая часть является определением фазы для линейного конвейера и следовательно

$$f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L).$$

Вариант 3. Пусть  $a$  вершина типа OR. В этом случае  $pred(a) = \{c, b\}$ , где  $c$  и  $b$  некоторые вершины принадлежащие  $H_p$ . По определению

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), \min(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K))) + t_a$ . В силу условий метода индукции

$$f_a^k(K) = f_a^k(L), \quad f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L), \quad f_b^{k+1}(K) = f_b^{k+1}(L).$$

Пусть для  $c$  выполняется свойство

$f_c^{k+1}(K) = \min(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K))$ . В  $P$  существует положение

$\bar{\mathcal{L}} = [\alpha c \nabla a \beta]$ , где  $\alpha, \beta \in A^*$  и следовательно

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$  подставим значения

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(L), f_c^{k+1}(L)) + t_a$ . Правая часть является

определением фазы для линейного конвейера и следовательно

$$f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L). \text{ ч.т.д.}$$

## 6. Синтез конвейеров.

Рассмотрим конвейер, который содержит операции типа AND и OR, связующие между собой линейные конвейеры. Чтобы описать его поведение рассмотрим детально некоторые конструкции.

Первая конструкция вида линейный конвейер

$$\boxed{f^0(L), d(L)}$$

Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на Рис. 15.

Графиком фазы является прямая, наклон которой определяется величиной интервала цикла, а интервал является постоянной, не зависящей от номера цикла. Реальные значения фазы являются дискретными точками, лежащими на данной прямой.

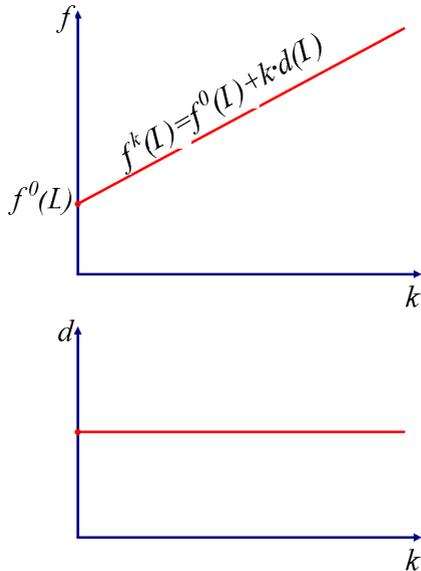
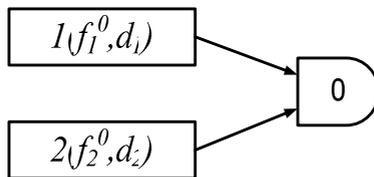


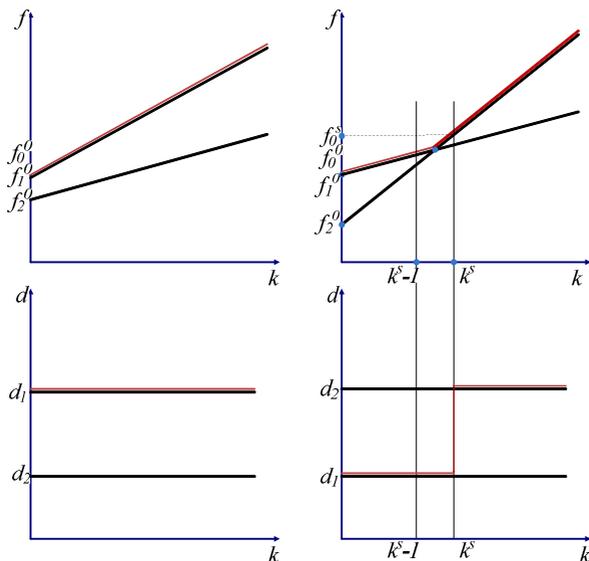
Рис. 15. Графики изменения фазы и интервала линейного конвейера.

Рассмотрим конструкцию AND вида



Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на Рис. 16.

На рисунке а) представлен случай, когда  $f_1^0 \geq f_2^0$  и  $d_1 \geq d_2$  на графике эти функции представлены черными линиями. В этом случае фаза и интервал конструкции будут равны фазе и интервалу 1-го линейного конвейера, т.к. всегда будет выполняться условие  $f_1^k \geq f_2^k$ . На рисунке б) представлен случай, когда  $f_1^0 > f_2^0$  и  $d_1 < d_2$ . В этом случае до цикла с номером  $k^s$  будет выполняться условие  $f_1^k \geq f_2^k$  и 1-й конвейер будет определять фазу и интервал конструкции, а после цикла с номером  $k^s$  будет выполняться условие  $f_1^k \leq f_2^k$  и 2-й конвейер будет определять фазу и интервал конструкции.



а)  $f_1^0 \geq f_2^0$  и  $d_1 \geq d_2$       б)  $f_1^0 > f_2^0$  и  $d_1 < d_2$

Рис. 16. Графики изменения фазы и интервала операции AND

В результате график изменения фазы и интервала конструкции будет выглядеть так, как он представлен двойной линией. Номер цикла  $k^s$  вычисляется из системы уравнений, определяющих точку пересечения прямых.

