О КОЛИЧЕСТВЕ ИНФОРМАЦИИ, НЕОБХОДИМОМ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Горелов М. А.[1]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва*)

Хорошо известно, что для эффективного управления необходимо использовать информацию об окружающем мире. Но если этой информации много, то приходится экономить ресурсы, затрачиваемые на ее получение и обработку. Поэтому встает вопрос о поиске рациональных способов работы с информацией. Одна из моделей, позволяющих исследовать этот вопрос формальными методами, исследуется в статье. Рассматривается простейшая система управления в условиях риска. Предполагается, что оперирующей стороне доступна информация о реализовавшемся значении случайного фактора. Эта информация кодируется двоичными словами. Выбор содержания информации, т.е. способа кодировки, считается прерогативой оперирующей стороны. Фиксируется приемлемый для оперирующей стороны результат управления. Ставится задача поиска способа кодирования, позволяющего гарантированно получить этот результат с наименьшим математическим ожиданием длины сообщения о реализовавшемся значении неопределенного фактора. Показано, что при весьма общих предположениях это математическое ожидание конечно. Выяснена качественная структура функции из множества возможных значений случайного фактора в множество двоичных слов, задающей оптимальный способ кодирования. Задача поиска такой функции сведена к решению задачи стохастического программирования на «конечномерном» пространстве. Полученные результаты имеют разумную содержательную интерпретацию. Это позволяет сделать вывод о том, что построенная модель верно отражает основные черты моделируемого явления и заслуживает дальнейшего изучения.

Ключевые слова: принятие решений в условиях риска, максимальный гарантированный результат, количество информации.

1. Введение

Рассматриваемая в данной статье модель находится на стыке трех областей математики: стохастического программирования, теории информации и теории иерархических игр.

---

[1] *Михаил Александрович Горелов, к.ф.-м.н.* (*griefer@ccas.ru*).

С одной стороны, рассматривается задача выбора стратегии в условиях, когда получаемый результат зависит не только от этого выбора, но и от внешнего случайного фактора. Такие задачи характерны для стохастического программирования [8,15].

С другой стороны, основной акцент делается на минимальное количество информации о случайном факторе, которой достаточно для принятия эффективного решения. При этом и само понятие «количество информации» нуждается в определении. Эти вопросы характерны для теории информации [3,14].

Наконец, используемые методы похожи на те, которые используются в теории иерархических игр. Для этого раздела теории игр характерны следующие постановки задач [9,10]. Требуется найти оптимальную стратегию, принадлежащую сложному, как правило, функциональному пространству. Задача считается решенной, если поиск удается свести к решению ряда оптимизационных задач на более простых, «конечномерных», пространствах. Примерно это и будет сделано далее. Только исходная задача будет сведена не к классической задаче математического программирования, а к задаче стохастического программирования. Методы стохастического программирования в статье не используются. Есть основания полагать, что они начнут работать при получении точных количественных результатов. В статье же в основном исследуются качественные особенности решаемой задачи.

Для начала исследования выбран самый простой вариант модели. На неформальном уровне ее можно описать следующим образом. Оперирующая сторона выбирает некоторое управление. Эффективность этого управления описывается критерием, который помимо сделанного выбора зависит от внешнего случайного фактора. Считается, что оперирующей стороне заранее известно распределение вероятности, описывающее этот фактор. Будем предполагать, что оперирующей стороне в принципе доступна и информация о реализовавшемся значении случайного фактора. Но получение и обработка этой информации требует затрат времени и ресурсов. Поэтому желательно получить достаточно эффективное решение при минимуме этих побочных затрат.

Актуальность такой постановки вопроса вряд ли может вызывать сомнения, особенно в «эпоху Интернета». Подобные задачи (без учета затрат на обработку информации) помимо собственно стохастического программирования неоднократно исследовались в теории иерархических игр [9,10], теории активных систем [1,2], теории контрактов [12,13] и т.д. Работы, в которых явно учитывались ограничения, связанные с объемами обрабатываемой информации, появились относительно недавно. Видимо, одной из первых была статья [5]. Понятно, что во многих случаях такие более детальные модели адекватнее описывают реальные процессы. Но и их исследование, и даже построение, заметно сложнее.

Серьезные сомнения может вызвать предположение о том, что неопределенный фактор является *случайным* и оперирующей стороне известно соответствующее распределение вероятностей. К сожалению, нередки случаи, когда подобные предположения используются «неправомерно». Но это все стало «общим местом», поэтому дополнительно обсуждать это предположение не станем. В данной чисто теоретической статье достаточно предположить, что *существуют* практические задачи, для которых это предположение выполняется. Такая гипотеза вряд ли может вызвать серьезные возражения.

Само понятие «количество информации» – сложное и неоднозначное. Единое определение этого понятия на сегодняшний день отсутствует, и даже не ясно, существует ли оно в принципе. Это создает дополнительные трудности. В данной статье выбран следующий вариант. Считается, что вся информация о случайном факторе «кодируется» словами из нулей и единиц. В таком случае длину соответствующего слова можно считать мерой количества информации. При этом, разумеется, длина слова зависит от реализовавшегося значения неопределенного фактора, т.е. сама является случайной величиной.

Оперирующая сторона принимает решение в условиях риска. Поэтому математическая модель этого процесса должна содержать формальное описание отношения оперирующей стороны к этому риску. Наиболее простыми и наиболее часто используемыми подходами являются два[1]: гарантированный и риск-нейтральный. При первом из них оперирующая сторона ориентируется на наихудший возможный случай, а при втором готова ориентироваться на математическое ожидание своего результата. В рассматриваемом случае имеется два критерия: эффективность управления и количество информации. К каждому из них можно применить один из двух подходов. Таким образом, получаем четыре варианта.

Задача, в которой дважды используется гарантированный подход, легко сводится к задаче, исследованной в [6]. Аналогично, если использовать риск-нейтральный подход для оценки эффективности и гарантированный подход для оценки количества информации, то получится задача, сводящаяся к решенной в [7]. В данной статье гарантированный подход используется в отношении эффективности управления, а риск-нейтральный – в отношении количества информации. Последний вариант, в котором оба критерия «сворачиваются» с помощью оператора математического ожидания, видимо, самый сложный. Наряду с первым он выглядит наиболее логичным, но разобраться с ним пока не удается.

Использование средней длины сообщения в качестве меры количества информации, по сути, приводит к идеям, впервые использованным К. Шенноном [11]. Использование гарантированного подхода активно пропагандировал Ю.Б. Гермейер [4].

