

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ¹

Зверкина Г.А.²,
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
ФГАОУВО “Российский университет транспорта”, Москва)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575А

Автор признателен Л.Г. Афанасьевой за ценное обсуждение и конструктивную критику статьи.

²Зверкина Галина Александровна, к.ф.-м.н., доцент
(zverkina@gmail.com).

В теории надёжности важную роль играет знание значения (или оценок значения) коэффициента готовности, т.е. вероятности того, что в заданный момент времени устройство исправно. В большинстве случаев вычисление стационарного значения коэффициента готовности не вызывает больших сложностей. Однако в реальных приложениях надо знать, как скоро значение коэффициента готовности станет достаточно близким к своему предельному значению, т.е. важно знать скорость сходимости коэффициента готовности к его стационарному значению. В тех случаях, когда распределения времён работы и восстановления являются экспоненциальными, вопрос о скорости сходимости коэффициента готовности – это вопрос о скорости сходимости решения уравнений Колмогорова-Чапмена с постоянными коэффициентами. Такая задача разрешима с помощью операционного исчисления. Также заметим, что большинство процессов, описывающих поведение систем надёжности, являются регенерирующими, и для них известен тип скорости сходимости распределения к стационарному – экспоненциальное или степенное. Строгие оценки скорости сходимости для регенерирующих процессов могут быть получены с помощью неравенства Лордена, когда известно распределение длины одного периода регенерации. Но для систем надёжности можно учитывать и конкретные особенности исследуемого регенерирующего периода. В настоящей статье показан метод построения строгой экспоненциальной оценки скорости сходимости коэффициента готовности для одного восстанавливаемого элемента. В теории надёжности важную роль играет знание значения (или оценок значения) коэффициента готовности, т.е. вероятности того, что в заданный момент времени устройство исправно. В большинстве случаев вычисление стационарного значения коэффициента готовности не вызывает больших сложностей. Однако в реальных приложениях надо знать, как скоро значение коэффициента готовности станет достаточно близким к своему предельному значению, т.е. важно знать скорость сходимости коэффициента готовности к его стационарному значению. В тех случаях, когда распределения времён работы и восстановления являются экспоненциальными, вопрос о скорости сходимости коэффициента готовности – это вопрос о скорости сходимости решения уравнений Колмогорова-Чапмена с постоянными коэффициентами. Такая задача разрешима с помощью операционного исчисления. Также заметим, что большинство процессов, описывающих поведение систем надёжности, являются регенерирующими, и для них известен тип скорости сходимости распределения к стационарному – экспоненциальное или степенное. Строгие оценки скорости сходимости для регенерирующих процессов могут быть получены с помощью неравенства Лордена, когда известно распределение длины одного периода регенерации. Но для систем надёжности можно учитывать и конкретные особенности исследуемого регенерирующего периода. В настоящей статье показан метод построения строгой экспоненциальной оценки скорости сходимости коэффициента готовности для одного восстанавливаемого элемента.

Ключевые слова: коэффициент готовности, восстанавливаемый элемент, оценка скорости сходимости, экспоненциальная сходимость.

1. Введение

Как известно, коэффициент готовности $k_{\Gamma}(t)$ – это вероятность того, что в момент времени t изучаемый элемент (устройство, система) находится в рабочем состоянии. Предполагается, что этот элемент (устройство, система) может находиться в двух состояниях: исправном (обозначаемом $\{1\}$) и неисправном (обозначаемом $\{2\}$). Этим состояниям соответствует последовательность случайных периодов времени $\xi_k^{(1)}$, $\xi_k^{(2)}$, где $\xi_k^{(1)}$ – k -й период безотказной работы элемента, а $\xi_k^{(2)}$ – k -й период его восстановления (замены). Периоды рабочего состояния элемента $\xi_k^{(1)}$ – случайные величины с функцией распределения $F^{(1)}(s) = \mathbf{P}\{\xi_k^{(1)} \leq s\} = \mathbf{P}\{\xi^{(1)} \leq s\}$, периоды его неисправного состояния (время восстановления) $\xi_k^{(2)}$ – случайные величины с функцией распределения $F^{(2)}(s) = \mathbf{P}\{\xi_k^{(2)} \leq s\} = \mathbf{P}\{\xi^{(2)} \leq s\}$; случайные величины $\xi_k^{(j)}$, $\xi_m^{(i)}$ независимы в совокупности (здесь и везде далее $i, j = \overline{1, 2}$).

Следуя [2, Гл. 2], дадим определение.

Определение 1. Пусть некий элемент, начав работу в момент $t = 0$ и проработав случайное время $\xi_1^{(1)}$, выходит из строя, затем он восстанавливается (заменяется исправным) в течение случайного времени $\xi_1^{(2)}$; восстановленный элемент работает время $\xi_2^{(1)}$ и затем восстанавливается время $\xi_2^{(2)}$; и

т.д. Положим

$$t_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^k \left(\xi_m^{(1)} + \xi_m^{(2)} \right);$$

$$t'_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\xi_m^{(1)} + \xi_m^{(2)} \right) + \xi_k^{(1)} = t_k + \xi_k^{(1)};$$

моменты t_k есть моменты восстановления элемента, а моменты t'_k – моменты его отказов; при этом $\xi_k^{(1)} = t'_k - t_k$, $\xi_k^{(2)} = t_k - t'_{k-1}$.

Коэффициент готовности $k_\Gamma(t)$ элемента в момент t определяется как вероятность того, что в момент t элемент исправен:

$$k_\Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{t \in (t_k; t'_k)\} \right).$$

Случайный процесс, описывающий поведение такого восстанавливаемого элемента, регенерирующий. Из классической теории восстановления (см., например, [3, Гл. 2] и [5, Ч. I, Гл. 5]) следует, что в случае, когда $\xi_k^{(1)}$ и $\xi_k^{(2)}$ имеют нерешётчатое распределение и конечные математические ожидания

$$(1) \quad T_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(i)} < \infty,$$

существует предельное (стационарное) значение коэффициента готовности: $\lim_{t \rightarrow \infty} k_\Gamma(t) = k_\Gamma = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$.

Наиболее просто исследуется ситуация, когда $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$ – экспоненциальные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. В этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} k_\Gamma(t) = k_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, а скорость сходимости $k_\Gamma(t)$ к k_Γ экспоненциальна; имеет место точная оценка:

$$(2) \quad 0 < k_\Gamma(t) - k_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t},$$

см. [2, Гл. 2, § 3], [5, Ч. I, Гл. 5].

Из Теоремы 3 [1, Приложение 1 (Стр. 330)] (или Теоремы 10.7.4 [10, Р. 417]) следует, что если при некотором $c > 0$ выполнено $\mathbf{E} e^{c(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)})} < \infty$, то $\forall \alpha \in (0; c) \exists K(\alpha)$ такое, что $\forall t \geq 0$ верно

$$(3) \quad |k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < K(\alpha)e^{-\alpha t},$$

однако каких-либо оценок для $K(\alpha)$ сверху неизвестно. Если при $\alpha > c$ выполнено $\mathbf{E} e^{c(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)})} = \infty$, то $\lim_{\alpha \uparrow c} K(\alpha) = \infty$, т.е. при $c - \alpha \ll 1$ применение неравенства (3) малопродуктивно (естественно, если известна величина $K(\alpha)$ или хотя бы её оценка).

Целью настоящей работы является получение оценки для $K(\alpha)$ в случае, когда время безотказной работы элемента задаётся ограниченной отсечённой от нуля интенсивностью $\lambda(\cdot)$, а время его восстановления имеет конечный экспоненциальный момент.

Во второй части работы сформулирован основной результат и изложена идея его доказательства, в третьей части приведены примеры, в четвёртой части приводятся вспомогательные факты, и в пятой части – доказательство основного результата.

2. Обозначения и основной результат

Итак, имеется элемент, который может находиться в двух состояниях – рабочем $\{1\}$, и нерабочем $\{2\}$. Времена пребывания в этих состояниях случайны и независимы, их распределения имеют соответственно функции распределения $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$, при этом интенсивность восстановления элемента зависит от времени, прошедшего с момента отказа. Это значит, что если в момент t элемент находится в состоянии $\{1\}$, и попал в это состояние s единиц времени назад, то вероятность того, что на интервале $(t; t + \Delta)$ он изменит состояние ($\{1\} \rightarrow \{2\}$), равна $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Распределение $\xi^{(1)}$ – времени исправного состояния элемента – определяется интенсив-

ностью $\lambda(s)$, т.е. функцией, связанной с ф.р. времени безотказной работы $F^{(1)}(s)$:

$$(4) \quad \mathbf{P} \{ \xi^{(1)} \leq s \} = F^{(1)}(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \lambda(u) du \right);$$

$$f^{(1)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (F^{(1)}(s))' = \lambda(s) \exp \left(- \int_0^s \lambda(u) du \right).$$

Для того чтобы определённая в (4) функция $F^{(1)}(s)$ была функцией распределения, достаточно, чтобы $\lambda(s)$ была неотрицательна, измерима по Борелю и $\int_0^\infty \lambda(s) ds = \infty$.

