

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ КОМПЛЕКСНОЙ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ УНИТАРНОГО КОДА

В.Н. Бурков¹, В.А. Сергеев², Н.А. Коргин³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Аннотация: Рассматривается проблема идентификации механизмов комплексного оценивания. Предлагается подход к решению, основанный на унитарном кодировании. Рассматриваемый подход иллюстрируется рядом примеров идентификации или аппроксимации обучающих наборов, генерируемых несколькими булевыми функциями.

Ключевые слова: идентификация и редукция модели; планирование и контроль производства; моделирование и принятие решений в сложных системах; комплексная оценка; унитарное кодирование; унитарные функции.

1. Вступление

Механизмы комплексного оценивания (МКО) были введены в качестве многомерных систем оценки и ранжирования для управления и контроля в организационных и производственных системах в Советском Союзе в начале 80-х годов прошлого века (например, система АККОРД для электронной промышленности, см. [6, 8, 15]) и используются по сей день (см., например, [1, 2, 5, 14, 17, 20]). МКО могут быть отнесены к классу так называемых методов вербального анализа решений (ВАР) для неструктурированных проблем (см., например, [12, 22]) и предназначены для их структурирования, см., например, [7, 13, 16]. МКО предназначены для порядкового ранжирования (или клас-

¹ Владимир Николаевич Бурков, д.т.н., проф. г.н.с.

(burkov39@gmail.com).

² Владимир Александрович Сергеев, м.н.с. аспирант

(sergeev.bureau@gmail.com).

³ Николай Андреевич Коргин, д.т.н., доцент, г.н.с. (nkorgin@ipu.ru).

сификации) с заранее определенным числом классов конечного набора многокритериальных альтернатив. Основные компоненты МКО – бинарное дерево и матрицы свертки, которые позволяют получать комплексную оценку (КО) основанную на значениях нескольких параметров.

Основной подход к идентификации параметров КО предполагает итеративное взаимодействие с лицами, принимающими решения [5]. Однако, в настоящее время существует запрос на разработку обучающих процедур для МКО, которые довольно обычны для алгоритмов идентификации задач в области искусственного интеллекта. Подобная задача исследовалась лишь для отдельных частных случаев, например, в [3, 11]. В этой работе мы покажем, что довольно популярный в настоящее время подход из области искусственного интеллекта – представление категориальных оценок на основе унитарного кодирования (см., например, [19, 24]) позволяет создавать алгоритмы для идентификации МКО на основе обучающего набора примеров.

2. Основные понятия и определения

Пусть задан конечный набор индикаторов $L \subset \mathbb{N}$, $|L|=l$ на основе их значений должна быть произведена порядковая оценка некоторого объекта или ранжирование нескольких объектов. Для задачи идентификации МКО будем считать, что для каждого индикатора $i \in L$ задан конечный набор $K_i \subset \mathbb{N}$ его возможных значений $k_i \in K_i$, и вектор $k = (k_1, \dots, k_l)^T$ описывает любое возможное состояние оцениваемых объектов. Так же есть конечный набор $K_L \subset \mathbb{N}$ возможных интегральных значений (рангов или классов) $k_L \in K_L$ для любого k .

Определение 1. МКО с бинарным деревом и свертками матриц это отображение $w(\cdot): \prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$ для которого индикаторы

L - листья полного бинарного дерева – ориентированного графа $G = (V, E)$:

1. $V = L \cup \hat{L}$, $\hat{L} = \{l+1, \dots, 2l-1\}$,
2. $E = \{e_{ij}\} \subseteq V \times V$,
 - a. $\forall i \in V \setminus \{2l-1\} \exists! j \in \hat{L} \setminus \{i\} : e_{ij} = 1, \forall t \in V \setminus j e_{it} = 0$,
 - b. $\forall j \in L \forall i \in V e_{ij} = 0$,
 - c. $\forall j \in \hat{L}$
 $\exists! \{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\} : e_{rj} = 1, e_{cj} = 1$.