Устранив таким образом неопределенность, придем к классической двухкритериальной задаче. Причем из формальных конструкций легко увидеть, что два используемых критерия противоречивы: чем большей гарантированной эффективности управления желательно достичь, тем больше информации для этого потребуется. Поэтому с данной многокритериальностью нужно как-то «бороться». Технически проще решать задачу в следующей постановке. Фиксируем устраивающую оперирующую сторону эффективность управления и будем искать страте-

---

[1] *Разумеется, возможны и более сложные варианты, такие как принцип Value at Risk, но на них пока останавливаться не станем.*

гию, которая обеспечит гарантированное получение этой эффективности с наименьшими «затратами» информации. Поскольку при этом удается описать все достижимые значения векторного критерия, все остальные варианты свертки критериев можно сводить к этой задаче (хотя бы в принципе).

Всякая «разумная» постановка задачи должна быть математически корректной. В частности, ее решение не должно «сильно» меняться при «малых» изменениях параметров задачи. В рассматриваемой модели с этим дело обстоит не совсем благополучно. Конечно, всякую некорректную задачу можно регуляризовать, но не хотелось бы с самого начала заниматься этим. Поэтому при постановке задачи пришлось много внимания уделить техническим деталям, чтобы добиться необходимой степени устойчивости. Кое-чем при этом пришлось пожертвовать. Например, далее отсутствует определение «точного» решения. Вместо этого осуществляется поиск ε-оптимальных стратегий. Детальное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной статьи, хотя, вероятно, представляет определенный интерес.

2. Постановка задачи

Рассмотрим простейшую модель принятия решений в условиях риска.

Пусть функция g отображает декартово произведение $U \times A$ множеств U и A в множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Множества U и A будем предполагать наделенными топологиями и компактными. Функцию g будем считать непрерывной в топологии декартова произведения $U \times A$. Допустим, кроме того, что на множестве A задана борелевская вероятностная мера $\wp$. Оператор вычисления математического ожидания по этой мере будем обозначать символом M.

Интерпретировать эти конструкции будем следующим образом. Оперирующая сторона выбирает свое управление из множества U. Ее цель состоит в максимизации своего выигрыша, задаваемого функцией g. Но этот выигрыш зависит не только от выбранного управления $u \in U$, но и от реализовавшегося значения случайного фактора $\alpha \in A$. Мера $\wp$ на множестве A описывает вероятность реализации конкретного значения α.

Будем искать максимальный гарантированный результат оперирующей стороны. Разумеется, он зависит от ее информированности о реализовавшемся значении α. Если оперирующая сторона в момент принятия решения не имеет информации об α, то ее максимальный гарантированный результат равен

$$\max_{u \in U} \min_{\alpha \in A} g(u, \alpha).$$

Если же она рассчитывает на получение достоверной информации об α, то ее максимальный гарантированный результат составит

$$\min_{\alpha \in A} \max_{u \in U} g(u, \alpha).$$

Это – два крайних случая. В данной статье в основном будет исследоваться промежуточный случай. Начнем с его неформального описания. Несложно придумать примеры операций, в которых для однозначной идентификации значения $\alpha \in A$ требуется очень большой объем информации. В таком случае своевременное получение и обработка такой информации может оказаться технически невозможной. Поэтому представляют значительный интерес те способы управления системой, при которых удается получить достаточно хороший гарантированный результат с помощью обработки относительно небольших объемах информации. Формализовать сказанное можно следующим образом.

Здесь и далее $\Phi(X, Y)$ будет обозначать класс всех функций из множества X в множество Y.

Пусть Ξ – множество всех слов в алфавите $\{0,1\}$. Пустое слово Λ будем считать принадлежащим множеству Ξ. Обозначим через $l(s)$ длину слова $s \in \Xi$. Разумеется, $l(\Lambda) = 0$. Множество Ξ счетно, поэтому можно считать, что на нем задана σ-алгебра множеств, в которой все одноточечные множества измеримы. На множестве A также задана σ-алгебра измеримых множеств. Обозначим через $\Psi(A,\Xi)$ множество всех измеримых функций, отображающих A в Ξ.

Предположим, что оперирующая сторона имеет свободный доступ к информации о реализовавшемся значении случайного фактора $\alpha \in A$, но получает ее закодированной в виде слов из множества Ξ. Способ кодировки P: $A \to \Xi$ выбирает сама оперирующая сторона. В качестве способов кодировки будем рассматривать только измеримые функции P. Если реализуется значение случайного фактора α, то оперирующая сторона получит сообщение $P(\alpha)$. Объем этого сообщения составит $l(P(\alpha))$ бит. Получив такое сообщение, она вправе выбрать любое управление u из множества U. Тогда, по сути, она выбирает некоторую функцию u_*: $\Xi \to U$.

В описанных условиях гарантированный результат оперирующей стороны будет равен

$$R(u_*, P) = \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha).$$

А математическое ожидание объема перерабатываемой информации составит $L(u_*,P) = \mathrm{M}l(P(\alpha))$ бит.

Хотелось бы, чтобы при выбранной стратегии (u_*,P) величина $R(u_*,P)$ была побольше, а величина $L(u_*,P)$ – как можно меньше. Но очевидно, что эти два условия противоречивы. Таким образом, здесь имеется двухкритериальная задача. Чтобы с ней разобраться, опишем все реализуемые в данной модели принятия решений пары значений $R(u_*,P)$ и $L(u_*,P)$. Технически удобнее поставить задачу следующим образом.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Будем искать такую стратегию (u_*,P), для которой выполняется неравенство

$$R(u_*, P) > \sup_{(u_*, P) \in \Phi(\Xi, U) \times \Psi(A, \Xi)} \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) - \varepsilon, \tag{1}$$

а величина $L(u_*,P)$ имеет наименьшее возможное значение.

3. Первая оценка

В данном разделе будет получена самая грубая оценка решения сформулированной задачи. Кроме того здесь удобно будет обсудить некоторые детали ее постановки.

Множество Ξ содержит слова сколь угодно большой длины. Поэтому a priori не очевидно, что математическое ожидание

$L(u_*,P) = \mathrm{M}l(P(\alpha))$ будет конечным даже при «оптимальном» выборе стратегии (u_*,P). Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия (u_*,P), удовлетворяющая неравенству (1), для которой величина $L(u_*,P)$ конечна.

Доказательство. Обозначим

$$R = \sup_{(u_*,P)\in\Phi(\Xi,U)\times\Psi(A,\Xi)} \inf_{\alpha\in A} g(u_*(P(\alpha)),\alpha).$$

По определению точной верхней грани существует стратегия (u_*,P), для которой $R(u_*,P) > R - \varepsilon$. Но тогда по определению величины $R(u_*,P)$ для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon$. Следовательно, множества

$$O_\varepsilon(u) = \{\alpha \in A\colon g(u,\alpha) > R - \varepsilon\}$$

покрывают пространство A.