Распределение $\xi^{(2)}$ – времени восстановления элемента – имеет функцию распределения $F^{(2)}(s)$. Везде в дальнейшем $\xi_k^{(i)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(i)}$.

Поведение восстанавливаемого элемента описывается альтернирующим (полумарковским) процессом восстановления (см. [5]):

$$n_t = \begin{cases} 1, & \text{если элемент в момент } t \text{ исправен;} \\ 2, & \text{если элемент в момент } t \text{ неисправен.} \end{cases}$$

Дополним этот процесс n_t ещё одной компонентой – временем, прошедшим с момента попадания процесса n_t в то состояние, в котором он находится в момент t , и получим Марковский случайный процесс $X_t = (n_t, x_t)$, определённый так:

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (1, x), & \text{если элемент исправен и находится} \\ & \text{в исправном состоянии } x \text{ единиц времени;} \\ (2, x), & \text{если элемент неисправен и находится} \\ & \text{в неисправном состоянии } x \text{ единиц времени.} \end{cases}$$

Пространство состояний процесса X_t есть $\mathcal{X} = \{1, 2\} \times \mathbb{R}_+ = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, где $\mathcal{S}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{1\} \times \mathbb{R}_+\}$ (элемент исправен) и $\mathcal{S}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{2\} \times \mathbb{R}_+\}$ (элемент неисправен); $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$.

В момент времени t процесс X_t имеет на пространстве $\mathcal{X}$ распределение $\mathcal{P}_t$, т.е. $\mathbf{P}\{X_t \in A\} = \mathcal{P}_t(A)$ для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Обозначим $n(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} n_t$, $x(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} x_t$.

В дальнейшем под состоянием процесса X_t понимаем пару (n_t, x_t) .

Обычно предполагают, что восстанавливаемый элемент начинает свою работу в исправном состоянии в начальный момент времени $t = 0$: $X_0 = (1, 0)$. Мы будем предполагать, что в начальный момент времени $t = 0$ процесс X_t может принимать любое значение из $\mathcal{X}$: $X_0 = (n_0, x_0)$. Поэтому распределение процесса X_t зависит от начального состояния: будем обозначать это распределение $\mathcal{P}_t^{X_0}$ или $\mathcal{P}_t^{(n_0, x_0)}$. Коэффициент готовности элемента с начальным состоянием X_0 определяется как

$$k_{\Gamma}^{X_0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{n(X_t) = 1\} = \mathbf{P}\{X_t \in \mathcal{S}_1\} = \mathcal{P}_t^{X_0}(\mathcal{S}_1).$$

2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1.1. $\mathcal{T}(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : X_t = (1, 0)\}$ – первый момент регенерации процесса X_t (см. ниже раздел 5.1).

2.1.2. $\xi_x^{(i)}$ – сл.в. с ф.р., и:

$$(5) \quad F_x^{(i)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1 - F^{(i)}(x + s)}{1 - F^{(i)}(x)}; \quad f_x^{(1)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(F_x^{(i)}(s)\right)'.$$

$$\text{Если } F^{(2)}(x) = 1, \text{ то } \frac{1 - F^{(2)}(x + s)}{1 - F^{(2)}(x)} \stackrel{\text{def}}{=} 0; F_0^{(i)}(s) = F^{(i)}(s)$$

при $F^{(i)}(0+) = 0$.

При $X_t \in \mathcal{S}_i$ сл.в. $\xi_x^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{s > t : X_t \notin \mathcal{S}_i\} - t)$ – остаточное время пребывания процесса X_t в множестве $\mathcal{S}_i$ – имеет ф.р. $F_x^{(i)}(s)$.

Замечание 1. Из (4) следует: при $s \in \mathbb{R}_+$

$$f^{(1)}(s), f_x^{(1)}(s) \in (ce^{-Cs}; Ce^{-cs});$$

$$F^{(1)}(s), F_x^{(1)}(s) \in (1 - e^{-cs}, 1 - e^{-Cs}),$$

поэтому для всех $\alpha < c$

$$(6) \quad \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \leq \frac{C}{c - \alpha}, \quad \mathbf{E} e^{\alpha \xi_x^{(1)}} \leq \frac{C}{c - \alpha}.$$

▷

$$2.1.3. \quad T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(1)}; \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(2)}; \quad k_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

2.1.4. $\tilde{\xi}^{(i)}$ – сл.в. с плотностью распределения

$$(7) \quad \tilde{f}^{(i)}(s) = \frac{1 - F^{(i)}(s)}{\mathbf{E} \xi^{(i)}} = \frac{1 - F^{(i)}(s)}{T_i}.$$

$$2.1.5. \quad \text{Обозначим } \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E} (\xi^{(2)})^2}{2T_2};$$

$$p = p(c, C, R, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ce^{-C\Theta}}{C} \left(1 - \frac{\Theta}{R}\right); \quad q \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p;$$

$$R^* = R^*(C, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 4\frac{\Theta}{C}}}{C}.$$

$$2.1.6. \quad \text{Обозначим } \widehat{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha s} \left(1 - F^{(2)}(s + u)\right) ds du.$$

Замечание 2. Для конечности $\widehat{M}_\alpha$ достаточно конечности $\sup_{x \geq 0} (1 - F^{(2)}(s)) e^{-cs} < \infty$ при некотором $c > \alpha$. ▷

2.1.7. Обозначим $M_\alpha(n, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}} \mathbf{E} e^{\alpha\xi_x^{(1)}} & \text{при } n = 1; \\ \mathbf{E} e^{\alpha\xi_x^{(2)}} & \text{при } n = 2; \end{cases}$

2.1.8. Обозначим

$$\overline{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T_1 + T_2} \left(\frac{\alpha C \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}}}{(c - \alpha)c} + \alpha \widehat{M}_\alpha^{(2)} + T_1 \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}} + T_2 \right).$$

2.1.9. Обозначим

$$\mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C e^{\alpha R^*} M_\alpha(X_0) \overline{M}_\alpha}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}} q)}.$$

2.2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Если выполнены условия

$$F^{(1)}(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \lambda(u) du \right);$$

$$(8) \quad \forall x \geq 0 \quad 0 < c < \lambda(x) \leq C < \infty,$$

$$\widehat{M}_c^{(2)} < \infty; \quad F^{(2)}(0+) = 0,$$

$$\mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}} q < 1$$

то при любом начальном состоянии X_0 процесса X_t его распределение $\mathcal{P}_t^{X_0}$ слабо сходится к стационарному распределению $\mathcal{P}$ на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, и $\forall t > 0$

(9)

$$\|\mathcal{P}_t^{X_0} - \mathcal{P}\|_{TV} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} |\mathcal{P}_t^{X_0}(A) - \mathcal{P}(A)| \leq 2 \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t}.$$

Следствие 1. В условиях Теоремы 1

$$\left| k_\Gamma^{X_0}(t) - k_\Gamma \right| \leq \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t}.$$

▷

Следствие 1 вытекает из того, что

$$k_{\Gamma}^{X_0}(t) = \mathbf{P}\{n(X_t) = 1\} = \mathbf{P}\{X_t \in \mathcal{S}_1\} = \mathcal{P}_t^{X_0}(\mathcal{S}_1).$$

3. Идея доказательства Теоремы 1

Доказательство Теоремы основано на использовании метода склеивания (coupling method – см. [8], [10]) Марковских процессов.

Метод склеивания основан на оценке момента времени, когда происходит совпадение двух независимых Марковских процессов с одинаковыми переходными функциями и произвольными начальными состояниями.

Т.е. мы рассматриваем две независимые версии процесса X_t – X'_t и X''_t , начинающиеся соответственно из начальных состояний X'_0 и X''_0 . В общем случае эти процессы могут совпасть (склеиться) только в момент перехода в одно и то же состояние (т.е. переход вида $\{1\} \rightarrow \{2\}$ или $\{2\} \rightarrow \{1\}$). Вероятность того, что эти процессы совпадут (при $X'_0 \neq X''_0$), может оказаться отличной от нуля только в том случае, когда оба процесса начинаются из состояния $\{2\}$ и ф.р. $F_2(s)$ имеет дискретную составляющую.

