

# АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ<sup>1</sup>

Белов И.Р.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В 90-е годы прошлого века была введена анизотропная теория управления, методы которой используются при решении задач управления и фильтрации для линейных систем с детерминированными матрицами, на вход которых подаются случайные возмущения с неизвестными точно статистическими характеристиками. В данной теории введено понятие анизотропии как меры отклонения распределения случайного вектора от стандартного гауссовского распределения. В данной работе представлены решения задач анизотропного анализа для частного случая линейных дискретных систем со стохастическими матрицами, а именно систем с мультипликативными шумами. Рассмотрены задачи вычисления анизотропной нормы в пространстве состояний и формулировки условий ограниченности анизотропной нормы сверху заданной величиной для таких систем на конечном интервале времени. Условия ограниченности анизотропной нормы представлены в двух вариациях: в терминах разностных уравнений Риккати и в терминах неравенства Риккати. Последний вариант условий ограниченности может быть преобразован в систему линейных матричных неравенств. Полученные результаты анизотропного анализа позволяют решать задачи субоптимального управления и фильтрации для подобных систем. Для демонстрации применения эти результатов в работе приведен численный пример решения задач анизотропного анализа для линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами, описывающей продольное движение самолета в режиме посадки.

Ключевые слова: линейные дискретные нестационарные системы, случайные возмущения, мультипликативные шумы, норма, анизотропия, разностное уравнение Риккати, неравенство Риккати.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-31-90060.

Автор признателен А.Ю. Кустову, А.В. Юрченкову и В.Н. Тимину за ценное обсуждение содержания статьи.

<sup>2</sup> Иван Романович Белов, аспирант (ivanb1993@mail.ru)

## 1. Введение

Большой научный интерес с прошлого века по настоящее время представляют стохастические системы и соответствующие им задачи анализа и синтеза. Это связано с тем, что широкий класс реальных технических объектов с хорошей точностью описывается математическими моделями в виде линейных и нелинейных систем с элементами случайной природы. Решение задач управления и фильтрации для стохастических систем общего вида является крайне трудоемким и универсальных методов решения на данный момент не существует. Чаще всего вводятся определенные допущения о структуре стохастической системы. Одним из известных частных случаев таких допущений являются системы с мультипликативными шумами [18,33,34]. Подобные системы достаточно эффективно описывают динамику различных процессов в физике, биологии, экономике и многих других сферах. Уже выпущено множество статей на темы задач робастного управления [17], оценивания состояния системы [27], линейного квадратичного управления [14] и многие других для систем с мультипликативными шумами.

Чаще всего предполагается, что мультипликативные шумы внутри системы обладают известными статистическими моментами, т.е. являются статистически определенными. Но сказать то же самое о свойствах внешних возмущений чаще всего не представляется возможным. Если внешние возмущения являются случайными и их статистические моменты неизвестны, то они могут оказать большое влияние на качество работы рассматриваемой системы. Для описания качества работы системы используются определенные функционалы, которые называют критериями качества. Одним из наиболее известных критериев является среднеквадратичный коэффициент усиления. Он описывает в терминах норм входа и выхода системы ее реакцию на входное возмущение. Если входное возмущение является случайным, то нормы входа и выхода

системы определяются их первыми и вторыми статистическими моментами. Значение ВКУ варьируется в зависимости от свойств входного возмущения и соответственно разделяются типы задач анализа и методы их решения. К примеру, в задачах  $\mathcal{H}_2$ -теории [7, 8, 12, 29] вводится предположение, что входное возмущение рассматриваемой системы является гауссовским белым шумом. Также предполагается, что точно известны параметры модели исследуемого объекта, т.е. матрицы линейной системы объекта являются детерминированными. Подобные предположения о свойствах возмущения являются достаточно строгими и редко оказываются абсолютно верными. Отсюда очевиден основной недостаток  $\mathcal{H}_2$ -теории — отсутствие робастности. Другим известным классом задач анализа являются задачи  $\mathcal{H}_\infty$ -теории [9–11, 19, 23, 41]. При постановке подобных задач действует предположение о наихудшем сценарии входного возмущения, которое обеспечивает максимальное значение СКУ системы. При использовании данного подхода математически конструируется наихудший формирующий фильтр, выходом которого является входное возмущение исходной системы. Используя подход  $\mathcal{H}_\infty$ -теории, можно определить отклик системы на наихудшее из возможных возмущений с ограниченной энергией. Однако подобное предположение также редко оказывается верным и его использование не всегда целесообразно.