и $\forall j \in \hat{L}$ (внутренняя вершина дерева, включая вершину)

1. конечный набор $K_j \subset \mathbb{N}$ с возможными значениями $k_j \in K_j$, $K_{2l-1} = K_L$

2. матрица свертки $M_j = [m_{jrc} \in K_j]_{r \in \{0, \dots, |K_j|-1\}, c \in \{0, \dots, |K_j|-1\}}$, $\{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\} : e_{rj} = 1, e_{cj} = 1$ определены. \square

Потенциально данное определение может быть расширено на нечеткие [2, 16, 17] или непрерывные шкалы [7], в рамках данной работы акцент сделан на работу именно с дискретными шкалами как индикаторов (показателей) так и значений, получаемых в узлах дерева свертки [4].

Имея некоторую МКО $w(\cdot)$ обозначим набор всех её матриц свертки как $M_w = \{M_j\}_{j \in \hat{L}}$.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой, таких что $\forall j \in V K_j = K_L$.

Для $L \subset \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_2(L)$ – набор всех бинарных деревьев с листьями из L , $IRM_{L,2}$ – набор всех МКО для любого конкретного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$, $IRM_{L,G} \subseteq IRM_{L,2}$ – набор всех МКО с таким деревом.

Для формализации задачи обучения обозначим $q = (k, k_M)$ – отдельный обучающий пример, $Q \subset K \otimes K_L$, состоящей из значений оценок по каждому из индикаторов и интегральной оценки для данной совокупности значений индикаторов, $K = \prod_{i \in L} K_i$ – обучающий набор (из предоставленных примеров). Обучающий набор является *согласованным* если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q k \neq \tilde{k}$. Обучаю-

щий набор является *полным* если $\forall k \in K \exists q \in Q: q = (k, k_L)$. Обучающий набор задан в *единой шкале* если $\forall i \in L K_i = K_L$.

Для произвольных $\{k, \tilde{k}\} \subseteq K$ обозначим $k \succ \tilde{k}$, если $\forall i \in L \tilde{k}_i \leq k_i$.

Обучающий набор Q называется *монотонным* если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q$: если $k \succ \tilde{k}$, то $\tilde{k}_L \leq k_L$. В таком случае $q \succ \tilde{q}$.

Для некоторого произвольного $Q \subset K \otimes K_L$, можно определить следующие ключевые обозначения, касающиеся проблемы идентификации. Во-первых, можно формализовать задачу *реализуемости* обучающего набора:

Определение 2. $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует Q тогда и только тогда, когда $\forall q \in Q w(k) = k_L$ \square

Обозначим $IRM_{L,2}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q , $IRM_{L,G}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q и построены на основе двоичного дерева $G \in \Gamma_2(L)$. Тогда если $IRM_{L,2}(Q) \neq \emptyset$, то Q – *реализуема на основе* МКО, если $IRM_{L,G}(Q) \neq \emptyset$, тогда Q является *реализуемой на основе* МКО со структурой G .

Также, определение 2 может быть сужено до одного конкретного обучающего примера – $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$ тогда и только тогда, когда $w(k) = k_L$, также определяются $IRM_{L,2}(q)$ и $IRM_{L,G}(q)$.

Если $IRM_{L,2}(Q) = \emptyset$ или $IRM_{L,G}(Q) = \emptyset$ то возможно поставить задачу *аппроксимации*. Для конкретного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $Q_w = \{q \subseteq Q: w(k) = k_L\}$. Для любого произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $U_Q(w) = |Q_w|/|Q|$ – качество аппроксимации с максимумом в 1, если $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$. Тогда задача аппроксимации заключается в поиске $w^*(\cdot) \in \underset{w \in IRM_{M,2}}{Arg \max} U_Q(w)$. В случае если Q является *реализуемой на основе* МКО, тогда любое

корректное решение проблемы аппроксимации должно определять $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$.

Для отдельного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ может быть сформулирована аналогичная задача – найти $w^*(\cdot) \in \underset{w \in IPM_{M,G}}{Arg \max} U_Q(w)$.