Функция g непрерывна, поэтому множества $O_\varepsilon(u)$ открыты. А пространство A предполагается компактным, поэтому существует конечный набор $u_1,u_2,\ldots,u_n$ элементов множества U такой, что множества $O_\varepsilon(u_1),O_\varepsilon(u_2),\ldots,O_\varepsilon(u_n)$ по-прежнему покрывают пространство A.

Произвольным образом выберем n слов $s_1,s_2,\ldots,s_n$ из множества Ξ. Определим отображение $P\colon A \to \Xi$ условием: $P(\alpha) = s_k$, где k – это наименьший номер i, для которого выполняется включение $\alpha \in O_\varepsilon(u_i)$ (такой номер существует, поскольку множества $O_\varepsilon(u_1),O_\varepsilon(u_2),\ldots,O_\varepsilon(u_n)$ покрывают A). Пусть функция $u_*\colon \Xi \to U$ такова, что $u_*(s_i) = u_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Покажем, что так построенная стратегия (u_*,P) удовлетворяет всем условиям леммы.

Так как функция g непрерывна, множества $O_\varepsilon(u_i)$ открыты. А поскольку мера на множестве A предполагается борелевской, отображение P измеримо.

Отображение P определено так, что мера множества

$$P^{-1}(s) = \{\alpha \in A\colon P(\alpha) = s\}$$

положительна лишь для конечного множества слов $s \in \{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$. Поэтому очевидно, что

$$L(u_*, P) \le \max_{i=1,2,\ldots,n} l(s_i).$$

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Пусть $P(\alpha) = s_i$. Тогда по построению отображения P выполняется включение $\alpha \in O_\varepsilon(u_i)$. Значит, $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) = g(u_*(s_i),\alpha) = g(u_i,\alpha) > R - \varepsilon$.
Поскольку это неравенство справедливо при любом $\alpha \in A$, имеем

$$\inf_{\alpha\in A} g(u_*(P(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим конкретную модель рассматриваемого типа.

Пример 1. Пусть $U = [0,1]$, $A = [0,1]$, множества U и A снабжены евклидовыми топологиями, а множество A, кроме того, наделена мерой Лебега, которая используется для вычисления математических ожиданий. Интересы оперирующей стороны описываются стремлением к максимизации значения функции $g(u,\alpha) = -|u-\alpha|$.

Прежде всего, заметим, что верхняя грань в формуле (1) в этой достаточно простой модели не достигается. Покажем это.

С одной стороны, очевидно, что эта верхняя грань не может быть строго больше нуля.

Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Определим стратегию $(u_{*\delta},P_\delta)$ следующим образом.

Прежде всего, перенумеруем слова из множества Ξ. Припишем к слову $s \in \Xi$ слева единичку. Тогда слово $1s$ можно рассматривать как двоичную запись некоторого натурального числа k. Именно этот номер и присвоим слову s. Легко видеть, что построенное отображение множества Ξ в множество натуральных чисел **N** взаимно однозначно и каждому натуральному числу k соответствует единственное слово s_k. Очевидно, $s_1 = \Lambda$, а при $k > i$ имеем $l(s_k) \ge l(s_i)$. Это свойство нумерации очень удобно. Поэтому такая нумерация будет использоваться и в дальнейшем.

Далее имеем $l(s_1) = 0$, $l(x_2) = (s_3) = 1,\ldots$ В общем случае получим $l(s_k) = [\log k]$ (здесь и далее используются логарифмы по основанию 2, а квадратные скобки обозначают целую часть числа). Пусть $a_k = [\log k]$.

Положим $b_k = 2k\delta,\ k = 1, 2, ..., m = \left[\dfrac{1}{2\delta}\right]$. Пусть $P(\alpha) = s_0$ при $\alpha \in [0,b_1]$, $P(\alpha) = s_k$ при $\alpha \in (b_{k-1},b_k]$, $k = 2,\ldots,m$, $P(\alpha) = s_{m+1}$ при $\alpha \in (b_m,1]$. Определим функцию u_* условиями $u_*(s_k) = b_k - \delta$ при $k = 1,2,\ldots,m$, $s_*(s_{m+1}) = \min\{b_m + \delta,1\}$ (при $k > m+1$ можно определить функцию произвольно).

Непосредственно проверяется, что для такой стратегии $(u_{*\delta},P_\delta)$ выполняется равенство

$$\min_{\alpha\in A} g(u_*(P(\alpha)),\alpha) = -\delta,$$

причем минимальное значение достигается в точках $\alpha = 0,b_1,b_2,...,b_m$. А при $\delta < \varepsilon$ стратегия $(u_{*\delta},P_\delta)$ удовлетворяет условию (1).

Поскольку δ выбиралось произвольно, верхняя грань в формуле (1) для данной модели в точности равна нулю.

Предположим, что эта верхняя грань достигается и оптимальной является стратегия (u_*,P). Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется равенство $u_*(P(\alpha)) = \alpha$, т.е. множество значений функции $u_* \circ P$ совпадает с отрезком [0,1] и, следовательно, имеет мощность континуума. Но с другой стороны мощность множества значений функции $u_* \circ P$ не может быть больше мощности множества значений функции P. А последнее множество принадлежит счетному множеству Ξ, а потому само не более чем счетно. Получено противоречие.

Таким образом, чтобы получить формально корректную постановку задачи, «отступить» хотя бы на ε от наибольшего значения, как это сделано в формуле (1), просто необходимо. Такой подход оправдан и в прикладном смысле. А.Ф. Кононенко неоднократно подчеркивал, что максимальный гарантированный результат сам по себе не имеет особого смысла. Осмысленным является гарантированный результат, который приемлем для оперирующей стороны. И такой подход оправдан, поскольку в рассматриваемой в данной статье и в других похожих моделях при приближении к оптимуму увеличивается «сложность» оптимальных стратегии, увеличивается чувствительность к малым изменениям параметров модели, и другие «неприятные» свойства накапливаются. Это никак не учитывается в формальной постановке, но играет значительную роль на практике.