Поэтому на некотором специально выбранном вероятностном пространстве строится пара процессов (Z'_t, Z''_t) такая, что маргинальные распределения компонент этого “парного” процесса совпадают с распределениями процессов X'_t, X''_t (в частности, $Z'_0 = X'_0, Z''_0 = X''_0$), и при этом для всех $t > T_{Z'_0, Z''_0} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z'_t = Z''_t\}$ выполнено равенство $Z'_t = Z''_t$. Следуя [7], эту пару называем склейкой процессов X'_t и X''_t .

Если сл.в. $T_{Z'_0, Z''_0}$ конечна с вероятностью 1, то склейка называется успешной.

Наша цель – построить успешную склейку (Z'_t, Z''_t) процессов X'_t и X''_t , такую, что для некоторого

$$K(\alpha, Z'_0, Z''_0) = K(\alpha, c, C, Z'_0, Z''_0)$$

выполнено

$$\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} \leq K(\alpha, Z'_0, Z''_0) < \infty.$$

В этом случае можно применить к процессам X'_t и X''_t основное неравенство склеивания (basic coupling inequality): для всех $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ верно:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right| = \\ & = \left| \mathbf{P}\{X'_t \in A\} - \mathbf{P}\{X''_t \in A\} \right| = \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A\} \right| = \\ & = \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} \leq t\} + \mathbf{P}\{Z'_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} > t\} - \right. \\ & \left. - \mathbf{P}\{Z''_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} \leq t\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} > t\} \right| \leq \\ & \leq \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} > t\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A \& T_{Z'_0, Z''_0} > t\} \right| \leq \\ & \leq \mathbf{P}\{T_{Z'_0, Z''_0} > t\} = \mathbf{P}\{e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} > e^{\alpha t}\} \leq \\ & \leq \frac{\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}}}{e^{\alpha t}} \leq K(\alpha, Z'_0, Z''_0) e^{-\alpha t} = K(\alpha, X'_0, X''_0) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right\|_{TV} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right| \leq \\ & \leq 2 K(\alpha, X'_0, X''_0) e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{X}_t$ — процесс, начальное распределение которого — $\mathcal{P}$; это — стационарный процесс. Если

$$\int_{\mathcal{X}} K(\alpha, X'_0, X''_0) \mathcal{P}(dX''_0) \leq \mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X'_0), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathbf{P}\{X'_t \in A\} - \mathbf{P}\{\tilde{X}_t \in A\} \right| = \\ = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}(A) \right| \leq \mathfrak{K}(\alpha, X'_0) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение Теоремы 1.

Полное доказательство Теремы 1 дано в разделах 5–6.

4. Примеры применения Теоремы 1

Для двух вариантов ф.р. $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$ было проведено имитационное моделирование (10 000 000 реализаций, вычисления с 16 знаками после нуля) поведения процесса X_t с различными начальными условиями, вычислены эмпирические значения коэффициента готовности $k_{\Gamma}^{\text{эмп}}(t)$ для $t = 1, 2, \dots, 650$, получена (несколько заниженная) эмпирическая оценка $\mathfrak{K}^{\text{эмп}}(\alpha)$ величины $\mathfrak{K}(\alpha)$, которая была сравнена с $\mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X_0)$.

Причин того, что эмпирическая оценка $\mathfrak{K}^{\text{эмп}}(\alpha)$ занижена, две.

Во-первых, при $\Delta^{\text{эмп}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} |k_{\Gamma}^{\text{эмп}}(t) - k_{\Gamma}| < 0,0004$ разброс $\Delta^{\text{эмп}}(t)$ сравним с величиной $\Delta^{\text{эмп}}(t)$. Это следствие накопления ошибок округления при вычислении значений сл.в. $\xi^{(i)}$; увеличение числа реализаций здесь не даёт улучшения точности (см. Рис.1 и Таблицу 1).

Поэтому вычисление $\mathfrak{K}^{\text{эмп}}(\alpha)$ проводилось только по нескольким из эмпирических данных – по значениям $\Delta(t)$ для первых 10-15 единиц времени.

Также было проведено сравнение величин $\mathfrak{T}_{\varepsilon}^{\text{эмп}}(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : \forall s > t \quad |k_{\Gamma}^{\text{эмп}}(s) - k_{\Gamma}| < \varepsilon\}$, полученных в численных экспериментах (здесь точность определения $\mathfrak{T}_{\varepsilon}^{\text{эмп}}(X_0)$ представляется удовлетворительной) и

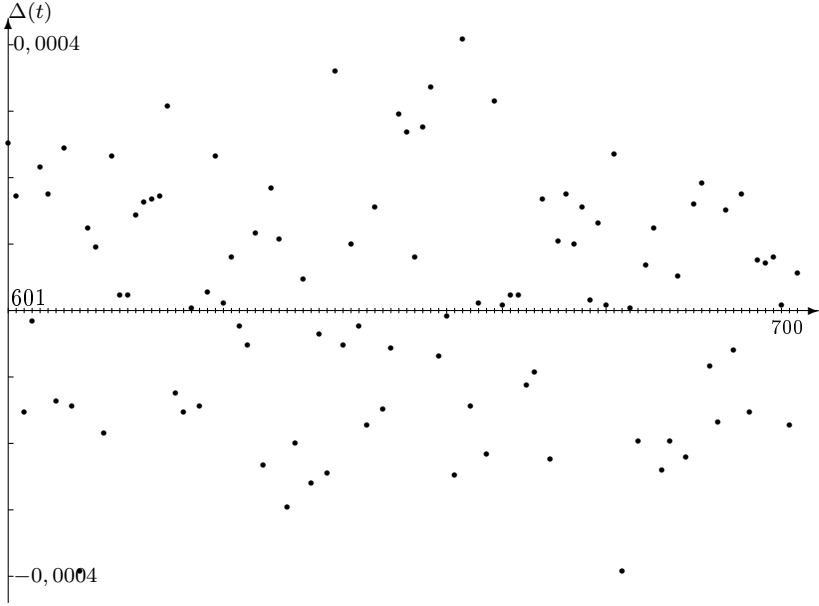


Рис. 1. $\Delta(t)$ для $t = 601, 602, \dots, 700$

$\mathfrak{T}_\varepsilon(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : \forall s > t \quad |k_\Gamma(s) - k_\Gamma| < \varepsilon\}$, полученных из оценки (9). $\mathfrak{T}_\varepsilon(X_0)$ – это время, по истечении которого можно с точностью ε определить k_Γ по результатам наблюдений за процессом X_t .

Поскольку при имитационном моделировании значение $k_\Gamma(t)$ вычислялось в целочисленные моменты времени, для $\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{мп}}(X_0)$ определялся интервал единичной длины, в который попало значение $\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{мп}}(X_0)$ – см. Таблицы 3 и 4.

4.1. ПРИМЕР 1

Пусть $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-s}$, $\xi^{(2)} \equiv 1$ (время восстановления элемента постоянно). В этом случае $C = c = 1$; $\Theta = 1$; $R^* \approx 1,618$; ³ $q \approx 0,9243$; $\mathbf{E}e^{\xi^{(1)}} = \frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha < 1$; $\mathbf{E}e^{\alpha\xi^{(1)}}\mathbf{E}e^{\alpha\xi^{(2)}}q < 1$ при $\alpha < 0,039$, т.е. формула (9) примени-

³Золотое сечение.

ма для $\alpha \in (0; 0,03899)$.

Поскольку для любых $a > 0$ верно равенство $F_a^{(1)}(s) \equiv F_a^{(1)}(s)$, распределения $\mathcal{P}_t^{(1,0)}$ и $\mathcal{P}_t^{(1,\cdot)}$ совпадают.

Заметим, что при любом начальном значении X_0 максимум $|\Delta(t)|$ достигается при $t = 0$: $|\Delta(0)| = 0,5$, поскольку $\mathbf{P}\{X_0 \in \mathcal{S}_1\} = 0$ или $\mathbf{P}\{X_0 \in \mathcal{S}_1\} = 1$, а при $k \in N$ величина $|\Delta(t)|$ убывает очень быстро. Т.е. при $\alpha \in (0; 0,03899)$ величина оценки $K^{\text{эмп}}(\alpha)$ не зависит от α : $K^{\text{эмп}}(\alpha) \equiv 0,5$.

Поэтому также вычислялись оценки для $\tilde{\mathfrak{K}}^{\text{эмп}}$ без учёта значений $k_{\Gamma}^{\text{эмп}}(t)$ для $t \in [0; 1)$.