Вышеуказанные проблемы носят комбинаторный характер, и их может быть очень трудно решить $|\Gamma_2(L)| = (2l-3)!!$. Но, для определенного $G \in \Gamma_2(L)$ число переменных – количество ячеек всех матриц свертки, минимально по сравнению с любым сетевым представлением функции, которая реализует Q (см. например, [9]) – для МКО с единой шкалой это $(l-1)(|K_L|+1)^2$, в то время как полное число ячеек таблицы представления отображения $\prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$ равно $(|K_L|+1)^l$.

Поэтому МКО может рассматриваться как самое экономное приближение некоторого дискретного отображения $\prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$.

3. Унитарное представление механизмов комплексного оценивания

Для некоторого конечного набора $K \subset \mathbb{N}$ введем его *нормализованное* представление $\bar{K} = \{0, \dots, \kappa\}$ $\kappa = |K| - 1$. Тогда $\forall x \in \bar{K}$ введем унитарное представление как $\tilde{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$. В этой работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой. Тогда для некоторой матрицы свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ результат свертки для любой пары $\{x, y\} \in \{0, \dots, \bar{K}\}^2$, где x определяет выбор столбца матрицы и y – строки, описывается матричным уравнением $\tilde{y}^T M \tilde{x}$. Далее мы также будем использовать так называемую квадратичную форму представления $(M\tilde{x}, \tilde{y})$, упрощая её до $M\tilde{x}\tilde{y}$.

Пример 1. Рассмотрим $|L|=3$. Любой МКО с единой шкалой, может быть представлен как (A, \tilde{b}) , $b = (B \cdot, \dots)$, где $\{x, y, z\} \in \bar{K}^3$, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ расположенными на позициях \cdot, \dots произвольным образом, без повторов и $A = [a_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, $B = [b_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ - некоторые квадратные матрицы.

Мы также применяем операцию унитарного кодирования к матрицам свертки. Дана некоторая матрица свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, обозначим $\tilde{M} = [\tilde{m}_{rc}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, где \tilde{m}_{rc} - унитарное представление m_{rc} в наборе K . Так что унитарная матрица, это матрица, в каждой ячейки которой стоит унитарный вектор. Тогда операция $\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x}$ даст унитарный результат для операции $\tilde{y}^T M \tilde{x}$ описанной выше. Далее мы будем использовать её упрощенное квадратичное представление $\tilde{M} \tilde{x} \tilde{y}$.

Пример 2. Пусть $|K_L|=2$, что можно трактовать как классическую бинарную логику. Тогда

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

с дополнительными унитарными ограничениями: $\forall \{r, c\} \in \{0, 1\}^2 \quad m_{rc}^0 + m_{rc}^1 = 1, \quad \forall t \in \{0, 1\} \quad m_{rc}^t \in \{0, 1\}$.

Например, результат $\tilde{M} \tilde{1} \tilde{0}$:

$$(1, 0) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix}. \square$$

Принимая во внимание тот факт, что любое полное двоичное дерево с l листьями должно иметь $l-1$ внутренних узлов, включая корень, любой МКО может быть закодирован в форме «слова» с $2l-1$ буквами в упрощенном квадратичном представ-

лении. $l-1$ буквами должны обозначаться матрицы свертки (внутренние узлы) и l – листья.

Мы предлагаем следующие правила для кодирования МКО:

1. Первая буква всегда должна обозначать матрицу свертки для корневого узла.

2. Если после буквы матрицы в слове есть только одна буква листа или другая буква матрицы, то запись описывает «спуск» вдоль ветви дерева. Если после некоторой буквы матрицы расположены две буквы листьев, то это «терминальная» матрица свертки в этой ветви дерева, после которой запись «поднимается» вдоль уже описанной ветви в поисках следующей ветви.

3. После любой буквы матрицы сперва должно быть закодировано «низкое» поддерево (с меньшей высотой) из двух, которые исходили из этого узла, а затем второе, «высокое».

Применение унитарного подхода позволяет реализовать подход, в рамках которого любой МКО может быть рассмотрен как последовательность матричных операций с унитарно закодированными значениями листьев в соответствии со «словом», которое описывает соответствующий МКО. Результатом такой последовательности операций является унитарно закодированный результат МКО w , который также может быть обозначен как \tilde{w} .