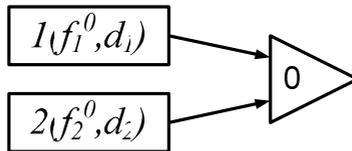
$$\begin{cases} f_0^s = f_1^0 + k^s \cdot d_1 \\ f_0^s = f_2^0 + k^s \cdot d_2 \end{cases}$$

Откуда получаем с учетом того, что  $k^s$  целое число

$$k^s = \left\lfloor \frac{f_1^0 - f_2^0}{d_2 - d_1} \right\rfloor + 1,$$

где  $\lfloor x \rfloor$  - обозначает нижнее целое значения  $x$ .

Третий вариант конструкция OR вида



Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на Рис. 17. Данный случай симметричен предыдущему, а  $k^s$  вычисляется так же как и в предыдущем варианте.

Чтобы иметь представление об общей картине процесса рассмотрим еще одну конструкцию на Рис. 18.

Соответствующие графики для фазы и интервала представлены на Рис. 19.

Из анализа данной конструкции можно сделать вывод, что интервал цикла и связанная с ним скорость изменения фазы

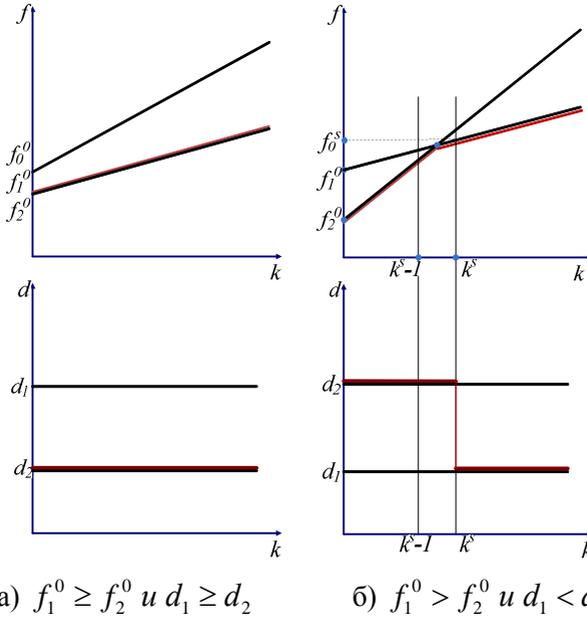


Рис. 17. Графики изменения фазы и интервала операции OR

меняются до некоторого значения  $k^s$ , а потом устанавливается некоторое постоянное значение интервала.

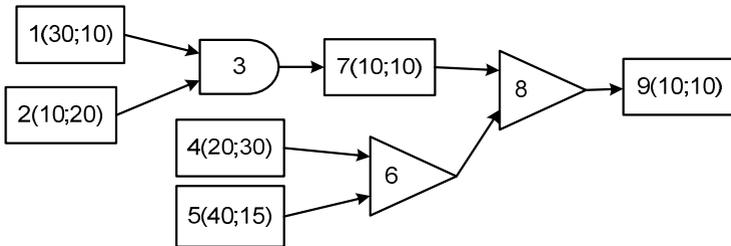


Рис. 18. Пример графа конвейера

Работа конвейера до цикла  $k^s$  осуществляется в переходном режиме, а после  $k^s$  в стационарном.

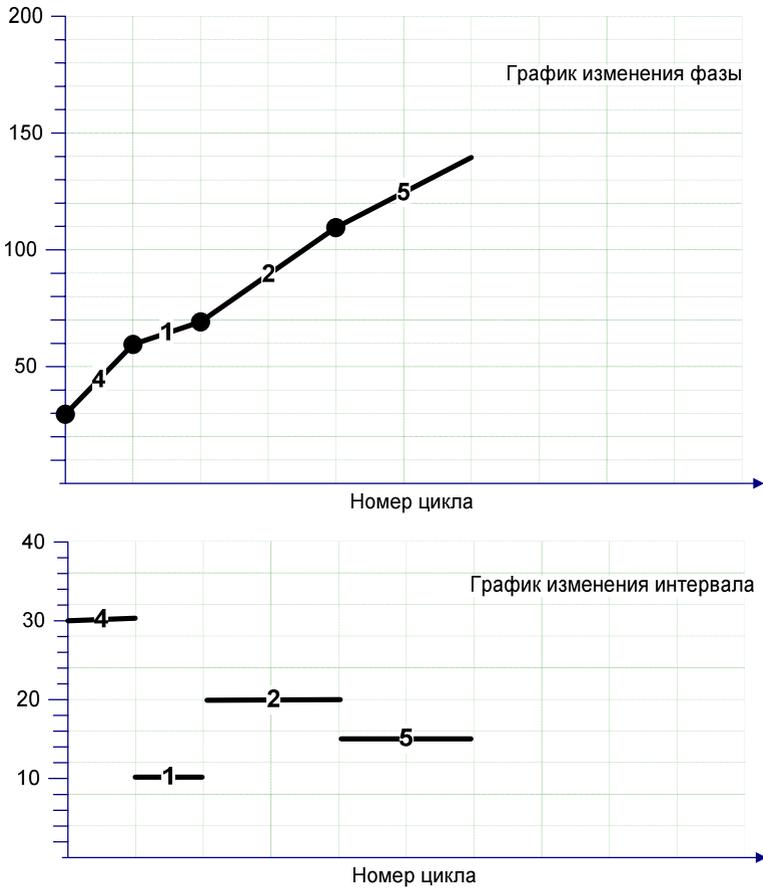


Рис. 19. Пример изменения фазы и интервала конвейера.