Теперь можно заняться наименьшим объемом информации, позволяющей получить нужный результат. На самом деле построенная выше стратегия $(u_{*\delta}, P_\delta)$ «почти оптимальна», а именно, она предполагает использование наименьшего объема информации среди всех стратегий, удовлетворяющих нестрогому ограничению

(2) $$R(u_*, P) \geq \sup_{(u_*, P) \in \Phi(\Xi, U) \times \Psi(A, \Xi)} \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) - \delta.$$

Докажем это. Пусть (u_*, P) – произвольная стратегия. Поскольку выполняется неравенство (2), при любом i множество $P^{-1}(s_i)$ содержится в отрезке $[u_*(s_i) - \delta,\ u_*(s_i) + \delta]$ а потому его мера $x_i = \wp(\ P^{-1}(s_i)$ нет превосходит 2δ. Значит, набор чисел $x_1, x_2, \ldots$ является допустимой точкой (бесконечномерной) задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1,$$

$$x_i \leq 2\delta,\ i = 1, 2, \ldots$$

Но так как последовательность $a_1, a_2, \ldots$ не убывает, числа $x_{1\delta} = 2\delta, x_{2\delta} = 2\delta, \ldots,\ x_{m\delta} = 2\delta,\ x_{m+1} = 1-2m\delta, 0, 0, \ldots$ дают оптимальное решение этой задачи линейного программирования. Поэтому

$$L(u_*, P) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{i\delta} = L(u_{*\delta}, P_\delta).$$

Отсюда следуют два факта. Во-первых, при $\delta = \varepsilon$ условие (2) слабее условия (1), поэтому оптимальное значение критерия в рассматриваемой задаче принятия решений не превосходит $L(u_{*\delta}, P_\delta) = L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon)$. А с дугой стороны, при $\delta < \varepsilon$ уже условие (1) слабее условия (2) и потому искомое значение критерия не меньше, чем $\lim\limits_{\delta\to\varepsilon-0} L(u_{*\delta}, P_\delta) = L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon)$. Таким образом, оптимальное значение критерия в нашем примере равно $L(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon)$, но оно не достигается.

Теперь можно понять, почему не достигается верхняя грань в формуле (1). Несложно проверить, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon) = \infty$, т.е. для того, чтобы получить максимальный возможный результат в данном примере, необходим бесконечный объем информации. Подобный эффект характерен для многих задач подобного типа.

4. Структура оптимальной стратегии

Фиксируем произвольную стратегию (u_*,P), удовлетворяющую условию (1). Последовательно будем упрощать ее, приводя к некоторому стандартному виду. При этом будем следить за тем, чтобы на каждом шаге ограничение (1) не нарушалось, а значение критерия $L(u_*,P)$ не увеличивалось.

Будем использовать нумерацию слов из множества Ξ, определенную при исследовании примера 1.

Выберем число ε' так, что $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon' > R - \varepsilon$. Это можно сделать, так как выполняется условие (1). Пусть

$O_{\varepsilon'}(u) = \{\alpha \in A\text{: } g(u,\alpha) > R - \varepsilon'\}$.

В силу выбора числа ε', множества $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$, $O_{\varepsilon'}(u_*(s_2)),\ldots$ покрывают пространство A. Поскольку функция g непрерывна, эти множества открыты. Пространство A предполагается компактным, поэтому из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Зафиксируем одно из таких подпокрытий. Пусть m наибольший из номеров i слов s_i, для которых $O_{\varepsilon'}(u_*(s_i))$ входит в это подпокрытие. Тогда множества $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$, $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)),\ldots$, $O_{\varepsilon'}(u_*(s_m))$ тоже образуют покрытие пространства A, возможно, избыточное.

Если $P(\alpha) \le m$, то положим $P_1(\alpha) = P(\alpha)$. Для остальных $\alpha \in A$ найдем наименьший номер i, для которого $\alpha \in O_\varepsilon(u_*(s_i))$ и положим $P_1(\alpha) = i$. Поскольку $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$, $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)),\ldots$, $O_{\varepsilon'}(u_*(s_m))$ – покрытие, тем самым корректно определена функция P_1: $A \to \Xi$. Кроме того, по построению для всех $\alpha \in A$ выполняется неравенство $P_1(\alpha) \le m$.

Докажем, что построенная функция P_1 измерима. Поскольку множество Ξ счетно, достаточно доказать, что измеримы множества $P_1^{-1}(s_i), i = 1, 2, \ldots$ Если $i > m$, то множество $P_1^{-1}(s_i)$ пусто, поэтому все очевидно. Множество $P_1^{-1}(s_1)$ может быть представлено в виде

$$P_1^{-1}(s_1) = P^{-1}(s_1) \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} \left(O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)) \cap P^{-1}(s_i) \right).$$

Множество $P^{-1}(s_1)$ измеримо, поскольку измерима функция P. Множество $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$ открыто, а потому измеримо, так как мера предполагается борелевской. Множество $P^{-1}(s_i)$ тоже измеримо, поскольку измерима функция P. Значит измеримо пересечение $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)) \cap P^{-1}(s_i)$, а, следовательно, и объединение счетного числа измеримых множеств $P_1^{-1}(s_1)$. Для $i = 2,\ldots,m$ измеримость множества $P_1^{-1}(s_i)$ доказывается теми же простыми рассуждениями с использованием представления

$$P_1^{-1}(s_i) = P^{-1}(s_i) \cup \bigcup_{l=m+1}^{\infty} \left(\left(O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_*(s_j)) \right) \cap P^{-1}(s_l) \right).$$

Покажем, что для стратегии (u_*,P_1) выполняется условие $R(u_*,P_1) > R - \varepsilon$. Если α таково, что $P(\alpha) \le m$, то по определению

$$g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha) = g(u_*(P(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon'.$$

В противном случае $P_1(\alpha) = s_i$ при некотором $i = 1,2,\ldots,m$ и $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) = O_{\varepsilon'}(u_*(P_1(\alpha)))$. Тогда

$$g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha) = g(u_*(s_i)),\alpha) > R - \varepsilon'.$$

Таким образом, для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство

$$g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon'.$$

Значит,

$$R(u_*, P_1) = \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha) - \varepsilon' \ge R - \varepsilon' > R - \varepsilon.$$

Теперь убедимся в том, что $L(u_*,P) \ge L(u_*,P_1)$. Нумерация слов из множества Ξ выбрана так, что $l(s_i) \ge l(s_m)$ при $i > m$ и $l(s_i) \le l(s_m)$ при $i \le m$. А функция P_1 построена так, что

$\wp(P_1^{-1}(s_i))=0$ при $i>m$ и $\wp(P^{-1}(s_i))\ge\wp(P_1^{-1}(s_i))$ при $i\le m$. Поэтому

$$L(u_*,P)-L(u_*,P_1)=\mathrm{M}l(P(\alpha))-\mathrm{M}l(P_1(\alpha))=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))-\sum_{i=1}^{\infty}l(s_i)\wp(P_1^{-1}(s_i))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}l(s_i)(\wp(P^{-1}(s_i))-\wp(P_1^{-1}(s_i)))-\sum_{i=m+1}^{\infty}l(s_i)\wp(P_1^{-1}(s_i))\ge$$

$$\ge\sum_{i=1}^{m}l(s_m)(\wp(P^{-1}(s_i))-\wp(P_1^{-1}(s_i)))-\sum_{i=m+1}^{\infty}l(s_m)\wp(P_1^{-1}(s_i))=$$

$$=l(s_m)\left(\sum_{i=1}^{m}(\wp(P^{-1}(s_i))-\wp(P_1^{-1}(s_i)))-\sum_{i=m+1}^{\infty}\wp(P_1^{-1}(s_i))\right)=$$

$$=l(s_m)\left(\sum_{i=1}^{m}\wp(P^{-1}(s_i))-\sum_{i=1}^{\infty}\wp(P_1^{-1}(s_i))\right)=0,$$

так как $\sum_{i=1}^{m}\wp(P^{-1}(s_i))=1$ и $\sum_{i=1}^{\infty}\wp(P_1^{-1}(s_i))=1$.