Оценки $\mathfrak{K}(\alpha)$ приведены в Таблице 3; поскольку диапазон изменения α очень мал ($\alpha < 0,03899$), отношения величин $M_{\alpha}(X_0)$ для рассмотренных начальных значений X_0 равны примерно 1, и поэтому отношения величин $\mathfrak{K}(\alpha, X_0)$ также близки к 1 (см. 2.1.9). •

4.2. ПРИМЕР 2

Пусть $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-4s}$, $F^{(2)}(s) = 1 - e^{-s^2}$; заметим, что в этом случае интенсивность восстановления элемента $\frac{(F^{(2)}(s))'}{1 - F^{(2)}(s)} = 2s$.

Далее,

$$c = C = 0,7; \quad \mathbf{E} \xi^{(1)} \approx 1,428; \quad \mathbf{E} (\xi^{(1)})^2 \approx 4,082;$$

$$\mathbf{E} \xi^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,8862; \quad \mathbf{E} (\xi^{(2)})^2 = 1; \quad \Theta = \mathbf{E} \xi^{(1)} \approx 1,428;$$

$$R^* \approx 2,3115; \quad q \approx 0,9243; \quad k_{\Gamma} \approx 0,6171;$$

функция $q\mathbf{E}e^{\alpha\xi^{(1)}}\mathbf{E}e^{\alpha\xi^{(2)}}$ равна 1 при $\alpha = \alpha_0 \approx 0,04117$, т.е. для всех $\alpha < 0,04117$ применима оценка (9).

Сравнение эмпирических результатов и результата применения Теоремы 1 приведено в Таблице 4.

В этом случае $\frac{\mathfrak{K}(\alpha, (2, 0))}{\mathfrak{K}(\alpha, (1, \cdot))} \in (0,95; 1)$, но $\frac{\mathfrak{K}(\alpha, (2, x))}{\mathfrak{K}(\alpha, (1, \cdot))} < 0,05$ при $x \geq 10$, поэтому оценки $\mathfrak{T}_{\varepsilon}$ для $X_0 = (2, 0)$ и $X_0 =$

$(1, \cdot)$ близки, а оценки $\mathfrak{T}_\varepsilon$ для $X_0 = (2, 10)$ и $X_0 = (2, 25)$ существенно от них отличаются (Таблица 5). •

4.3. ПРИМЕР 3.

Пусть $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-\lambda s}$, $F^{(2)}(s) = 1 - e^{-\mu s}$; в этом случае имеет место оценка (2); $k_\Gamma = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Оценим скорость сходимости $k_\Gamma(t)$ к предельному значению, используя оценки из доказательства Теоремы 1, но, несколько улучшив точность с использованием свойств показательного распределения: входящие в $\mathfrak{K}(\alpha)$ величины либо вычисляются точно, либо могут быть более точно оценены.

1. $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k)$ (см. 6.3.4) вычисляется явно: $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) = \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}$; чтобы эта вероятность была больше, будем считать, что $\mu > \lambda$.

2. Из того, что

$$(10) \quad F_a^{(i)}(s) \equiv F^{(i)}(s),$$

следует, что $\varkappa_{x,y} \equiv 1$.

3. Поскольку $\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(1)} > \xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)}\right\} = 1 - q = \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}$; $q = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}$ (здесь $\tilde{\xi}_k^{(i)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(i)}$).

4. Вместо $M_\alpha(n, x)$ будем использовать

$$\widetilde{M}_\alpha(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1; \\ \frac{\mu}{\mu - \alpha} & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

5. Из (10) следует, что в качестве $\mathcal{T}_0$ (15) для процесса Z_t можно взять момент $\widetilde{\mathcal{T}}_0(Z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : n(Z_t) = 1\}$; соответственно

$$\widetilde{\mathcal{T}}_0(n, x) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } n = 1; \\ \xi_x^{(2)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(2)} & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

поэтому $\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0(n,x)} = \tilde{M}_\alpha(n,x)$.

6. Далее, можно явно выписать распределение сл.в. $\tilde{T}_0(X'_0, X''_0) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\tilde{T}_0(X'_0), \tilde{T}_0(X''_0))$:

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{T}_0(X'_0, X''_0) \leq s \right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n' = n'' = 1; \\ 1 - e^{-\mu s} & \text{при } n' + n'' = 3; \\ (1 - e^{-\mu s})^2 & \text{при } n' = n'' = 2. \end{cases}$$

Т.е.

$$\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0(X'_0, X''_0)} = \begin{cases} 1, & \text{при } n' = n'' = 1; \\ \frac{\mu}{\mu - \alpha}, & \text{при } n' + n'' = 3; \\ \frac{2\mu^2}{(2\mu - \alpha)(\mu - \alpha)}, & \text{при } n' = n'' = 2, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0(X'_0, X''_0)} \mathcal{P}(dX''_0) &\leq \frac{\mu}{\mu - \alpha} \left(k_\Gamma + \frac{2\mu(1 - k_\Gamma)}{2\mu - \alpha} \right) = \\ &= \frac{\mu^2(2\mu + 2\lambda - \alpha)}{(\mu - \alpha)(\lambda + \mu)(2\mu - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu); \end{aligned}$$

эта оценка может быть уточнена.

7. В случае если по схеме, описанной в 6.3.5, после момента $\mathcal{T}_k$ произошло склеивание процессов Z'_t и Z''_t в момент $\mathcal{T}_{k+1}$, то разность $\mathcal{T}_{k+1} - \mathcal{T}_k$ оценим сверху не величиной $R^* + \hat{\xi}_k^{(1)}$, а величиной $\varrho \stackrel{\text{def}}{=} (\max(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}, \xi_\ell^{(1)}) + \xi_{k'}^{(1)})$ — здесь мы учитываем, что $\hat{\xi}_k^{(1)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi_k^{(1)}$.

Ф.р. $F_{1+2}(s) = \mathbf{P} \left\{ \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} \leq s \right\} = 1 - \frac{\lambda e^{-\mu s} - \mu e^{-\lambda s}}{\lambda - \mu}$, и
при $\alpha < \min(\lambda, \mu)$

$$\mathbf{E} e^{\alpha \varrho} = \frac{2\lambda^5 \mu - 2\lambda^3 \mu^3 + 3\alpha(\lambda^3 \mu^2 - \lambda^4 \mu)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \alpha)(2\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)(\lambda + \mu - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu).$$

8. Далее, следуя по пути доказательства Теоремы 1, имеем: для сл.в. ν такой, что $\mathbf{P}\{\nu = k\} = p q^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha(\tilde{T}_k + \varrho + \xi^{(1)})} \mathbf{P}\{\nu = k\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0} \left(\mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \right)^{k+1} \left(\mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \right)^k \mathbf{E} e^{\alpha \varrho} q^k = \\ &= \frac{\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0} \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu) \lambda}{(\lambda - \alpha) \left(1 - \frac{q \lambda \mu}{(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)} \right)}; \end{aligned}$$

интегрируя это выражение по стационарной мере $\mathscr{P}$, получаем равномерную оценку:

$$\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} \leq \frac{\lambda \mu \mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu) \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu)}{(\lambda - \alpha) \left(\mu - \alpha - \frac{q \lambda \mu}{(\lambda - \alpha)} \right)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{K}(\alpha),$$

и для всех α , удовлетворяющих неравенству

$$(11) \quad (\lambda - \alpha)(\mu - \alpha) > q \lambda \mu$$

верна оценка: $|k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t}$.

9. Пусть $\lambda = 1$, $\mu = 5$. Тогда $\mathcal{W}(\alpha, 1, 5) = \frac{25(12 - \alpha)}{6(10 - \alpha)(5 - \alpha)}$

$q = \frac{5}{12}$ $p = \frac{7}{12}$; условие (11) выполнено при $\alpha < 0,370044$.

При $\alpha = 0,3$: $\mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu) \approx 1,7408979$; $\mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu) \approx 1,06931345$; $\mathfrak{K}(0,3) \approx 10,3882007$, т.е. при любых начальных условиях $|k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < 10,3882007 e^{-0,3t}$, что хуже (2), но даёт вполне приемлемую оценку скорости сходимости, существенно лучшую, чем в Примерах 1 и 2. •

4.4. ВЫВОДЫ

Несмотря на то, что оценка (9), как будет видно из доказательства Теоремы 1, строится довольно грубо, полученные формулы позволяют давать оценки скорости сходимости

коэффициента готовности для достаточно широкого класса распределений. Однако диапазон изменения α , при котором возможно применение оценки (9), как правило, довольно мал.

Численные эксперименты показали, что чем выше скорость сходимости $k_T(t)$ к предельному значению, тем хуже полученные по формуле (9) оценки.

Однако, как видно из Примера 3, знание некоторой дополнительной информации о функциях распределения $F_1(s)$ и $F_2(s)$ позволяет улучшить оценку скорости сходимости, избежав излишних огрублений неравенств в оценках доказательства Теоремы 1.