Опишем конвейер следующим набором характеристик  $(f^0, d^s, k^s, f^s)$ , где

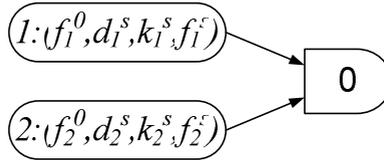
$f^0$  - начальная фаза конвейера;

$d^s$  - интервал конвейера в стационарном режиме;

$k^s$  - номер цикла начала стационарного режима;

$f^s$  - фаза начала стационарного режима.

Рассмотрим случай объединения двух конвейеров с помощью операции со спусковой функцией AND, т.е. рассмотрим конвейер вида



И вычислим его характеристики:  $(f_0^0, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$ .

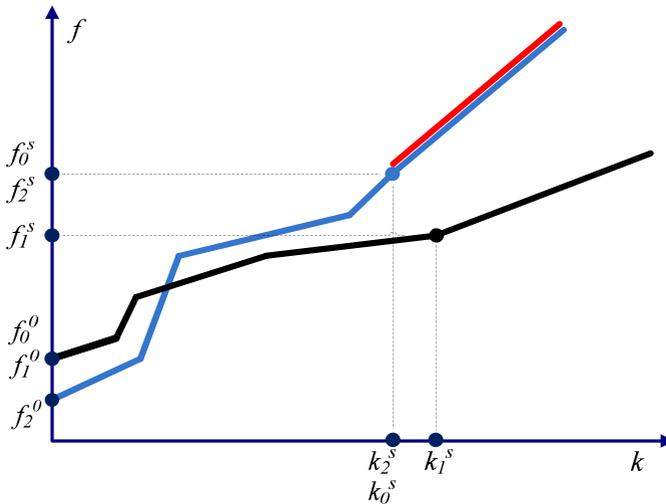


Рис. 20. Графики изменения фазы. Вариант 1.

При любых комбинациях параметров очевидно, что  $f_0^0 = \max(f_1^0, f_2^0)$ ;  $d_0^s = \max(d_1^s, d_2^s)$ ;

Возможны два существенно различающихся варианта.

1-й вариант определяется параметрами

$$f_1^s \leq f_2^s \quad \text{и} \quad d_1^s \leq d_2^s$$

Пример такой ситуации приведен на Рис. 20. В этом случае остальные характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = k_2^s; \quad f_0^s = f_2^s.$$

2-й вариант определяется отношениями

$$f_1^s > f_2^s \quad \text{и} \quad d_1 < d_2.$$

Пример такой ситуации приведен на Рис. 21.

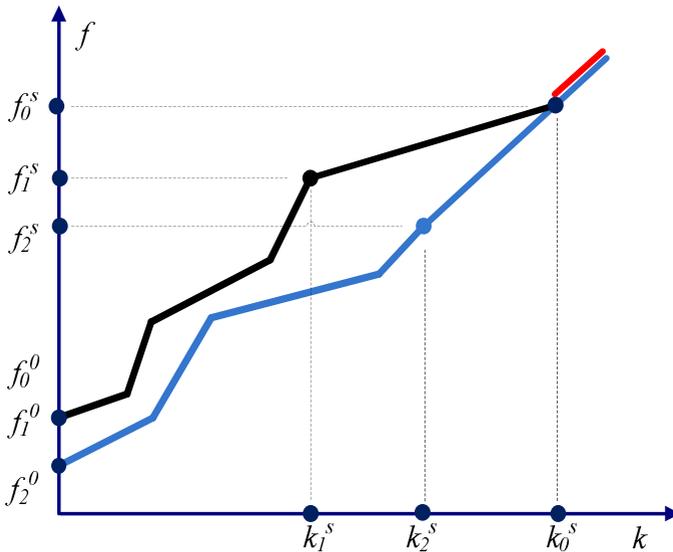


Рис. 21. Пример изменения фазы конвейера. Вариант 2.

В этом случае характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2 - k_1^s \cdot d_1}{d_2 - d_1} \right\rfloor + 1; \quad f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2.$$

где  $\lfloor x \rfloor$  - обозначает нижнее целое  $x$ .

При анализе следует иметь в виду, что фаза является строго монотонной функцией и если  $f_1^s > f_2^s$ , то  $f_1^s > f_2^k$  для любого  $k \leq s$ .

Чтобы точно описать вычисление параметров  $(f_0^s, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$  опишем в каких областях первой четверти по каким формулам вычисляются эти характеристики.

Рассмотрим случай, когда  $d_1^s \leq d_2^s$ . Для того, чтобы определить координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  разобьем первую четверть плоскости одним лучом и двумя отрезками на 3 множества. Обозначим их как  $O_1, O_2, O_3$ . В каждом из этих множеств координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются по своим формулам. Разбиение на области показано на Рис. 22.

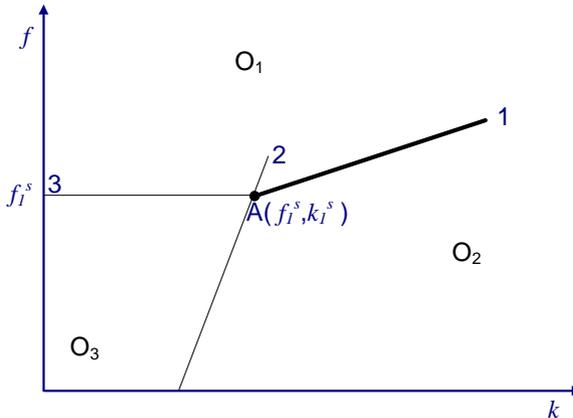


Рис. 22. Разбиение первой четверти на три области.