Перейдем к следующему шагу. Определим функцию $P_2\colon A\to\Xi$ условиями: $P_2(\alpha)=s_1$ при $\alpha\in O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$, и $P_2(\alpha)=P_1(\alpha)$ при остальных значениях α.

Множество $P_2^{-1}(s_1)$ открыто, а потому измеримо. При $i>1$ имеем $P_2^{-1}(s_i)=P_1^{-1}(s_i)\setminus O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$. Это множество измеримо, поскольку измерима функция P_1. Таким образом, функция P_2 тоже измерима.

Для $\alpha\in O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$ неравенство $g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha)>R-\varepsilon'$ выполняется в силу определения множества $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$. А для остальных α оно выполняется так как

$$g(u_*(P_2(\alpha)),\alpha)=g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha)>R-\varepsilon'.$$

Отсюда, как и выше, следует неравенство $R(u_*,P_1)>R-\varepsilon$.

Наконец, по построению выполняются включения $P_1^{-1}(s_1)\subset P_2^{-1}(s_1)$ и $P_2^{-1}(s_i)\subset P_1^{-1}(s_i)$ при $i>1$. Следовательно, $\wp(P_1^{-1}(s_1))\le\wp(P_2^{-1}(s_1))$ и $\wp(P_1^{-1}(s_i))\ge\wp(P_2^{-1}(s_i))$ для $i>1$. Отсюда, как и на предыдущем шаге получается неравенство $L(u_*,P_1) \ge L(u_*,P_2)$.

Теперь будем рассуждать индуктивно. Пусть функция P_i уже определена. Определим функцию P_{i+1} следующим образом. Положим $P_{i+1}(\alpha) = s_i$ при $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_*(s_j))$. А при остальных значениях α положим $P_{i+1}(\alpha) = P_i(\alpha)$.

Те же рассуждения, которые использовались раньше, показывают, что так построенная функция P_{i+1} измерима, а для стратегии (u_*,P_{i+1}) выполняются неравенства $R(u_*,P_{i+1}) > R - \varepsilon$ и $L(u_*,P_{i+1}) \ge L(u_*,P_i)$.

Дальше нас будет интересовать стратегия (u_*,P_m). Для нее

$$L(u_*,P_m) = h_m(u_1,u_2,...,u_m,\varepsilon') = \sum_{i=1}^{m} l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon'}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_j)\right)$$

где для простоты положено $u_i = u_*(s_i)$ и $\bigcup_{j=1}^{0} O_{\varepsilon'}(u_j) = \varnothing$.

Кроме того,

$$f_m(u_1,u_2,...,u_m) = \min_{\alpha\in A} \max_{i=1,2,...,m} g(u_i,\alpha) =$$

$$\min_{\alpha\in A} \max_{i=1,2,...,m} g(u_*(s_i),\alpha) \ge \min_{\alpha\in A} g(u_*(P_m(\alpha)),\alpha) \ge R - \varepsilon'.$$

Положим

$D_m(\varepsilon') = \{(u_1,u_2,\ldots,u_m) \in U^m\colon f_m(u_1,u_2,\ldots,u_m) \ge R - \varepsilon'\}$.

Из приведенных рассуждений следует, что точная нижняя грань значений величины $L(u_*,P_i)$ при выполнении ограничения (1) не меньше, чем

(3) $$L_\varepsilon = \inf_{0<\varepsilon'<\varepsilon} \inf_{m=1,2,...} \inf_{(u_1,u_2,...,u_m)\in D_m(\varepsilon')} h_m(u_1,u_2,...,u_m,\varepsilon').$$

Полученная оценка является точной. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Точная нижняя грань значений величины $L(u_*,P_i)$ при выполнении ограничения (1) равна L_ε.

Доказательство. Осталось доказать, что существуют стратегии оперирующей стороны, позволяющие получать результат, сколь угодно близкий к L_ε. Фиксируем произвольное $\delta > 0$ и построим стратегию (u_*,P_i), для которой $R(u_*,P_i) > R - \varepsilon$, а $L(u_*,P_i) < L_\varepsilon + \delta$.

Выберем числа $\varepsilon'' \in (0,\varepsilon)$ и m и управления $(u_1,u_2,\ldots,u_m) \in D_m(\varepsilon'')$ так, что $h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon'') < L_\varepsilon + \delta$. Пусть число ε' удовлетворяет условию $\varepsilon'' < \varepsilon' < \varepsilon$.

Пусть $u_*(s_i) = u_i$ для $i = 1,2,\ldots,m$ (для остальных i можно определить функцию произвольно). Для $\alpha \in A$ найдем наименьший номер k, для которого $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_k)$ и положим $P(\alpha) = s_k$.

Поскольку $(u_1,u_2,\ldots,u_m) \in D_m(\varepsilon'')$, выполняется неравенство $f_m(u_1,u_2,\ldots,u_m) \geq R - \varepsilon''$, значит, множества

$\{\alpha \in A\colon g(u_i,\alpha) \geq R - \varepsilon''\}$, $i = 1,2,\ldots,m$,

покрывают пространство A. Значит, тем более множества $O_{\varepsilon'}(u_1)$, $O_{\varepsilon'}(u_2),\ldots$, $O_{\varepsilon'}(u_m)$ покрывают его. Поэтому функция P корректно определена для всех $\alpha \in A$.

Множества $O_{\varepsilon'}(u_i)$ открыты, а мера $\wp$ предполагается борелевской, поэтому функция P измерима. Значит, (u_*,P_i) – стратегия.

По построению, для каждого $\alpha \in A$ имеет место включение $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(P(\alpha)))$. Значит, для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) > R - \varepsilon'$. А в силу произвольности α получим

$$R(u_*,P_1) = \inf_{\alpha\in A} g(u_*(P_1(\alpha)),\alpha) - \varepsilon' \geq R - \varepsilon' > R - \varepsilon.$$

Таким образом, для построенной стратегии (u_*,P_i) условие (1) выполнено.