При этом из Таблиц 2 и 4 видно, что при наблюдении работы реального восстанавливаемого элемента для получения приемлемой оценки k_T достаточно наблюдать около 100 периодов регенерации.

Таблицы 2–4 показывают, что, как правило, вычисленная по формуле (9) оценка для $K(\alpha)$ отличается от эмпирического значения в 10^2 – 10^3 раз.

Ниже приводится доказательство Основной Теоремы 1.

5. Предварительные соображения и вспомогательные факты.

5.1. О ПРОЦЕССЕ X_T

X_t – регенерирующий процесс, и точки $(t_1, t_2, \dots)$ (или $(t'_1, t'_2, \dots)$) являются моментами его регенерации, а длина периода регенерации $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ имеет математическое ожидание, равное $\mathbf{E} \xi^{(1)} + \mathbf{E} \xi^{(2)} = T_1 + T_2$.

В дальнейшем в качестве периодов регенерации мы будем рассматривать интервалы вида (t_k, t_{k+1}) – интервалы между последовательными попаданиями процесса X_t в состояние $(1, 0)$.

Мы будем использовать также сл.в.

$$(12) \quad \zeta_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{T > t : X_t = (1, 0)\} - t),$$

ζ_t^* – время до начала следующего периода регенерации (“вре-
мя перескока” периода регенерации) процесса X_t .

Известно, что процесс X_t является строго Марковским
(см., например, [6]).

5.2. Полезные следствия из Ключевой Теоремы Восстановления (Теоремы Смита)

Следствием из Ключевой Теоремы Восстановления ([5,
С.23]) являются следующие факты:

Предложение 1. В условиях Теоремы 1 распределение
процесса X_t при любых начальных условиях слабо сходится к
распределению $\mathcal{P}$, которое задаётся следующим образом (см.
[4, § 2.6], [9], и формулу (7)):

$$\mathcal{P}(\{n = 1, x \leq s\}) = k_\Gamma \int_0^s \tilde{f}^{(1)}(u) du;$$

$$\mathcal{P}(\{n = 2, x \leq s\}) = (1 - k_\Gamma) \int_0^s \tilde{f}^{(2)}(u) du, \text{ где } k_\Gamma = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

▷

Предложение 2. Для процесса восстановления $t_0 = 0$, t_1 ,
 $t_2, \dots$, $t_k \dots$, $t_{k+1} - t_k = \xi$ – н.о.р. сл.в. с нерешётчатой ф.р.
 $F(x)$, имеющие конечный второй момент, верно следующее
неравенство:

$$\mathbf{E} x_t^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} x_t^* = \frac{\mathbf{E} \xi^2}{2\mathbf{E} \xi},$$

где $x_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\min\{t_k : t_k > t\} - t)$ – время перескока ([2], [3])
процесса восстановления (или прямое время восстановления
– [5]) в момент t (см., например, [9]).

▷

Следствие 2. В условиях Теоремы 1

$$\mathbf{E}(\zeta_t^* | t > t_1) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \zeta_t^* = \Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}(\xi)^2}{2\mathbf{E} \xi} = \frac{\mathbf{E}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})^2}{2(T_1 + T_2)}.$$

▷

Следствие 3. В условиях Теоремы 1

$$(13) \quad \mathbf{E}(\varsigma_t^* | t > t_1 \& X_t \in \mathcal{S}_2) \leq \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}(\xi^{(2)})^2}{2T_2},$$

где $\varsigma_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{s > t : Z_s'' = (1, 0)\} - t$ – время от момента t до попадания процесса X_t в множество $\mathcal{S}_1$. $\triangleright$

5.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

5.3.1. $\mathcal{L}$ – мера Лебега.

5.3.2. $\mathcal{U}_\Omega$ – равномерно распределённая случайная величина, заданная на Ω .

$$5.3.3. \quad \varphi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(f_x^{(1)}(s), f_y^{(1)}(s)\right); \quad \varkappa_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \varphi_{x,y}(s) \, ds.$$

Замечание 3. В условиях Теоремы 1 $\varphi_{x,y}(s) \geq ce^{-Cs}$ и $\varkappa_{x,y} \geq \frac{c}{C}$. $\triangleright$

5.3.4. Для монотонно неубывающей функции $\Psi(s)$ обозначим $\Psi^{-1}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{v : \Psi(v) \leq u\}$.

Замечание 4. Если $\Psi(s)$ – функция распределения сл.в., то $\Psi^{-1}(\mathcal{U}_\Omega)$ – сл.в. на Ω с ф.р. $\Psi(s)$. $\triangleright$

$$5.3.5. \quad \Phi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^s \varphi_{x,y}(u) \, du, \quad \widehat{\Phi}_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} F_x^{(1)}(s) - \Phi_{x,y}(s).$$

Замечание 5. $\Phi_{x,y}(s)$ и $\widehat{\Phi}_{x,y}(s)$ – неотрицательные неубывающие непрерывные функции и

$$\Phi_{x,y}(+\infty) = \varkappa_{x,y}, \quad \widehat{\Phi}_{x,y}(+\infty) = 1 - \varkappa_{x,y}, \quad \Phi_{x,y}(0+) = \widehat{\Phi}_{x,y}(0+) = 0. \quad \triangleright$$

$$5.3.6. \Xi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Phi_{x,y}^{-1}(s) & \text{при } s \in [0; \varkappa_{x,y}); \\ \widehat{\Phi}_{x,y}^{-1}(s - \varkappa_{x,y}) & \text{при } s \in [\varkappa_{x,y}; 1]. \end{cases}$$

Замечание 6. $\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega)$ – сл.в. на Ω с ф.р. $F_x^{(1)}(s)$. При этом $\mathbf{P}\{\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) = \Xi_{y,x}(\mathcal{U}_\Omega)\} = \varkappa_{x,y}$ – подробнее об этом см. [8], [11], [12]. $\triangleright$

Кроме того, в условиях Теоремы 1 плотность $\tilde{p}_{x,y}(s)$ распределения сл.в. $(\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) | \Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) = \Xi_{y,x}(\mathcal{U}_\Omega))$ удовлетворяет неравенству $\tilde{p}_{x,y}(s) \leq C e^{-cs}$ (см. условие (8)).

6. Доказательство Теоремы 1

6.1. КОНСТРУКЦИЯ ПРОЦЕССА X_T

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$. Возьмём прямое произведение счётного множества экземпляров пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, предварительно их пронумеровав:

$$(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}^X) = (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0) \times (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2) \times \cdots \\ \cdots \times (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbf{P}_k) \times (\Omega_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}) \times \cdots$$

и будем строить на нём процесс X_t , выходящий из состояния $X_0 = (i, a)$, который мы обозначим $X_t^{(i,a)}$, следующим образом.

Используя распределения (4) и (5), положим:

$\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $i_0 \stackrel{\text{def}}{=} i$; $\theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{(i_0)}(a) + \theta_0$, где $\xi^{(i_0)}(a)$ – случайная величина с функцией распределения $F_a^{(i)}(s)$ на пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0)$;

$i_1 \stackrel{\text{def}}{=} i_0 - (-1)^{i_0}$, $\theta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1^{(i_1)} + \theta_1$, где $\xi_1^{(i_1)}$ – случайная величина с функцией распределения $F^{(i_1)}(s)$ на пространстве $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)$;

$i_2 \stackrel{\text{def}}{=} i_1 - (-1)^{i_1}$; $\theta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_2^{(i_2)} + \theta_1$, где $\xi_2^{(i_2)}$ – случайная величина с функцией распределения $F^{(i_2)}(s)$ на пространстве $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$;

· · · и т.д.; · · ·

$i_k \stackrel{\text{def}}{=} i_{k-1} - (-1)^{i_{k-1}}; \theta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_k^{(i_k)} + \theta_1$, где $\xi_k^{(i_k)}$ – случайная величина с функцией распределения $F^{(i_k)}(s)$ на пространстве $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbf{P}_k)$;

. . . и т.д. . . .

Обозначим $r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k : \theta_k < t\}$ и $U_t \stackrel{\text{def}}{=} (i_{r(t)}, t - \theta_{r(t)})$.

Построенный процесс U_t начинается из состояния (i, a) , первое изменение компоненты n_t этого процесса происходит в момент, когда заканчивается остаточное время пребывания элемента в состоянии i при условии, что к начальному моменту времени элемент находился в этом состоянии a единиц времени; в дальнейшем элемент поочерёдно находится в состояниях $j = i - (-1)^i$ и i в течение случайного времени с функциями распределения $F^{(j)}(s)$ и $F^{(i)}(s)$ соответственно; θ_k – моменты скачков (изменений) первой компоненты процесса U_t .