Луч 1 определяется уравнением изменения фазы первого конвейера в стационарном режиме, начиная с точки  $A(f_1^s, k_1^s)$ .

$$f = f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s.$$

Отрезок 2 (как часть прямой) определяется уравнением изменения фазы второго конвейера, смещенная так, чтобы она проходила через точку  $A(f_1^s, k_1^s)$ , т.е. уравнением

$$f = f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s.$$

Отрезок 3 определяется уравнением

$$f = f_1^s.$$

Множество  $O_1$  определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s \\ f \geq f_1^s \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Множество  $O_2$  определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f < f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s \\ f < f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_2^s \\ f > 0 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Множество  $O_3$  определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f < f_1^s \\ f \geq f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_2^s \\ f > 0 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_1$ , см. Рис. 23,

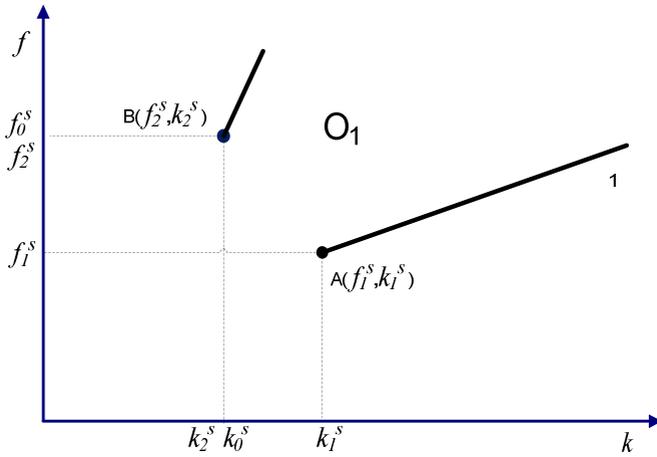


Рис. 23. Вариант, когда точка  $(f_2^s, k_2^s)$  в области  $O_1$ .

то координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_2^s \\ k_0^s = k_2^s \end{cases}.$$

Это обусловлено тем, что если  $f_2^s > f_1^s$ , то в силу монотонности функции  $f$ , для любого  $k$  такого что  $k_2^s \leq k$  следует  $f_2^s > f_1^k$ , следовательно стационарный процесс начнется с цикла  $k_2^s$ .

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_2$  и  $d_1^s < d_2^s$ , см. Рис. 24, то координаты точки  $C(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases}$$

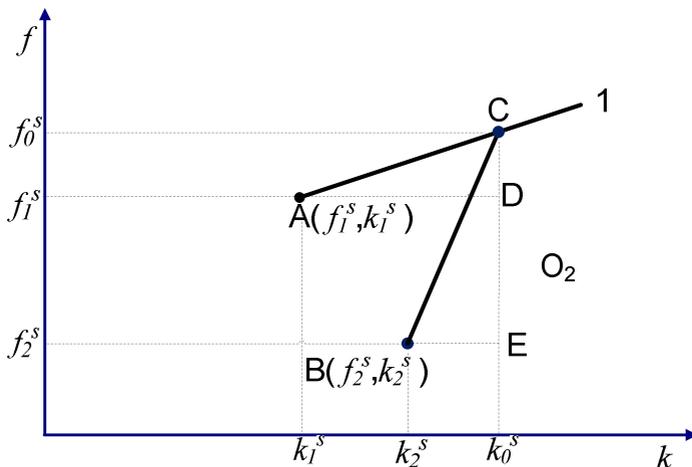


Рис. 24. Вариант, когда точка  $(f_2^s, k_2^s)$  в области  $O_2$ .

Откуда следует

$$k_0^s = \left[ \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right] + 1$$

$$f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s$$

Следует отметить, что использовать для вычисления фазы  $f_0^s$  уравнение прямой 1

$$f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s$$

неправильно, т.к. точка  $(f_0^s, k_0^s)$  лежит на прямой, соответствующей второму конвейеру.

Если  $d_1^s = d_2^s$ , то

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s \\ k_0^s = k_1^s \end{cases}$$

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_3$ , см. Рис. 25,

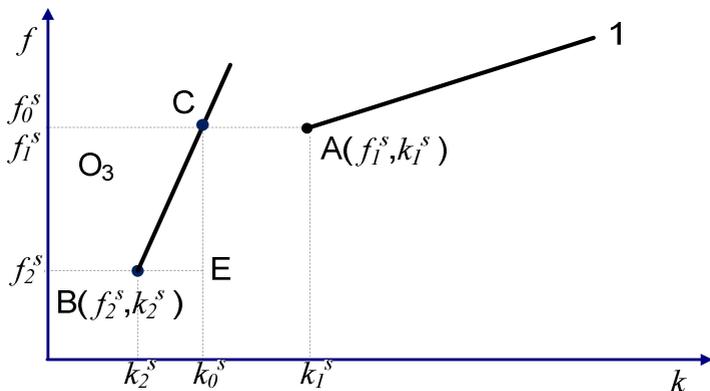


Рис. 25. Вариант, когда точка  $(f_2^s, k_2^s)$  в области  $O_3$ .

то координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f = f_1^s \\ f = f_2^s + (k - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases}$$

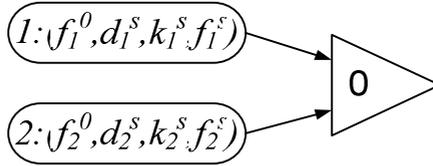
Или

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s \\ f_1^s - f_2^s = (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s \\ k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s} \right\rfloor + 1 \end{cases}$$

Рассмотрим случай объединения двух полных конвейеров с помощью операции со спусковой функцией OR, т.е. рассмотрим конвейер вида



И вычислим его характеристики:  $(f_0^0, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$ .

При любых комбинациях параметров очевидно, что

$$f_0^0 = \min(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \min(d_1^s, d_2^s);$$

Далее возможны два существенно различающихся варианта.

1-й вариант определяется параметрами

$$f_1^s \leq f_2^s \quad \text{и} \quad d_1^s \leq d_2^s$$

Пример такой ситуации приведен на Рис. 26.

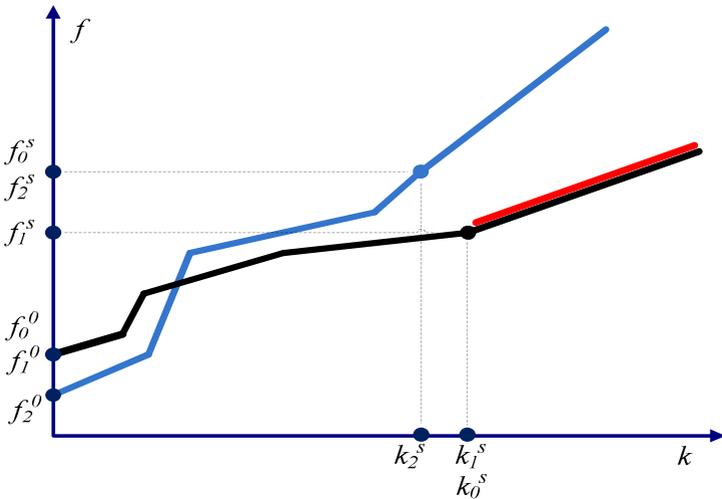


Рис. 26. График изменения фазы конвейера

В этом случае остальные характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = k_1^s; \quad f_0^s = f_1^s$$

2-й вариант определяется отношениями

$$f_1^s > f_2^s \quad \text{и} \quad d_1 < d_2$$

Пример такой ситуации приведен на Рис. 27.

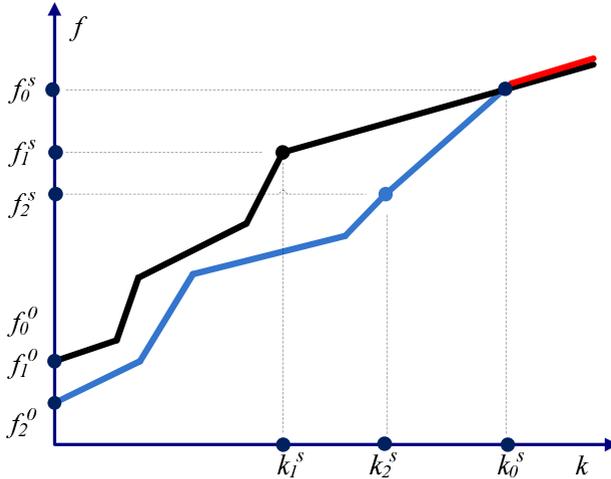


Рис. 27. График изменения фазы конвейера

В этом случае характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = \left\lceil \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2 - k_1^s \cdot d_1}{d_2 - d_1} \right\rceil + 1; \quad f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1$$

Для рассмотрения всех возможных вариантов осуществим разбиение первой четверти системы координат на области тремя лучами, исходящими из точки  $A(f_1^s, k_1^s)$ .

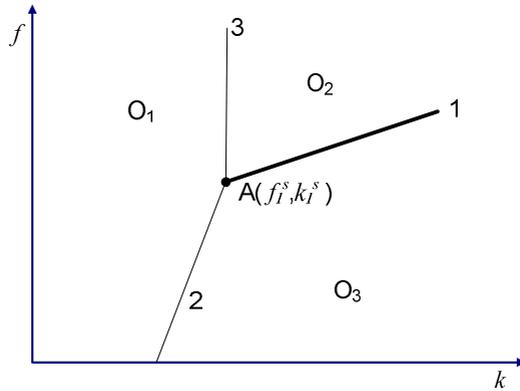


Рис. 28. Разбиение первой четверти на три области

Эти лучи определяются следующими уравнениями прямых.

$$f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s;$$

$$f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s;$$

$$k = k_1^s;$$

Область  $O_1$  определяется системой

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s; \\ k \leq k_1^s; \\ f > 0; \\ k \geq 0; \end{cases}$$

Область  $O_2$  определяется системой

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s; \\ k > k_1^s; \end{cases}$$

Область  $O_3$  определяется системой

$$\begin{cases} f < f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s; \\ f < f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s; \\ f > 0; \end{cases}$$

Исходя из предположения, что  $d_2^s \geq d_1^s$  выпишем формулы для трех областей.