4. Подходы к решению задач идентификации и аппроксимации с унитарным представлением механизмов комплексного оценивания

Унитарное кодирование может применяться к обучающим примерам так же, как это было описано в предыдущем разделе. Для некоторого обучающего примера $q = (k, k_L)$ мы будем обозначать унитарную версию как $\tilde{q} = (\tilde{k}, \tilde{k}_L)$, где \tilde{k}_L унитарное представление k_L , и \tilde{k} – кортеж k в унитарном представлении.

Если $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$, то $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Из этого следует, что для того, чтобы найти МКО, который реализует некоторый обучающий пример, необходимо решить систему уравнений, полученных на основе унитарного представления этого МКО с дополнительными ограничениями, вытекающими из унитарного представления.

Пример 3. Рассмотрим $|L|=3$ $|K_L|=2$ и обучающий пример $q = ((0,0,0),0)$, унитарное представление представлено в таблице 1.

Таблица 1. Унитарное представление обучающего примера для примера 3.

	\tilde{k}_0	\tilde{k}_1	\tilde{k}_2	\tilde{k}_L
\tilde{q}	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Если МКО имеет структуру $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$, то необходимо решить систему уравнений:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} (1)^\top \\ (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{00}^0 & b_{01}^0 \\ b_{00}^1 & b_{01}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{10}^0 & b_{11}^0 \\ b_{10}^1 & b_{11}^1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^0 & a_{01}^0 \\ a_{10}^0 & a_{11}^0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{00}^1 & a_{01}^1 \\ a_{10}^1 & a_{11}^1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) \\ (0) \end{pmatrix},$$

с унитарными условиями: $\forall \{i, j\} \in \{0,1\}^2 \quad a_{ij}^0 + a_{ij}^1 = 1$,
 $b_{ij}^0 + b_{ij}^1 = 1, \forall t \in \{0,1\} \quad a_{ij}^t \in \{0,1\}, b_{ij}^t \in \{0,1\}$.

Уравнения (1) могут быть упрощены:

$$b_{00}^0 \begin{pmatrix} a_{00}^0 \\ a_{00}^1 \end{pmatrix} + b_{00}^1 \begin{pmatrix} a_{10}^0 \\ a_{10}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

И наконец имеем:

$$b_{00}^0 a_{00}^0 + b_{00}^1 a_{10}^0 = 1,$$

$$b_{00}^0 a_{00}^1 + b_{00}^1 a_{10}^1 = 0.$$

Подойдут например, любые матрицы A и B такие, что $\tilde{a}_{00} = \tilde{b}_{00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – это означает, что будет достаточно определить $a_{00} = b_{00} = 0$ для реализации $q = ((0,0,0),0)$ в МКО с унитарным представлением $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$. \square

Приведенный выше пример также иллюстрирует первое из двух основных положений этой статьи. Для произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$ обозначим $P(w, q)$ – функцию, которая находится в левой части уравнения, в котором 1 находится в правой части. В следствии унитарного подхода есть только одна такая функция для любого q .

Утверждение 1. Для любых $L \subset N$, $K \subset N$, МКО с единой шкалой $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$ и любого возможного q в единой шкале: $P(w, q)$ – однородный полиномом степени $l-1$ который может быть представлен как сумма κ^{l-2} уникальных компонент:

$$P(w, q) = \sum_{j=1}^{\kappa^{l-2}} p_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, \kappa^{l-2}\} \quad p_j = \prod_{i=1}^{l-1} m_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, l-1\} \quad m_i -$$

одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы \tilde{M}_i , $\{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}$ – набор всех унитарно закодированных матриц свертки МКО w ,

$$P(w, q) \in \{0, 1\};$$

$$P(w, q) = \tilde{w}(\tilde{k})^T \tilde{k}_L;$$

$$IRM \ w \text{ реализует } q \Leftrightarrow P(w, q) = 1. \square$$

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Следствие 1. Для любых $L \subset N$, $K \subset N$, и любого возможного q в единой шкале $IRM_{L,2}(q) = \underset{w \in IRM_{L,2}}{Arg \max} P(w, q)$. \square

Доказательство следствия 1 приведено в приложении.