Т.е. $(U_t, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_t^{(i,a)}, t \geq 0)$, где $X_t^{(i,a)}$ – процесс X_t с начальным состоянием (i, a) .

6.2. КОНСТРУКЦИЯ СКЛЕЙКИ (Z'_T, Z''_T)

Для конструирования одного процесса X_t на пространстве $(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}^X)$ строились случайные моменты $\theta_0, \theta_1, \dots$, в которые происходит изменение состояния (исправное или неисправное) восстанавливаемого элемента. Для конструирования пары процессов нам нужны две последовательности таких случайных моментов. В предложенной ниже конструкции будут строиться случайные моменты $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots$, в которые происходит изменение состояния хотя бы одного из пары процессов (при этом конструкция будет такова, что в некоторые моменты может произойти изменение состояния обоих процессов).

Пару процессов $(Z'_t, Z''_t) = ((m'_t, z'_t), (m''_t, z''_t))$ будем стро-

ить на вероятностном пространстве

$$\begin{aligned}
 (\Omega^{Z', Z''}, \mathcal{F}^{Z', Z''}, \mathbf{P}^{Z', Z''}) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=0}^{\infty} ((\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k) \times (\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k)) = \\
 &= \prod_{k=0}^{\infty} (\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k) \times \prod_{k=0}^{\infty} (\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k) = \\
 &= (\Omega^{Z'}, \mathcal{F}^{Z'}, \mathbf{P}^{Z'}) \times (\Omega^{Z''}, \mathcal{F}^{Z''}, \mathbf{P}^{Z''}),
 \end{aligned}$$

здесь $(\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k)$ и $(\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k)$ – экземпляры пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Пусть

$$\begin{aligned}
 Z'_0 = (m'_0, z'_0) = (n'_0, x'_0) = X'_0, \text{ и} \\
 Z''_0 = (m''_0, z''_0) = (n''_0, x''_0) = X''_0.
 \end{aligned}$$

Положим $\vartheta_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Конструирование моментов ϑ_k строится последовательно, в некотором смысле “по индукции”.

Пусть момент ϑ_k уже определён с помощью сл.в., заданных на пространстве $\prod_{\ell=0}^{k-1} (\Omega'_\ell, \mathcal{F}'_\ell, \mathbf{P}'_\ell) \times \prod_{\ell=0}^{k-1} (\Omega''_\ell, \mathcal{F}''_\ell, \mathbf{P}''_\ell)$, и в этот момент $Z'_{\vartheta_k} = (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k})$ и $Z''_{\vartheta_k} = (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k})$.

6.2.1. Если $Z'_{\vartheta_k} = Z''_{\vartheta_k}$, то полагаем $Z''_t = Z'_t$ при $t \geq \vartheta_k$ и строим процесс Z'_t для $t > \vartheta_k$ на пространствах $(\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k)$, $(\Omega'_{k+1}, \mathcal{F}'_{k+1}, \mathbf{P}'_{k+1}), \dots$ по схеме, описанной в разделе 6.1.

6.2.2. Если $Z'_{\vartheta_k} \neq Z''_{\vartheta_k}$ и $m'_{\vartheta_k} + m''_{\vartheta_k} > 2$, т.е. не выполнено $\left\{ Z'_{\vartheta_k} \in \mathcal{S}_1 \& Z''_{\vartheta_k} \in \mathcal{S}_1 \right\}$, полагаем $\vartheta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_k + \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1})$, где

$$\vartheta'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(F_{z'_{\vartheta_k}}^{(m'_{\vartheta_k})} \right)^{-1} \left(\mathcal{U}_{\Omega'_k} \right), \quad \vartheta''_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(F_{z''_{\vartheta_k}}^{(m''_{\vartheta_k})} \right)^{-1} \left(\mathcal{U}_{\Omega''_k} \right).$$

Для $t \in [\vartheta_k; \vartheta_{k+1})$

(14)

$$Z'_t \stackrel{\text{def}}{=} (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_k)), \quad Z''_t \stackrel{\text{def}}{=} (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_k));$$

$$Z'_{\vartheta_{k+1}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_{k+1})) & \text{при } \vartheta'_{k+1} \neq \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \\ (m'_{\vartheta_k} - (-1)^{m'_{\vartheta_k}}, 0) & \text{при } \vartheta'_{k+1} = \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \end{cases}$$

$$Z''_{\vartheta_{k+1}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_{k+1})) & \text{при } \vartheta''_{k+1} \neq \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \\ (m''_{\vartheta_k} - (-1)^{m''_{\vartheta_k}}, 0) & \text{при } \vartheta''_{k+1} = \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}). \end{cases}$$

Здесь ϑ'_{k+1} и ϑ''_{k+1} – остаточные времена пребывания процессов Z'_t и Z''_t в состояниях m'_{ϑ_k} и m''_{ϑ_k} в момент времени ϑ_k соответственно; в момент ϑ_{k+1} один из них изменяет это состояние; может случиться так, что состояние в момент ϑ_{k+1} изменят оба процесса.

6.2.3. Если $m'_{\vartheta_k} = m''_{\vartheta_k} = 1$ и $Z'_{\vartheta_k} \neq Z''_{\vartheta_k}$, полагаем: $\vartheta'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}}(\mathcal{U}_{\Omega'_k})$, $\vartheta''_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}}(\mathcal{U}_{\Omega'_k})$, $\vartheta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_k + \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1})$. Здесь опять ϑ'_{k+1} и ϑ''_{k+1} – остаточные времена пребывания процессов Z'_t и Z''_t в состояниях m'_{ϑ_k} и m''_{ϑ_k} соответственно; в момент ϑ_{k+1} один из них изменяет состояние. При этом $\mathbf{P}\{\vartheta'_{k+1} = \vartheta''_{k+1}\} = \kappa_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}} \geq \frac{c}{C}$.

Т.е. с вероятностью $\kappa_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}} \geq \frac{c}{C}$ процессы Z'_t и Z''_t одновременно перейдут в множество $\mathcal{S}_2$ (в соответствии с Замечанием 6), тогда $Z'_{\vartheta_{k+1}} = Z''_{\vartheta_{k+1}} = (2, 0)$ и, в соответствии с п.1 этой конструкции, при $t > \vartheta_{k+1}$ $Z'_t = Z''_t$. Поведение про-

цессов Z'_t и Z''_t на промежутке $[\vartheta_k, \vartheta_{k+1}]$ задаётся с помощью формул (14).

Замечание 7. Обозначим $\hat{\xi}_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \vartheta'_{k+1} \Big|_{\vartheta'_{k+1} = \vartheta''_{k+1}} \right\}$; сл.в.

имеет плотность $\varphi_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}}(s) \in [ce^{-Cs}; Ce^{-Cs}]$, т.е. $\mathbf{E} e^{\alpha \hat{\xi}_{k+1}} \leq \frac{C}{c - \alpha}$ при $\alpha < c$. $\triangleright$

Замечание 8. Можно показать, что построенная таким образом пара процессов (Z'_t, Z''_t) является Марковским процессом, и распределение компонент этого процесса совпадает с распределением процессов $X'_t = X_t^{X'_0}$ и $X''_t = X_t^{X''_0}$: $(X_t^{X'_0}, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Z'_t, t \geq 0)$ и $(X_t^{X''_0}, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Z''_t, t \geq 0)$. В настоящей статье в связи с громоздкостью доказательства этого факта мы его не приводим. $\triangleright$

Теперь наша задача – оценить распределение (и экспоненциальные моменты) сл.в. $T_{Z'_0, Z''_0}$, т.е. убедиться в успешности склейки (Z'_t, Z''_t) .

6.3. ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $T_{Z'_0, Z''_0}$

6.3.1. Пусть

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}'_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z'_t = (1, 0)\}, \\ \mathcal{T}''_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z''_t = (1, 0)\}; \end{aligned}$$

положим $\mathcal{T}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mathcal{T}'_0, \mathcal{T}''_0) \leq (\mathcal{T}'_0 + \mathcal{T}''_0) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T}_0$; $M \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \hat{T}_0$.

Здесь $\mathcal{T}'_0$ и $\mathcal{T}''_0$ – моменты начала полных периодов регенерации процессов Z'_t и Z''_t , поэтому после момента $\mathcal{T}_0$ поведение обоих процессов не зависит от начального состояния. До момента $\mathcal{T}_0$ процессы могли склеиться (например, в случае, если $X'_0, X''_0 \in \mathcal{S}_1$), но мы отбросим эту возможность, что сделает нашу оценку распределения $T_{Z'_0, Z''_0}$ более грубой.