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_1$ , то координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s \\ k_0^s = k_1^s \end{cases}.$$

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_2$ , то координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s \\ k = k_2^s \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \\ k_0^s = k_2^s \end{cases}$$

Если точка  $(f_2^s, k_2^s)$  принадлежит множеству  $O_3$  и  $d_1^s < d_2^s$ , то координаты точки  $(f_0^s, k_0^s)$  вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases}$$

Откуда следует

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \\ k_0^s = \left[ \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right] + 1 \end{cases}$$

Если  $d_1^s = d_2^s$  то

$$\begin{cases} f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_1^s \\ k_0^s = \max(k_1^s, k_2^s) \end{cases}$$

Варианты, когда  $d_2^s < d_1^s$  симметричны рассмотренным и сводятся к перестановке индексов.

Мы рассмотрели для понимания процесса элементы синтеза конвейеров, однако нас интересует вычисление характеристик  $(f^0, d^s, k^s, f^s)$  некоторых существующих конвейеров. Для решения этой задачи используем метод структурного анализа – структурной редукции конвейера на основании правил редукции.



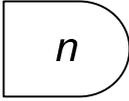
Правило редукции состоит из левой и правой части. В левой части исходная конструкция и ее характеристики, а в правой части результирующая конструкция и ее характеристики. Каждое правило сопровождает набор формул вычисления результирующих характеристик на основании исходных. Для описания конструкций используем следующие примитивы

$$n(t_n)$$

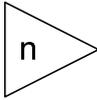
данная конструкция обозначает простую неделимую операцию, характеризующуюся своим номером  $n$  и продолжительностью  $t_n$ .

$$n(f_n^0, d_n, m_n)$$

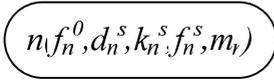
данная конструкция обозначает линейный конвейер, характеризующийся своим номером  $n$ , нулевой фазой  $f_n^0$ , интервалом  $d_n$ . Для последующего вычисления номера операции, определяющей  $d^s$  конвейера, введем номер операции  $m_n$ , определяющей  $d_n$  конвейера.



данная конструкция обозначает спусковую функцию, характеризующуюся маркером *AND* и имеет нулевую длину.



данная конструкция обозначает спусковую функцию, характеризующуюся маркером *OR* и имеет нулевую длину.

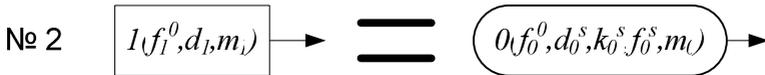


данная конструкция обозначает конвейер, характеризующийся своим номером  $n$  и полным набором параметров, где  $m_n$  - номер операции, определяющий  $d_n^s$ .

После того, как мы дали описания конструкций рассмотрим правила редукции для конвейера. Правило будет состоять из редукции и набора формул вычисляющих параметры для данной редукции.



$$f_0^0 = t_1; \quad d_0 = t_1; \quad m_0 = 1$$

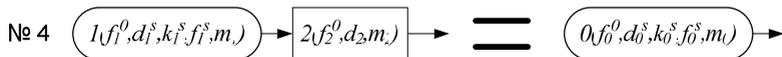


$$f_0^0 = f_1^0; \quad d_0^s = d_1; \quad k_0^s = 0; \quad f_0^s = f_1^0; \quad m_0 = m_1$$



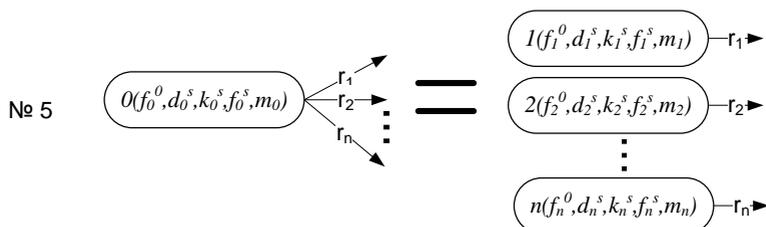
$$f_0^0 = f_1^0 + t_2; \quad d_0^s = \max(d_1^s, t_2); \quad k_0^s = k_1^s \quad f_0^s = f_1^s + t_2;$$

если  $t_2 > d_1^s$  то  $m_0 = n_2$  иначе  $m_0 = m_1$ ;



$$f_0^0 = f_1^0 + f_2^0; \quad d_0^s = \max(d_1^s, d_2); \quad k_0^s = k_1^s \quad f_0^s = f_1^s + f_2^0;$$

если  $d_2 > d_1^s$  то  $m_0 = m_2$  иначе  $m_0 = m_1$ ;