В дополнение к следствию указанному выше, из утверждения 1, следует, что для идентификации $IRM_{L,G}(q)$, для некоторого

го бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$, достаточно рассмотреть релаксированную проблему оптимизации:

$$(2) \quad \max_{w \in IRM_{L,G}} P(w, q)$$

при ограничениях:

$$(3) \quad \forall \{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i \quad \tilde{m} \in [0; 1]^l, |m| = 1.$$

И любое решение этой задачи должно обеспечивать значение $P(w, q) = 1$.

Чтобы аппроксимировать некоторый обучающий набор $Q \subset K \otimes K_L$ по критерию, представленному в разделе 2, необходимо найти такой МКО, который реализует максимальное число обучающих примеров из этого набора. С учетом (2) и (3) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой решение задачи аппроксимации МКО с единой шкалой, состоит в решении задачи максимизации:

$$(4) \quad \max_{w \in IPM_{M,G}} \sum_{q \in Q} P(w, q)$$

при ограничениях:

$$(5) \quad \forall \{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i \quad \tilde{m} \in [0; 1]^l, |m| = 1. \square$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Следствие 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ любой $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой может быть реализован с помощью МКО с единой шкалой тогда и только тогда, когда существует $w \in IRM_{L,2}(Q)$, такое что $\sum_{q \in Q} P(w, q) = |Q|$. \square

Доказательство следствия 2 следует очевидным образом из определений задач реализуемости и аппроксимации.

Проиллюстрируем, как результаты разработанного подхода могут быть реализованы в отдельных случаях. Как уже упоминалось ранее, мы ограничимся рассмотрением примерами с двоичной логикой.

5. Примеры идентификации

Давайте начнем с типичного примера проверки подходов к обучению ИИ – реализации *XOR* (см., например, [23]).

Пример 4. Булева функция *XOR* $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$. $|I| = 2$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров (его таблица истинности) в унитарной форме представлен в таблице 2.

Таблица 2. Обучающий набор в унитарном представлении для примера 6.

	\tilde{x}_1^T	\tilde{x}_2^T	\tilde{f}^T
q^1	(1,0)	(1,0)	(1,0)
q^2	(0,1)	(0,1)	(1,0)
q^3	(1,0)	(0,1)	(0,1)
q^4	(0,1)	(1,0)	(0,1)

Существует только одна допустимая структура МКО – $\tilde{A}\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$. Необходимо решить систему уравнений в матричной форме $\forall q \in Q$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_2^0(q) \\ \tilde{x}_2^1(q) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{00}^0 \\ \tilde{a}_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{01}^0 \\ \tilde{a}_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{10}^0 \\ \tilde{a}_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^0 \\ \tilde{a}_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^0(q) \\ \tilde{x}_1^1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}^0(q) \\ \tilde{f}^1(q) \end{pmatrix}.$$

Из нее следует, что $\forall w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ $P(w, q^1) = a_{00}^0$, $P(w, q^2) = a_{01}^0$, $P(w, q^3) = a_{10}^1$, $P(w, q^4) = a_{01}^1$. Так что существует только одно допустимое решение с $\sum_{q \in Q} P(w, q) = 4$, для него:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица A – соответствует функции *XOR*.

Пример 5. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. $|M| = 3$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров представлен в таблице 3.

Решение задач (4), (5) для этого набора достигают два МКО, со значением (4) равным 8 – обе реализуют этот набор.

Таблица 3. Обучающий набор для примера 7.

	x_1	x_2	x_3	f
q^1	0	0	0	0
q^2	0	0	1	0
q^3	0	1	0	0
q^4	1	0	0	0
q^5	1	1	0	1
q^6	1	0	1	0
q^7	0	1	1	1
q^8	1	1	1	1

Оба решения имеют похожие структуры – $\tilde{A}\tilde{x}_1\tilde{B}\tilde{x}_2\tilde{x}_3$. Оптимизационный функционал (4) для этой структуры:

$$(\tilde{b}_{00}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{01}^0 + \tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{00}^0 + (\tilde{b}_{00}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{10}^0 + \\ + \tilde{b}_{00}^0\tilde{a}_{01}^0 + (\tilde{b}_0^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{01}^1 + \tilde{b}_{00}^1\tilde{a}_{11}^0 + (\tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{11}^1$$