Остается недоказанным лишь неравенство $L(u_*,P_i) < L_\varepsilon + \delta$. По построению $L(u_*,P_i) = h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon')$. А в силу выбора чисел ε'' и m и управлений $(u_1,u_2,\ldots,u_m)$, выполняется неравенство $h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon'') < L_\varepsilon + \delta$. Поэтому достаточно доказать, что $h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon') \leq h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon'')$. Это можно сделать по индукции.

Так как $\varepsilon'' < \varepsilon'$ имеем $O_{\varepsilon''}(u_1) \subset O_{\varepsilon'}(u_1)$, поэтому $\wp(O_{\varepsilon''}(u_1)) \leq \wp(O_{\varepsilon'}(u_1))$, $\wp(O_{\varepsilon''}(u_2)\backslash O_{\varepsilon''}(u_1)) \geq \wp(O_{\varepsilon'}(u_2)\backslash O_{\varepsilon'}(u_1))$, и так далее. Поскольку последовательность $l(s_i)$ не убывает, получаем отсюда

$$h_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,\varepsilon'')=\sum_{i=1}^{m}l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)-$$

$$-l(s_1)\wp(O_{\varepsilon'}(u_1))-\sum_{i=2}^{m}l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\cup\bigcup_{j=2}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right)=$$

$$=l(s_1)(\wp(O_{\varepsilon''}(u_1))-\wp(O_{\varepsilon'}(u_1)))-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\left[l(s_i)\left(\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\cup\bigcup_{j=2}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right]\geq$$

$$\geq l(s_1)(\wp(O_{\varepsilon''}(u_1))-\wp(O_{\varepsilon'}(u_1)))-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}l(s_1)\left[\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\cup\bigcup_{j=2}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right]=$$

$$=l(s_1)\left[\sum_{i=1}^{m}\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)-\right.$$

$$\left.-\wp(O_{\varepsilon'}(u_1))-\sum_{i=2}^{m}\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\cup\bigcup_{j=2}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right)\right]=0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m}l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\geq$$

$$\geq l(s_1)\wp(O_{\varepsilon'}(u_1))+\sum_{i=2}^{m}l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon''}(u_i)\setminus\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\cup\bigcup_{j=2}^{i-1}O_{\varepsilon''}(u_j)\right)\right),$$

то есть в сумме, стоящей в левой части этого неравенства можно заменить множество $O_{\varepsilon''}(u_1)$ бóльшим множеством $O_{\varepsilon'}(u_1)$, не увеличив при этом суммы. Аналогичными выкладками показывается, что в новой сумме можно заменить множество $O_{\varepsilon''}(u_2)$ множеством $O_{\varepsilon'}(u_2)$ и так далее. Заменив множество $O_{\varepsilon''}(u_m)$ множеством $O_{\varepsilon'}(u_m)$ получим сумму

$$\sum_{i=1}^{m} l(s_i)\wp\left(O_{\varepsilon'}(u_i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}O_{\varepsilon'}(u_j)\right)=h_m(u_1,u_2,...,u_m,\varepsilon').$$

Таким образом, $L(u_*,P_i) < L_\varepsilon + \delta$. Теорема доказана.

5. Комментарии и примеры

Остановимся на некоторых математических аспектах рассматриваемой постановки задачи. Здесь имеется довольно много тонкостей. Некоторые из них мы и обсудим.

За одним исключением, о котором будет сказано далее, в при постановке выбрана следующая стратегия. Если какое-то предположение позволяет «не думать» о технических деталях, но при этом не кажется ограничительным при возможном исследовании конкретных прикладных задач, то оно принимается[1]. При прочих же равных выбиралась более общая постановка задачи. Пожалуй, наибольшие сомнения вызывает условие (1).

В частности, пример 1 показывает, что в рассматриваемой задаче точное решение может отсутствовать, поскольку соответствующий минимум не достигается. И в этом примере такой не очень приятный факт напрямую связан с тем, что неравенство в условии (1) – строгое. Не стоит ли заменить это неравенство на нестрогое?

Сразу же заметим, что при такой замене (с сохранением остальных предположений), точное решение, вообще говоря, может все-таки отсутствовать. Другая причина, по которой выбран вариант со строгим неравенством, более существенна.

Всякая постановка задачи должна быть корректной, в частности, ее решение не должно сильно меняться при малых изме-

---

[1] *Таким является, например, предположение о компактности множества U. Кстати говоря, предположение о компактности множества A в данном случае более критично, но и оно вряд ли может вызывать серьезные возражения.*

нениях параметров задачи. В рассматриваемой задаче с этим все не очень благополучно. Но выбор варианта со строгим неравенством гарантирует хотя бы следующее. Выбранная «почти оптимальная» стратегия остается допустимой и в «достаточно близких» задачах и позволяет оперирующей стороне получить «почти такой же» выигрыш (смысл слов «достаточно близкий» в данном случае зависит от выбранной стратегии). При этом, конечно, точная нижняя грань может «скачком» уменьшиться при переходе к «близкой» модели, из-за чего выбранная стратегия может перестать быть «почти оптимальной». Это достаточно приятное свойство, если говорить о возможных приложениях. И на практике этого обычно бывает достаточно. При замене строгого неравенства на нестрогое все станет совсем не так.

В данной задаче исследование ее устойчивости оказывается довольно интересным. Но объем статьи не позволяет останавливаться на нем подробно. Укажем лишь некоторые (наиболее важные?) причины появления неустойчивости.

- Даже для непрерывной функции φ: $X \to \mathbf{R}$ множество $\{x \in X\colon \varphi(x) \geq 0\}$ может быть «больше» замыкания множества $\{x \in X\colon \varphi(x) > 0\}$.
- Мера $\wp\left(\overline{X}\right)$ замыкания $\overline{X}$ множества X может оказаться строго больше меры $\wp(X)$ самого множества X (например, если существуют точки положительной меры).
- Условие $\inf\limits_{x\in X} \varphi(x) > 0$, вообще говоря, сильнее, чем условие «$\forall x \in X\ \varphi(x) > 0$».

Знание таких причин часто помогает при исследовании устойчивости задачи и ее регуляризации.

Отдельного обсуждения заслуживает третья причина. Можно заменить условие (1) условием

(4) $\forall \alpha \in A\ g(u_*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon.$

В содержательных терминах новая задача интерпретируется не хуже старой. Решить ее можно с использованием тех же идей, которые применялись в предыдущем разделе. При этом ряда технических трудностей удастся избежать. Да и сам ответ в этой задаче выглядит несколько проще.

Правда сама постановка не совсем привычна: если условие (1) содержит одно ограничение, то в условии (4) записано (бесконечно) много ограничений. Только по этой причине решена задача с ограничением (1) (тем более, что вторая задача решается действительно проще).

Задача вычисления величины L_ε по формуле (3) в общем случае довольно сложна. Поэтому стоит обсудить возможные пути ее упрощения.