Не ограничивая общности, будем считать, что $Z'_{\mathcal{T}_0} = (1, 0)$ (случай $Z''_{\mathcal{T}_0} = (1, 0)$ рассматривается аналогично).

Обозначим $\mathcal{T}_k \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \mathcal{T}_{k-1} : Z'_t = (1, 0)\}$ – моменты начала периодов регенерации процесса Z'_t начиная с момента $\mathcal{T}_0$ ($k \in \mathbb{N}$); $\mathcal{T}_{k+1} - \mathcal{T}_k = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

6.3.2. В момент времени $\mathcal{T}_k$ начинается период работы элемента длиной $\xi_k^{(1)}$. В этот момент (если ранее не произошло совпадения (склейки) процессов Z'_t и Z''_t) процесс Z''_t находится на некотором периоде регенерации, и он находится в исправном состоянии ($Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_1$) с вероятностью $k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k)$, или в неисправном ($Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$) состоянии с вероятностью $\left(1 - k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k)\right)$. Рассмотрим оба случая.

6.3.3. $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_1$. При $n(Z''_{\mathcal{T}_k}) = 1$, в соответствии с конструкцией раздела 6.2, совместное пребывание в множестве $\mathcal{S}_1$ с вероятностью $\kappa_{0, z''_{\mathcal{T}_k}} \geq \frac{c}{C}$ может завершиться склейкой процессов Z'_t и Z''_t через время $\hat{\xi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Xi_{0, z''_{\mathcal{T}_k}}(\mathcal{U}_{\Omega}) | \Xi_{0, Z''_{\mathcal{T}_k}}(\mathcal{U}_{\Omega}) = \Xi_{Z''_{\mathcal{T}_k}, 0}(\mathcal{U}_{\Omega})\right)$.

6.3.4. $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$. Если $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$, рассмотрим сл.в. $\varsigma_{\mathcal{T}_k}^*$ – остаточное время пребывания Z''_t в множестве $\mathcal{S}_2$; $\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{t > \mathcal{T}_k : Z''_t = (1, 0)\} - \mathcal{T}_k)$ и оценим $\mathbf{P}\left\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < \xi^{(1)}\right\}$; событие $\mathcal{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < \xi^{(1)}\right\}$ означает, что на интервале $(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k + \xi_k^{(1)})$ процессы Z'_t и Z''_t одновременно окажутся в множестве $\mathcal{S}_1$ (после чего они могут склеиться с ненулевой вероятностью).

Поскольку $\mathbf{E}\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \leq \Theta$ (13), оценим вероятность события $\mathcal{E}_k^R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < R < \xi^{(1)}\right\}$, где R – некоторое число. Очевидно, $\mathcal{E}_k^R \subset \mathcal{E}_k$.

Пусть $R > \Theta$; $\mathbf{P}\left\{\xi_k^{(1)} > R\right\} = 1 - F^{(1)}(R) \geq e^{-CR}$, а по неравенству Маркова $\mathbf{P}\left\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < R\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \geq R\right\} \leq 1 - \frac{\Theta}{R}$.

Поэтому $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) \geq \mathbf{P}(\mathcal{E}_k^R) \geq \rho = \rho(C, R, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-CR} \left(1 - \frac{\Theta}{R}\right)$. Вероятность ρ достигает максимума при $R = R^*(C, \Theta)$, т.е. $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) \geq \rho$.

Итак, на интервале $(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k + R^*)$ оба процесса окажутся в множестве $\mathcal{S}_1$ с вероятностью большей, чем ρ .

6.3.5. $\{Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2\} \& \mathcal{E}_k$. Если произошло событие $\mathcal{E}_k$, и в момент $\widehat{\mathcal{T}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_k + \varsigma_{\mathcal{T}_k}^*$ выполнено $Z'_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \in \mathcal{S}_1$, $Z''_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \in \mathcal{S}_1$, то, в соответствии с конструкцией раздела 6.2 с вероятностью $\kappa_{0, \varsigma_{\mathcal{T}_k}^*} \geq \frac{c}{C}$ в момент $\widehat{\mathcal{T}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_k + \xi_k^{(1)}$ процессы Z'_t и Z''_t совпадают, при этом (см. Замечание 7)

$$\xi_k^{(1)} \Big| \left\{ \mathcal{E}_k \& \left\{ Z'_{\widehat{\mathcal{T}}_k} = Z''_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \right\} \right\} = \varsigma_{\mathcal{T}_k}^* + \widehat{\xi}_k \leq R^* + \widehat{\xi}_k.$$

6.3.6. Итак, с вероятностью большей, чем

$$(16) \quad \frac{c}{C} \left(k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k) + \left(1 - k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k) \right) e^{-CR} \left(1 - \frac{\Theta}{R} \right) \right) > \\ > \frac{c e^{-CR^*(C, \Theta)}}{C} \left(1 - \frac{\Theta}{R^*} \right) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - q$$

процессы Z'_t и Z''_t совпадут в момент времени

$$(17) \quad T_{Z'_0, Z''_0} \leq \mathcal{T}_k + R^* + \widehat{\xi}_k.$$

6.3.7. Теперь можно оценить $\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}}$ при α , удовлетворяющих (8).

Обозначим ν – номер периода регенерации $(\mathcal{T}_k; \mathcal{T}_{k+1}]$, на котором произошло совпадение процессов Z'_t и Z''_t – заметим, что при конструировании склейки (Z'_t, Z''_t) были схеме учтены не все возможные ситуации склеивания процессов. Учитывая (16) и (17),

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{\overline{\mathcal{E}}_0 \cap \overline{\mathcal{E}}_1 \cap \overline{\mathcal{E}}_2 \cap \dots \cap \overline{\mathcal{E}}_{k-1} \cap \mathcal{E}_k\} \leq q^k;$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha(\mathcal{T}_k + R^* + \widehat{\xi}_k^{(1)})} \mathbf{P}\{\nu = k\} \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha\left(\mathcal{T}_0 + \sum_{r=1}^k (\xi_r^{(1)} + \xi_r^{(2)}) + R^* + \widehat{\xi}_k^{(1)}\right)} q^k = \\
 &= e^{\alpha R^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0} \mathbf{E} e^{\alpha \widehat{\xi}_k^{(1)}} \left(\mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}}\right)^k \left(\mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}\right)^k q^k \leq \\
 &\leq e^{\alpha R^*} e^{\alpha \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0}} \frac{C}{c - \alpha} \left(1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q\right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0} &= \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0(Z'_0, Z''_0)} \leq \mathbf{E} e^{\alpha(\mathcal{T}'_0(Z'_0) + \mathcal{T}''_0(Z''_0))} = \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}'_0(Z'_0)} \times \\
 &\mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}''_0(Z''_0)}; \text{ и } \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}'_0(Z'_0)} = M_\alpha(m'_0, z'_0); \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}''_0(Z''_0)} = \\
 &M_\alpha(m''_0, z''_0) - \text{см. 2.1.7.}
 \end{aligned}$$

Поэтому (учитывая (6))

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} &\leq \frac{C e^{\alpha R^*} M_\alpha(Z'_0) M_\alpha(Z''_0)}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q)} \stackrel{\text{def}}{=} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{K}(\alpha, c, C, Z'_0, Z''_0) = \mathfrak{K}(\alpha, Z'_0, Z''_0);
 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{X}} M_\alpha(Z''_0) \mathcal{P}(\mathrm{d}Z''_0) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \int_{\mathcal{S}_1} \left(\int_0^\infty e^{\alpha s} f_z^{(1)}(s) \mathrm{d}s \right) \mathcal{P}(\mathrm{d}(1, z)) + \\
 &\quad + \int_{\mathcal{S}_2} \left(\int_0^\infty e^{\alpha s} F_z^{(2)}(\mathrm{d}s) \right) \mathcal{P}(\mathrm{d}(2, z)) \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq k_{\Gamma} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \int_0^{\infty} \left(\alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha s} \frac{1 - F^{(1)}(s+z)}{1 - F^{(1)}(z)} ds + 1 \right) \times \\
 &\quad \times \frac{1 - F^{(1)}(z)}{T_1} dz + \\
 &+ (1 - k_{\Gamma}) \int_0^{\infty} \left(\alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha s} \frac{1 - F^{(2)}(s+z)}{1 - F^{(2)}(z)} ds + 1 \right) \frac{1 - F^{(2)}(z)}{T_2} dz \leq \\
 &\leq \frac{\alpha \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}}{T_1 + T_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\alpha s} C e^{-c(s+z)} ds dz + \\
 &+ \frac{\alpha}{T_1 + T_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\alpha s} (1 - F^{(2)}(s+z)) ds dz + \\
 &\quad + k_{\Gamma} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} + (1 - k_{\Gamma}) \leq \\
 &\leq \frac{1}{T_1 + T_2} \left(\frac{\alpha C \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}}{(c - \alpha)c} + \alpha \widehat{M}_{\alpha}^{(2)} + T_1 \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} + T_2 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{X}} K(\alpha, Z'_0, Z''_0) \mathcal{P}(dZ''_0) &= \\
 &= \mathfrak{K}(\alpha, Z'_0) \leq \frac{C e^{\alpha R^*} M_{\alpha}(Z'_0) \overline{M}_{\alpha}}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q)},
 \end{aligned}$$