Матрицы свертки для первого решения:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы в точности соответствуют функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. Матрицы свертки для второго МКО:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы соответствуют другому представлению той же функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$. \square

Пример 6. Изменяя значение f для обучающего примера q^7 в таблице 6 с 0 на 1 получается обучающий набор для другой булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3)$. Оптимизационный функционал (4) $\forall IRM \in \text{IPM}_{M,2}$ для такого обучающего набора:

$$\begin{aligned} & (\tilde{b}_{00}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{01}^0) \tilde{a}_{00}^0 + \tilde{b}_{11}^0 \tilde{a}_{00}^1 + (\tilde{b}_{00}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{01}^1) \tilde{a}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^1 \tilde{a}_{10}^1 + \\ & + \tilde{b}_{00}^0 \tilde{a}_{01}^0 + (\tilde{b}_{01}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^0) \tilde{a}_{01}^1 + \tilde{b}_{00}^1 \tilde{a}_{11}^0 + (\tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{11}^1) \tilde{a}_{11}^1. \end{aligned}$$

Решение задач (4), (5) дает максимальное значение 7 – это значит, что невозможно реализовать как минимум один из обучающих примеров. В частности, оба МКО, которые реализуют набор обучения для примера 5, достигают такого значения для целевой функции – реализуют все примеры обучения, кроме измененного примера q^7 . □

Примеры 5 и 6 являются иллюстрацией для пары конкретных функций из класса булевых функций трех переменных. Всего таких функций 256, из которых только 20 являются неубывающими. Все они могут быть описаны с помощью таблицы истинности, например, как таблица 6. Мы провели вычислительный эксперимент, чтобы определить для каждой функции, можно ли реализовать ее с помощью МКО, определяя параметры соответствующего ей МКО.

В случае нереализуемой функции мы нашли МКО, который является наилучшим приближением для нее, и вычислили качество приближения.

Получилось, что среди всех 256 булевых функций трех переменных 152 реализуются через МКО и 56 из них - с любой из трех возможных древовидных структур. Оказалось, что нет такой булевой функции, которая была реализована в двух из трех возможных структур. Для всех 94 нереализуемых функций качество аппроксимации составляет $7/8$ – то есть только одна строка из его таблицы истинности не реализуется путем аппроксимации МКО. Из 20 неубывающих функций только одна не реализуема – это функции из примера 8. Остальные 19 неубывающих функций представимы в древовидной структуре, т.е. являются *бесповторными* [10, 21].

6. Заключение

В статье представлены первые результаты возможного решения проблемы идентификации МКО на основе унитарного кодирования. Основной проблемой, которую еще предстоит решить, является комбинаторный характер проблемы выбора структуры бинарных деревьев для МКО. Однако, предложенный подход предоставляет возможности для реализации в новом направлении процедур обучения ИИ, что позволяет заранее определять структуру нейронных сетей [18]. Также необходимо упомянуть, что множество рассмотренных в этой статье случаев было сужено до бинарной логики, но переход на многозначную логику не вызывает дополнительных трудностей при реализации предложенного подхода. В случае двоичной логики мы предложили новый подход к идентификации так называемых неповторных функций (см., например, [10, 21]).

7. Благодарности

Автор 1 благодарит за частичное финансирование грант РФФИ 18-07-01258, Автор 3 - грант РФФИ 19-29-07525.

8. Приложение

Доказательство утверждения 1: В рамках введенной унитарной записи операция в рамках МКО с отдельным набором значений индикаторов $\tilde{w}(\tilde{k})$ представляет из себя последовательность $l-1$ матричных операций $\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x}$, где вектора \tilde{x} , \tilde{y} имеют размерность $\kappa+1 \in \mathbb{N}$, матрица \tilde{M} - размерность $(\kappa+1) \times (\kappa+1)$. Очевидно, что каждая такая операция представима в виде полинома

$$\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x} = \sum_{r \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}_{rc}.$$