Прежде всего, обратим внимание на число m используемых сообщений. Для его определения, так или иначе, придется использовать какой-то перебор. Поэтому, конечно, хотелось бы иметь априорную оценку оптимального значения этого числа. К сожалению, простых оценок нет. Уже пример 1 показывает, что оптимальное число m существенно зависит от величины «погрешности» ε и от каких-то глобальных характеристик рассматриваемой модели. Локальных характеристик, типа, скажем, константы Липшица, здесь явно не достаточно. Нужны характеристики вроде ε-энтропии или ε-емкости. Но их вычисление уже само по себе в общем случае представляет собой достаточно серьезную задачу. Поэтому проще и эффективнее искать эти априорные оценки для конкретных задач.

Желание уменьшить число m приводит к идее рассматривать при решении задачи только «неизбыточные» покрытия множества A множествами $O_\varepsilon(u)$. К сожалению, эта идея не срабатывает, что показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $U = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, а функция $g(u,\alpha)$ равна 1 при $u = 1$ и $\alpha = 1,2,3$, при $u = 2$ и $\alpha = 4,5,6$ и при $u = 3$ и $\alpha = 2,3,4,5$, а при остальных значениях аргументов $g(u,\alpha) = 0$. Множества U и A конечны. Поэтому их можно считать наделенными дискретными топологиями. Тогда все их подмножества будут открытыми. Будем считать все значения α равновероятными.

Понятно, что при полной информации оперирующая сторона может гарантированно получить выигрыш $R = 1$, и в данной задаче интересны значения $\varepsilon \in (0,1)$.

В таком случае существует лишь два различных покрытия: одно состоит из множеств $O_\varepsilon(1)$ и $O_\varepsilon(2)$, а второе – из множеств $O_\varepsilon(1)$, $O_\varepsilon(2)$ и $O_\varepsilon(3)$.

Если применять описанный выше алгоритм к первому их этих покрытий, то получим отображение $P(\alpha)$, для которого $P(\alpha) = \Lambda$ при $\alpha = 1,2,3$ и $P(\alpha) = 0$ при $\alpha = 4,5,6$, и функцию u_*, для которой $u_*(\Lambda) = 1$ и $u_*(0) = 0$. При этом $L_\varepsilon = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Если будем использовать покрытие $O_\varepsilon(3), O_\varepsilon(1), O_\varepsilon(2)$, то получим отображение $P(\alpha)$, задаваемое условиями $P(\alpha) = \Lambda$ при $\alpha = 2,3,4,5$, $P(1) = 0$ и $P(6) = 1$. Тогда $L_\varepsilon = 0\cdot\frac{4}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Разумеется, второе покрытие «лучше», но при этом из него можно «выбросить» множество $O_\varepsilon(3)$.

Отсюда, кстати видно, что порядок множеств в покрытии является существенным. Если использовать вместо покрытия $O_\varepsilon(3), O_\varepsilon(1), O_\varepsilon(2)$ покрытие $O_\varepsilon(1), O_\varepsilon(2), O_\varepsilon(3)$, то вернемся к значению $L_\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Самая «неприятная» часть вычисления величины L_ε по формуле (3) – это, вероятно, поиск минимума по переменным $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Нетрудно понять, что избежать решения такой «многомерной» задачи не получится: в конце концов, эти переменные входят в «ответ» решаемой задачи, и так или иначе их значения нужно определять. Тогда встает другой вопрос: а нельзя ли заменить этот «кратный» минимум «последовательным», тем самым осуществив декомпозицию задачи?

В теории информации хорошо зарекомендовали себя разного рода жадные алгоритмы [3,11,14]. В рассматриваемой задаче эти идеи тоже работают, но до известного предела. По сути, с использованием этих идей было построено решение в примере 1. Да и в доказательстве основной теоремы эти идеи применялись. Пределы использования этих приемов определяются спецификой конкретных задач, как показывает следующий пример.

Напрашивается следующая идея вычисления инфимума по $(u_1,u_2,\ldots,u_m)$. Выберем управление u_1 так, чтобы мера множества $O_{\varepsilon'}(u_1)$ была наибольшей. Затем выберем управление u_2 для которого множество $O_{\varepsilon'}(u_2)$ покрывает бóльшую (по мере) часть остатка $A\backslash O_{\varepsilon'}(u_1)$. Будем продолжать действовать подобным образом до тех пор, пока множества $O_{\varepsilon'}(u_1),O_{\varepsilon'}(u_2),\ldots,$ $O_{\varepsilon'}(u_m)$ не образуют покрытия пространства A. Хотелось бы, чтобы в результате получилось решение задачи. К сожалению, это не так уже в следующем простом случае.

Пример 3. Пусть $U = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2,\ldots,15\}$, а функция g принимает значение 1 при $u = 1$ и $\alpha = 1,2,3,4,5$, при $u = 2$ и $\alpha = 6$, 7,8,9,10, при $u = 3$ и $\alpha = 11,12,13,14,15$ и при $u = 4$ и $\alpha = 1,2,6,7$, 11,12, а при остальных значениях переменных она равна 0. На множествах U и A зададим дискретные топологии, а на множестве A еще и равномерную меру.

Как и в предыдущем примере $R = 1$ и интересны значения $\varepsilon \in (0,1)$.

Описанный выше жадный алгоритм предписывает начинать выбор с управления $u_1 = 4$, которому соответствует шестиэлементное множество $O_{\varepsilon'}(4)$. Далее задача становится симметричной, и при любом порядке выбора оставшихся управлений (в покрытие будет входить четыре множества) получим значение $L_\varepsilon = 0\cdot\dfrac{6}{15} + 1\cdot\dfrac{3}{15} + 1\cdot\dfrac{3}{15} + 2\cdot\dfrac{3}{15} = \dfrac{4}{5}$.

Если же использовать покрытие $O_{\varepsilon'}(1),O_{\varepsilon'}(2),O_{\varepsilon'}(3)$, то получим результат $L_\varepsilon = 0\cdot\dfrac{5}{15} + 1\cdot\dfrac{5}{15} + 1\cdot\dfrac{5}{15} = \dfrac{2}{3}$. Этот результат лучше (и является оптимальным).

Чтобы не заканчивать на минорной ноте заметим, что «негативные» эффекты, найденные в примерах 2 и 3, в какой-то степени определяются дискретным характером решаемых задач. Эти примеры намеренно строились так, чтобы обсуждение можно было вести на качественном уровне. В общем случае нужно более детальное количественное исследование, но его приходится отложить до другого раза. Приведенные примеры показывают, что оно не может быть совсем уж тривиальным, но может оказаться полезным.