что и завершает доказательство Теоремы 1. ■

Замечание 9. Вообще говоря, условия Теоремы 1 не позволяют оценить сверху величину Θ . Если при исследовании

конкретной технической системы такой оценки нет, то величину Θ можно заменить величиной $\Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E} (\xi^{(1)} + \xi^{(2)})^2}{2(T_1 + T_2)}$. Доказательство Теоремы в этом случае меняется в части разделов 6.3.3–6.3.5: случай 6.3.3 вообще не учитывается, а вместо сл.в. $\varsigma_{\mathcal{J}_k}^*$ – остаточного времени пребывания процесса Z_t'' в множестве $\mathcal{S}_2$ – рассматривается сл.в. $\zeta_{\mathcal{J}_k}^*$ – остаточное время периода регенерации процесса Z_t'' (12). В остальном доказательство не меняется. $\triangleright$

Литература

1. БОРОВКОВ А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. –М.: Наука. Главное издательство Физико-математической литературы, 1972. – 368 с.
2. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЕВ А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965; также изд. 2, испр. и доп., М.: URSS, 2013.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. Введение в теорию массового обслуживания . – М.: Наука, 1966.
4. КЛИМОВ Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Изд-во МГУ, 1983.
5. КОКС Д.Р., СМИТ В.Л. Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967.
6. DAVIS M.H.A. Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 46 (1984), no. 3, 353–388, With discussion. MR MR790622 (87g:60062)
7. GRIFFEATH D. A maximal coupling for Markov chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, – 1975, – Volume 31, – Issue 2, – P. 95-106.
8. LINDVALL T. Lectures on the Coupling Method. – Wiley, New York, 1992.
9. LORDEN G. On Excess over the Boundary. // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Volume 41, Number 2 1970, P.520–527. doi:10.1214/aoms/1177697092
10. THORISSON H. Coupling, Stationarity, and Regeneration. – Springer, 2000.
11. VERETENNIKOV A.YU., BUTKOVSKY, O.A. On asymptotics for Vaserstein coupling of Markov chains // Stochastic Processes and their Applications, 123(9), 2013, 3518–3541.
12. VERETENNIKOV A. Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition. // Theory Stoch.

ON EXPONENTIAL CONVERGENCE OF AVAILABILITY FACTOR

Galina Zverkina, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher; Russian University of transport (MIIT), associate professor (zverkina@gmail.com).

Abstract: In the reliability theory, an important role is played by the knowledge of the value (or value estimates) of the availability factor, i.e. the probability that at a given moment of time the device is working properly. In most cases, the calculating of the stationary value of the availability factor is not difficult. However, in real applications it is necessary to know how soon the value of the availability factor becomes sufficiently close to its limiting value, i.e. it is important to know the rate of convergence of the availability factor to its stationary value. In cases where the distributions function of the operating and recovery times are exponential, the question of the rate of convergence of the availability factor is the question of the rate of convergence of the solution of the Kolmogorov-Chapman equations with constant coefficients. This problem is solvable by means of Laplace transform. We also note that most of the processes describing the behavior of reliability systems are regenerative, and for them the type of rate of convergence of the distribution to a stationary one is known - exponential or polynomial. The strong upper bounds of the rate of the convergence for regenerative processes can be obtained using the Lorden's inequality, when the distribution of the length of a regeneration period is known. But for reliability systems, it is possible to take into account the specific features of the investigated regeneration period. This article shows a method for constructing a strong exponential bounds for convergence rate of the availability factor for one restorable element.

Keywords: availability factor, restorable element, bounds for convergence rate, exponential convergence.

УДК 519.2

ББК 22.171

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...

Дата опубликования ...

t	$\Delta(t)$	t	$\Delta(t)$
0	-0,5	16	0,0000432
1	0	17	0,0002705
2	-0,1322323	18	0,0001697
3	0,0032313	19	-0,0000246
4	0,0045013	20	0,0000847
5	-0,0005616	21	-0,0000148
6	-0,0003203	22	-0,0002263
7	0,0002989	23	-0,0000415
8	-0,0000282	24	-0,0000685
9	0,0002417	25	0,0004427
10	-0,0001726	26	-0,0003706
11	-0,0000200	27	-0,0003147
12	0,0001399	28	-0,0000076
13	-0,0001912	29	-0,0001412
14	0,0002538	30	-0,0000692
15	-0,0000148	31	-0,0001873

Таблица 1. $\Delta(t)$ для Примера 1 (начальное условие $X_0 = (2, 0)$).

	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{МП}}(2, 0)$	(2;3)	(2;3)	(5;6)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(2, 0)$	90,213	118,993	147,025
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{МП}}(2, \frac{1}{2})$	(2;3)	(2;3)	(4;5)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(2, \frac{1}{2})$	89,996	118,776	146,808
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{МП}}(1, \cdot)$	(0;1)	(0;1)	(4;5)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(1, \cdot)$	90,66	119,435	147,468

Таблица 2. Пример 1. $\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{МП}}$, $\mathfrak{T}_\varepsilon$; минимальные значения $\mathfrak{T}_\varepsilon$ достигаются при $\alpha \approx 0,0341$, $\alpha \approx 0,0353$ и $\alpha \approx 0,0360$ соответственно.

X_0	α	0	0,01	0,02	0,03	0,03899
(2,0)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}$	0,132	0,135	0,138	0,14	0,143
	$\mathfrak{K}$	13,203	18,414	29,154	63,873	$1,787 \cdot 10^6$
$(2, \frac{1}{2})$	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}$	0,132	0,135	0,138	0,14	0,143
	$\mathfrak{K}$	13,203	18,322	28,864	62,922	$1,752 \cdot 10^6$
(1, ·)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}$	13,203	18,678	29,735	63,135	$2,532 \cdot 10^5$

Таблица 3. Значения $\mathfrak{K}(\alpha)$, Пример 1.

	X_0	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
$\mathfrak{T}_\varepsilon$	(2,0)	86,008	113,263	139,809
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{ЭМП}}$	(2,0)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
α	(2,0)	0,036	0,0373	0,038
$\mathfrak{T}_\varepsilon$	(2,10)	47,627	77,154	104,729
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{ЭМП}}$	(2,10)	(0;1)	(1;2)	(2;3)
α	(2,10)	0,0317	0,0354	0,037
$\mathfrak{T}_\varepsilon$	(2,25)	34,409	67,269	93,919
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{ЭМП}}$	(2,25)	(0;1)	(0;1)	(2;3)
α	(2,25)	0,0279	0,0373	0,0373
$\mathfrak{T}_\varepsilon$	(1, ·)	86,45	113,705	140,252
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{ЭМП}}$	(1, ·)	(0;1)	(0;1)	(2;3)
α	(1, ·)	0,036	0,0373	0,038

Таблица 4. Пример 2. $\mathfrak{T}_\varepsilon^{\text{ЭМП}}$, $\mathfrak{T}_\varepsilon$; указаны значения α , соответствующие указанным значениям $\mathfrak{T}_\varepsilon$.

X_0	α	0	0,01	0,02	0,03	0,04117
(2,0)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,119	0,12	0,121	0,122	0,124
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	13,203	18,287	28,239	56,143	$2,428 \cdot 10^5$
(2,10)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,008	$8,414 \cdot 10^{-3}$	$8,498 \cdot 10^{-3}$	$8,584 \cdot 10^{-3}$	$8,68 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	0,657	0,902	1,382	2,724	$1,167 \cdot 10^4$
(2,25)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,005	$5,189 \cdot 10^{-3}$	$5,241 \cdot 10^{-3}$	$5,294 \cdot 10^{-3}$	$5,354 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	0,264	0,362	0,554	1,092	$4,677 \cdot 10^4$
(1, ·)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,3829	0,3829	0,3829	0,3829	0,3829
	$\widetilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМП}}(\alpha)$	0,003	$3,397 \cdot 10^{-3}$	$3,431 \cdot 10^{-3}$	$3,465 \cdot 10^{-3}$	$3,504 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	13,203	18,471	28,815	57,879	$2,532 \cdot 10^5$

Таблица 5. Значения $\mathfrak{K}(\alpha)$, Пример 2.