Соответственно, если во всех ячейках матрицы стоят вектора размерности $\kappa+1$, то результатом операции будет также вектор размерности $\kappa+1$, а любая его компонента $i \in \{0, \dots, \kappa\}$ будет записываться как:

$$\sum_{r \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}_{rc}^i$$

Т.е. итоговым значением операции $\tilde{w}(\tilde{k})$ будет также вектор размерности $\kappa+1$. При этом каждая компонента этого вектора будет представима однородным полиномом степени $2l-1$, определяемым $2l-2$ операциями типа $\tilde{y}^T \tilde{x}$, т.е. иметь κ^{2l-2} . Учитывая, что значения всех листьев заданы унитарными векторами, то итоговая степень полинома будет $l-1$ – в нем сохранятся только те слагаемые, которые не умножаются на нулевые значения компонент векторов листьев, и каждое слагаемое будет иметь вид $\prod_{i=1}^{l-1} m_i$, m_i – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы \tilde{M}_i . При этом количество ненулевых слагаемых будет уже определяться $2l-2-l$ операциями типа $\tilde{y}^T \tilde{x}$, т.е. их будет всего κ^{l-2} . Уникальность каждого слагаемого также следует из сути описанной операции.

Учитывая, что в ячейках всех матриц должны стоять унитарные вектора, получаем, что каждая компонента вектора,

определяемого операцией $\tilde{w}(\tilde{k})$ может принимать значения либо 0, либо 1.

Соответственно, то, что МКО реализует отдельно взятый пример, означает, что $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Т.к. вектор \tilde{k}_L является унитарным, то, у вектора $\tilde{w}(\tilde{k})$ только одна компонента должна быть равна 1, та же, что и у вектора \tilde{k}_L , все остальные должны быть равны 0. Т.е. $\tilde{w}(\tilde{k})^T \tilde{k}_L = 1$.

Поэтому обозначив через $P(w, q)$ тот полином, который соответствует компоненте вектора, определяемой $\tilde{w}(\tilde{k})$, которая должна равняться 1, получаем всю совокупность пунктов данного утверждения. \square

Доказательство следствия 1: Из утверждения 1 следует, что для любых $L \subset N$, $K \subset N$, и любого возможного q в единой шкале для любой МКО w $P(w, q) \in \{0, 1\}$, а то, что некоторый МКО \tilde{w} реализует q , означает, что $P(\tilde{w}, q) = 1$. Отсюда следует, что $IRM_{L,2}(q) = \underset{w \in IRM_{L,2}}{Arg \max} P(w, q)$. \square

Доказательство утверждения 2: Т.к. задача аппроксимации в рамках данной статьи определена как реализация как можно большего числа примеров из обучающего набора, то из записи оптимизационной задачи для реализации отдельного примера в виде (2), (3) следует что запись (4), (5) соответствует данной формулировке задачи аппроксимации. \square

Литература

1. АКИНФЕЕВ В.К., ЦВИРКУН А.Д., *Программный комплекс «ТЭО-ИНВЕСТ»* // Проблемы управления инвестициями. – 2013. – № 4. – С. 32–40
2. АЛЕКСЕЕВ А.О. и др. *Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы* // Фундаментальные исследования. – 2014. – №. 3-3. – С. 469-474.
3. БЛАЧЕВ Р.Н., *Особенности процедуры бинарной агрегации многокритериальных экспертных оценок* // АиТ., – 1997 – № 5. – С. 126–132
4. БУРКОВ В.Н., ГОРЕЛИКОВ Н.И., ЧЕРКАШИН А.М. *Методические основы комплексной оценки результатов деятельности предприятий с учетом их прогрессивности в ВПО «Союзэлектроприбор».*// Приборы и системы управления, – 1982. – № 11. – С. 21
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами* Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Издательство физико-математической литературы, – 2008. – 244 с.
6. БУРКОВ В.Н., ТЕСАРЖ И., ТРУБКА Я., ЦЫГАНОВ В.В., ЧАМСКИ Б., ЧЕРКАШИН А.М. *Проектирование систем комплексной оценки инноваций и принятия решений* / В кн.: Моделирование и идентификация производственных систем. – М.: ИПУ, – 1988. – С. 49-55.
7. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация.* – М.: Наука, – 1984. – 132 с.
8. ГОРЕЛИКОВ Н.И., *Проблемы совершенствования отраслевого механизма управления разработкой и производством новой продукции* // – АиТ. – 1984. – выпуск 5. – С. 63–70
9. ГУБКО М.В. *Математические модели формирования рациональных организационных иерархий* // Автоматика и телемеханика. – №9. – 2008. – С. 114-139
10. ГУРВИЧ В.А. *О неповторных булевых функциях* // Успехи математических наук. – 1977. – Т. 32. – №. 1 – С. 183-184.