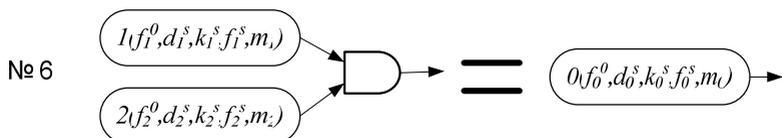
$$f_1^0 = f_0^0; \quad f_2^0 = f_0^0; \quad f_3^0 = f_0^0; \quad \dots \quad f_n^0 = f_0^0;$$

$$d_1^s = d_0^s; \quad d_2^s = d_0^s; \quad d_3^s = d_0^s; \quad \dots \quad d_n^s = d_0^s;$$

$$k_1^s = k_0^s; \quad k_2^s = k_0^s; \quad k_3^s = k_0^s; \quad \dots \quad k_n^s = k_0^s;$$

$$f_1^s = f_0^s; \quad f_2^s = f_0^s; \quad f_3^s = f_0^s; \quad \dots \quad f_n^s = f_0^s;$$

$$m_1 = m_0; \quad m_2 = m_0; \quad m_3 = m_0; \quad \dots \quad m_n = m_0;$$



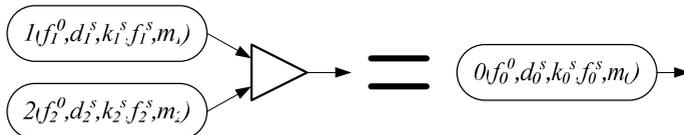
$$f_0^0 = \max(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \max(d_1^s, d_2^s);$$

если  $d_1^s \geq d_2^s$  то  $m_0 = m_1$  иначе  $m_0 = m_2$ ;

$$\begin{array}{l}
\text{если } d_1^s \leq d_2^s \text{ то} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_1 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_2^s; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_2 \left\{ \begin{array}{l} d_1^s < d_2^s \\ \text{то если} \end{array} \right. \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1 \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases} \\
\left. \begin{array}{l} d_1^s = d_2^s \\ \text{то} \end{array} \right\} \begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_3 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s} \right\rfloor + 1; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{если } d_1^s \leq d_2^s \text{ то} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_1 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_2^s; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_2 \left\{ \begin{array}{l} d_1^s < d_2^s \\ \text{то если} \end{array} \right. \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1 \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases} \\
\left. \begin{array}{l} d_1^s = d_2^s \\ \text{то} \end{array} \right\} \begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases} \\
\text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_3 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s} \right\rfloor + 1; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases}
\end{array}$$

№ 7



$$f_0^0 = \min(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \min(d_1^s, d_2^s);$$

если  $d_1^s \leq d_2^s$  то  $m_0 = m_1$  иначе  $m_0 = m_2$ ;

$$\begin{array}{l} \text{если } d_1^s \leq d_2^s \text{ то} \\ \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_1 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases} \\ \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_2 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_2^s \\ f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \end{cases} \\ \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_3 \begin{cases} d_1^s < d_2^s \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1 \\ \text{то} \\ f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s \end{cases} \\ d_1^s = d_2^s \begin{cases} k_0^s = \max(k_1^s, k_2^s); \\ \text{то} \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_1^s; \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{если } d_1^s > d_2^s \text{ то} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (f_1^s, k_1^s) \in O_1 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_2^s; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases} \\
 (f_1^s, k_1^s) \in O_2 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_1^s \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases} \\
 (f_1^s, k_1^s) \in O_3 \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_2^s - f_1^s - k_2^s \cdot d_2^s + k_1^s \cdot d_1^s}{d_1^s - d_2^s} \right\rfloor + 1 \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s \end{cases}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Рассмотренные правила редукции позволяют вычислять характеристики конвейера.

### 7. Пример

Рассмотрим пример анализа конвейера, представленного на Рис. 18.

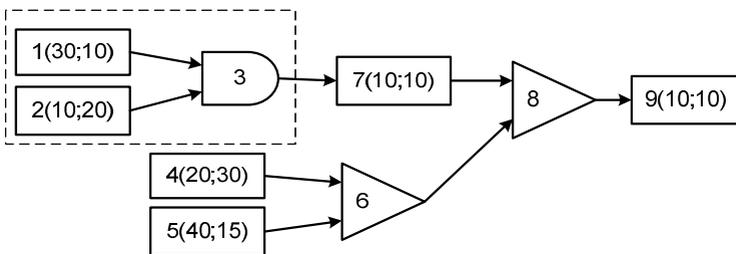


Рис. 29. Граф конвейера с выделенной 1-й основой

Пунктирным прямоугольником будем выделять основы правил и применять к ним правила соответствующего номера с вычислением атрибутов. К 1-й выделенной основе на Рис. 29

применим правила 2, 2 и 6, после чего получим граф вида представленного на Рис. 30.

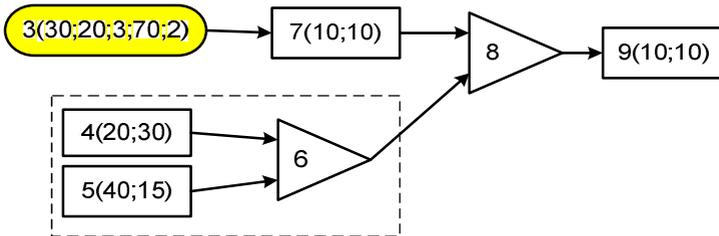


Рис. 30. Граф конвейера с выделенной 2-й основой

Выделим в нем основу и применим правила 2, 2 и 7, после чего получим граф представленный на Рис. 31.