6. Заключение

Итак, поставленная в разделе 2 задача имеет естественное, разумно интерпретируемое решение. Эта задача довольно нестандартна[1]. Поэтому сам факт того, что удалось найти структуру оптимальных стратегий, «избавившись» тем самым от функционального пространства в определении, заслуживает внимания. Указанные обстоятельства свидетельствуют о том, что подобные задачи заслуживают дальнейшего изучения.

Отметим некоторые направления дальнейших исследований. Начнем с вопросов, относящихся непосредственно к описанной выше модели.

Один качественный вопрос, относящийся к рассматриваемой, задаче пока остался без ответа. Пример 1 показывает, что существуют модели, для которых $L(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0 + 0$ для любой стратегии $(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon)$. Нетрудно придумать примеры, в которых величина $L(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon)$ остается ограниченной при уменьшении ε, по крайней мере, для оптимальных стратегий $(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon)$ (достаточно рассмотреть, например, модели в которых одно из множеств U или A конечно). Было бы интересно выяснить, являются ли оба эти случая типичными, или один из них – вырожденный. Разумеется, для этого необходимо ввести какую-то дополнительную структуру на классе рассматриваемых моделей, позволяющую характеризовать «массивность» множества моделей. Сюда же примыкают вопросы об устойчивости решений рассматриваемой задачи, лишь слегка затронутые выше.

Очевидно, что поиск оптимальных стратегий даже с использованием доказанной теоремы становится неподъемной задачей, когда объем необходимой информации действительно

---

[1] *Заметим, что в структуре найденного решения отсутствуют пресловутые стратегии наказания. Но в целом найденная структура решения характерна и для других задач принятия решений в условиях конфликта или неопределенности.*

велик, а именно такой случай представляет основной интерес. Поэтому имеется насущная необходимость в получении простых, пускай и грубых асимптотических оценок.

Выше осуществлялся поиск минимума точного значения функции $L(u_{*\varepsilon},P_\varepsilon)$. Понятно, что дискретный «характер» этой функции существенно осложняет задачу. А при больших объемах информации этой дискретностью, очевидно, можно пренебречь, заменив эту функцию «хорошей» гладкой аппроксимацией. Это попутно решило бы еще одну проблему – зависимость решения от используемого алфавита. Понятно, что в простых моделях, например, описанных в примерах 2 и 3 характер решения существенно изменится, если информацию кодировать не в алфавите $\{0,1\}$, а скажем, в терхбуквенном алфавите. Это не очень приятно, и от этого хотелось бы уйти. К. Шеннон решил эту задачу, введя понятие энтропии [11]. Это понятие оказалось чрезвычайно полезным и за пределами теории информации. Что-то подобное было бы важно получить и для рассматриваемой задачи.

В этой связи можно подумать о следующей модификации модели. В статье рассматривался одношаговый вариант принятия решения: вся информация о реализовавшемся значении случайного фактора получалась сразу. Можно подумать об иной схеме принятия решения: сначала собирается некая предварительная информация, на ее основе формулируется новый список вопросов и лишь после получения ответов на них принимается окончательное решение. Понятно, что такой подход вполне реализуем на практике. Несложно показать, что такой двухшаговый способ принятия решения может позволить обойтись меньшим объемом обрабатываемой информации при том же гарантированном результате. Насколько сложной является задача поиска оптимальных стратегий в новой задаче пока не ясно. А при ее успешном решении можно думать о задаче поиска «оптимального» числа шагов.

Выше рассмотрена модель идеальной ситуации, когда оперирующей стороне в принципе доступна вся существенная информация. На практике дело обычно обстоит сложнее: часть значимой информации по тем или иным причинам в момент принятия решений является недоступной. Можно предположить, что новые трудности при исследовании такого более общего случая носят в основном технический характер. Но это стоит проверить.

Разумеется, можно встраивать рассмотренные конструкции и в теоретико-игровые модели принятия решений.

Безусловно, исследованная модель слишком абстрактна, чтобы можно было говорить о ее непосредственном применении в народном хозяйстве. Но актуальность поставленных вопросов не должна вызывать сомнений. А предложенные подходы к их решению кажутся вполне разумными.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., НОВИКОВ Д.А. *Вероятностная задача стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №12. – С. 140–145.
2. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы.* – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. ВЕРЕЩАГИН Н.К., ЩЕПИН Е.В. *Информация, кодирование и предсказание.* – М.: ФМОП МСНМО, 2012. – 236 с.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
5. ГОРЕЛОВ М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №3. – С. 124–144.
6. ГОРЕЛОВ М.А., ЕРЕШКО Ф.И. *Информированность и децентрализация управления* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №6. – С. 156–172.
7. ГОРЕЛОВ М.А., ЕРЕШКО Ф.И. *Информированность и децентрализация управления* (*стохастический случай*) // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №1. – С. 52–66.
8. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М. *Методы стохастического программирования.* – М.: Наука, 1976. – 239 с.
9. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности*. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.

10. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Общее решение задачи Центр – Агент с симметричной информацией в условиях риска* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т.41. – №3. – С. 374–383.
11. ШЕННОН К. *Работы по теории информации и кибернетике.* – М.: ИЛ, 1963. – 827 с.
12. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory*. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
13. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal–Agent Model*. – Princeton: Princeton University Press, 2002. – 440 p.
14. MACKAY D.J.C. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 628 p.
15. SHAPIRO A., DENCHEVA D., RUSZCZYNSKI A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory.* – USA: SIAM, 2009. – 436 p.

ON A QUANTITY OF INFORMATION REQUIRED FOR EFFICIENT CONTROL

Mikhail Gorelov, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Cand.Sc. (griefer@ccas.ru).

Abstract: It is well known that for effective management it is necessary to use information about the surrounding world. But if there is a lot of this information, then one have to save the resources spent on its receipt and processing. Therefore, the question arises of finding rational ways to handle this information. One of the models that allow us to study this question by formal methods is investigated in the article. The simplest control system under risk is considered. It is assumed that information about the realized value of a random factor is available to the operating party. This information is encoded in binary words. The choice of information content, that is, the encoding method, is considered as the prerogative of the operating party. A control result acceptable to the operating party is determined. The task is set to find an encoding method that can guarantee to get this result with the smallest expected value of the length of the message about the realized value of the uncertain factor. It is shown that under very general assumptions this expected value is finite. The qualitative structure of the function from the set of possible values of a random factor to the set of binary words, which defines the optimal coding method, is clarified. The task of search such a function is reduced to solving *the stochastic programming problem on a "finite-dimensional" space. The results obtained have a reasonable meaningful interpretation. This allows us to conclude that the model constructed correctly reflects the main features of the simulated phenomenon and deserves further study.*

Keywords: decision-making under risk, the maximal guaranteed result, the quantity of information.

УДК 519.865 + 519.95
ББК 22.165

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…