11. КАЗАКОВА Е.А., КУРОЧКА П.Н., ПОЛОВИНКИНА А.И. *Автоматизированное построение матричных процедур комплексного оценивания на основе оптимизационного подхода* // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – №. 10.
12. ЛАРИЧЕВ О.И. *Вербальный анализ решений* – Наука. – 2006.
13. ПОДИНОВСКАЯ О.В., ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев* // Проблемы управления. – 2014. – №. 6. – С. 2-8.
14. ПУЛИКОВСКИЙ К.Б., ЩЕПКИН А.В. *Комплексная оценка соответствия опасных производственных объектов требованиям безопасности* // – Безопасность труда в промышленности. – № 4. – 2007. – С. 2-7.
15. ТРАПЕЗНИКОВ В.А., ГОРЕЛИКОВ Н.И., БУРКОВ В.Н., ЗИМОХА В.А., ТОЛСТЫХ А.В., ЧЕРКАШИН А.М., ЦЫГАНОВ В.В. *Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли.* // – Вестник АН СССР. – 1983. – № 3. – С. 33-43.
16. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента* – Пермь: – Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. – 2007. – 190 с.
17. ALEKSEEV, A., GALIASKAROV, E., & KOSKOVA, K. *Application of the Matrix Rating Mechanisms and System Cognitive Analysis Methods at the Task of Residential Real Estate Conceptual Designing.* // IEEE 21st Conference on Business Informatics (CBI) – Vol. 2. – 2019. – p. 111-116
18. GARNELO M., SHANAHAN M. *Reconciling deep learning with symbolic artificial intelligence: representing objects and relations* // Current Opinion in Behavioral Sciences 29. –2019. – p. 17-23.
19. HARRIS, D., HARRIS, S. *Digital design and computer architecture* // Morgan Kaufmann. – 2010.
20. KORGIN, N.A., ROZHDESTVENSKAYA, S.M. *Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking for Formation of Programs* // IEEE 11th International Conference on

Application of Information and Communication Technologies (AICT). – 2017. pp. 1-5.

21. KOZACHINSKIY A. *Recognizing Read-Once Functions from Depth-Three Formulas* // Theory of Computing Systems, 64(1). – 2020. – p. 3-16.
22. LARICHEV O.I., MOSHKOVICH, H.M. *Verbal decision analysis for unstructured problems* // Springer Science & Business Media – Vol. 17. – 2013.
23. NITTA T. *Solving the XOR problem and the detection of symmetry using a single complex-valued neuron* // Neural Networks, 16(8). – 2003. – P. 1101-1105.
24. OKADA S., OHZEKI M., TAGUCHI S. *Efficient partition of integer optimization problems with one-hot encoding* // arXiv preprint arXiv:1906.07385. – 2019.

One-Hot Approach to Identification of Integrated Rating Mechanisms

Vladimir. Burkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., full professor, principal researcher (burkov39@gmail.com).

Vladimir Sergeev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, research assistant, postgraduate (sergeev.bureau@gmail.com).

Nikolay Korgin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., associate professor, principal researcher. (Tel: +7495-335-60-37; e-mail: nkorgin@ipu.ru).

Abstract: A problem of identification of an integrated ranking mechanism is considered. An approach to its solution based on one-hot encoding is suggested. Some examples of identification and approximation of learning sets generated by several Boolean functions are provided.

Index Terms Identification and model reduction; Production planning and control; Modelling and decision making in complex systems; Integrated assessment; One-hot encoding; Read-once functions.

УДК 519
ББК 32.81

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...