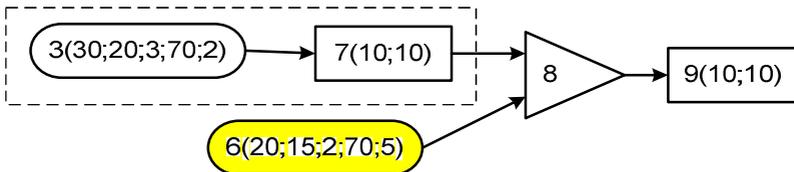


Рис. 31. Граф конвейера с выделенной 3-ей основой

Выделим в нем основу и применим к ней правило №4. Получим граф, представленный на Рис. 32.

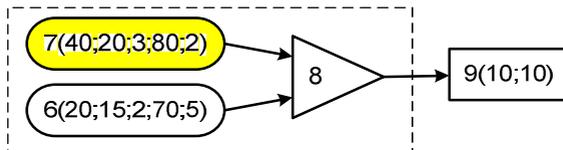


Рис. 32. Граф конвейера с выделенной 4-ой основой

К выделенной основе применим правило №7. В результате получим граф, представленный на Рис. 33.

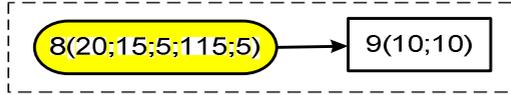


Рис. 33. Граф конвейера с выделенной 5-ой основой

Применив к последней основе правило №4 получим вычисленные характеристики конвейера.

$$9(30;15;5;125;5)$$

После полного анализа графа в заключительной вершине получаем характеристики конвейера. В данном случае анализ показывает, что конвейер имеет следующие характеристики.

$$f_9^0 = 30; \quad d_9^s = 15; \quad k_9^s = 5; \quad f_9^s = 125.$$

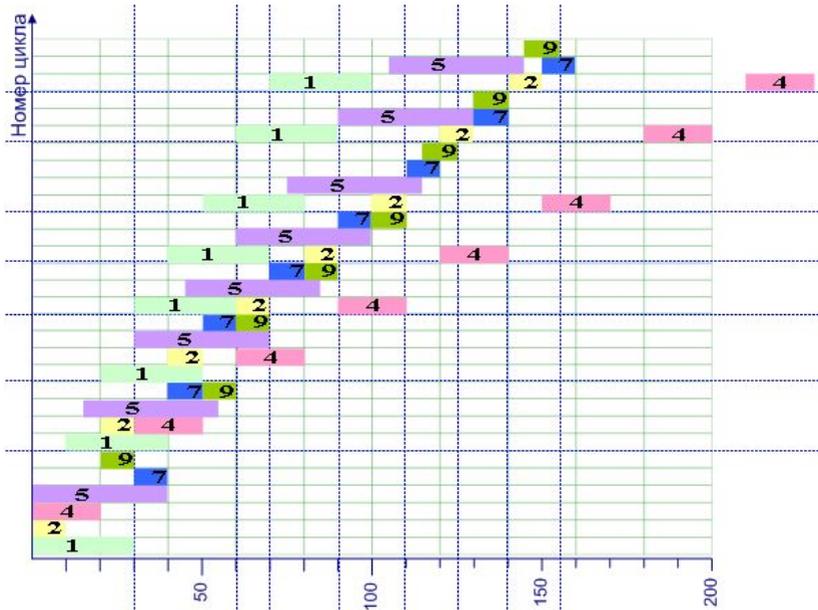


Рис. 34. 8 циклов диаграммы работы конвейера

Вычисленные характеристики полностью соответствуют полученным путем геометрических построений на Рис. 19.

Автором написана и отлажена программа вычисления характеристик конвейера и построение заданного количества циклов временной диаграммы. Для данного конвейера вычисленная диаграмма представлена на Рис. 34. На диаграмме видно, что конвейер меняет 3 раза интервал и на тех циклах, которые вычислены. Все характеристики конвейера в диаграмме соответствуют вычисленным.

## **8. Заключение**

В заключение следует отметить два аспекта. Первый заключается в том, что предложенная модель является ограниченной для полноценного описания реальных конвейеров. Но автор имеет основания предполагать, что она допускает существенное расширение с сохранением свойства вычислимости характеристик и надеется описать методы в дальнейших статьях. Однако даже эта модель, по мнению автора, помогает понять суть функционирования конвейера и некоторые его свойства. Из-за ограниченности объема статьи здесь не изложено решение таких задач как вычисление очередей, балансировка конвейера и т.п.

Второй аспект заключается в том, что предложенную модель следует сравнить с методом имитационного моделирования. Можно показать, что отсутствует признак остановки процесса моделирования. Имитационное моделирование не позволит вычислить такие характеристики как: стационарный интервал конвейера, номер цикла начала стационарного процесса, фаза начала стационарного процесса, определение операции, определяющей стационарные характеристики конвейера.

## **Литература**

1. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*.// М.: СИНТЕГ, 2001. – 117с.
2. МАКЛАКОВ С.В. *Моделирование бизнес-процессов с AllFusion PM* // М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2007. – 224с.
3. АХО А, ХОПКРОФТ ДЖ., УЛЬМАН ДЖ. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов* // М.: Мир, 1979. – 536с.
4. КОУГИ П.М. *Архитектура конвейерных ЭВМ* // М.: Радио и связь, 1985. – С. 9–30.
5. *Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов* // М.: Радио и связь, 1989. – С. 257-273.
6. ФУ К.С. *Структурные методы в распознавании образов* // М.: Мир. 1977.
7. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д.Р. *Потоки в сетях* // М.: Мир, 1966.