У подходов  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий есть свои существенные недостатки. Поэтому существует целый ряд работ, посвященных поиску новых подходов к решению задач анализа и синтеза для систем с неопределенным внешним возмущением. Одним из примеров является цикл работ по анизотропийной теории [2, 3, 13, 31, 37, 38], которая была представлена в 90-е годы прошлого века. Основой данной теории являются введенные понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии последовательности векторов и анизотропийной нормы системы. Анизотропию случайного вектора можно рассматривать как меру отклонения распределения данного векто-

ра от стандартного гауссовского распределения. Это позволяет описывать случайные векторы с неизвестными статистическими характеристиками с помощью одной величины. Методы анизотропийной теории использовались при решении задач управления и фильтрации для линейных систем непрерывного и дискретного времени, с постоянными и переменными матрицами. В [35] приведено решение задачи оптимальной анизотропийной фильтрации в случае линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале времени в терминах разностного уравнения Риккати с дополнительным условием в виде алгебраического уравнения специального вида. В [26] приведена формулировка леммы об ограниченности анизотропийной нормы для линейных нестационарных систем. Задача субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем с неслучайными матрицами была решена в [6]. Полученные результаты анизотропийного анализа и синтеза используются при решении задач управления и фильтрации для других классов линейных систем, ранее не рассмотренных в рамках данной теории.

Также существуют и другие способы описания статистических неопределенностей в самой системе и внешних возмущениях, поступающих на вход системы. К примеру, в [39] неопределенность случайного возмущения характеризуется с помощью условной относительной энтропии, а устойчивость системы к таким возмущениям характеризуется индексом робастности. Помимо анизотропии, неопределенности могут быть описаны с помощью политопов [40], [20]. Также при решении задач анализа и стабилизации систем с неопределенностями используется лемма Питерсона [28], [24], [30].

Поскольку методы анизотропийной теории являются обобщением методов  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий и они менее подвержены недостаткам данных теорий, задачи анизотропийного анализа и синтеза для систем с мультипликативными шумами представляют большой интерес и результаты их решения могут иметь большое теоретическое и практическое значение.

Но прежде чем приступать к задачам синтеза, необходимо определить алгоритм вычисления самой анизотропийной нормы для таких систем в пространстве состояний и условия ее ограниченности в терминах уравнений и неравенств Риккати. Подобные задачи относятся к анизотропийному анализу и именно им посвящена данная работа.

## 2. Предварительные сведения

Перед описанием класса рассматриваемых систем введем необходимые обозначения. Пусть  $\mathbb{R}^n$  — множество  $n$ -мерных векторов с элементами из  $\mathbb{R}$ ;  $\mathbb{R}^{n \times m}$  — множество  $(n \times m)$ -мерных матриц с элементами из  $\mathbb{R}$ ;  $\mathbb{L}_2^n$  — множество  $\mathbb{R}^n$ -значных интегрируемых с квадратом случайных векторов;  $\mathbb{L}_2^{n \times m}$  — множество  $\mathbb{R}^{n \times m}$ -значных интегрируемых с квадратом случайных матриц;  $\mathbf{E}(x)$  — математическое ожидание случайной величины  $x$ . В выкладках статьи будут использоваться следующие матричные и векторные нормы:

- 1)  $\|x\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}(x^\top x)}$  — норма случайного вектора  $x$  из  $\mathbb{L}_2^n$ ;
- 2)  $\|X\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}(X^\top X))}$  — 2-норма случайной матрицы  $X$  из  $\mathbb{L}_2^{n \times m}$ ;
- 3)  $\|X\|_\infty = \sqrt{\max_i \lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X))}$  —  $\infty$ -норма случайной матрицы  $X$  из  $\mathbb{L}_2^{n \times m}$ , где  $\lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X))$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{E}(X^\top X)$ .
- 4)  $\Phi_M(X)$  — блочно-диагональная матрица из  $M$  матриц  $X$ .

Далее приведено описание объекта исследования данной работы и основные понятия анизотропийной теории, используемые в рассматриваемых задачах анизотропийного анализа.

### 2.1. Системы с мультипликативными шумами

В данной работе рассматриваются линейные дискретные нестационарные системы на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  с реализацией в пространстве состояний вида

$$(2.1) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) &= C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases}$$

где  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор состояния системы с начальным условием  $x(0) = 0$ ;  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — вектор входного внешнего возмущения системы;  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  — вектор оцениваемого выхода. Матрицы системы  $A(k), B(k), C(k), D(k)$  являются случайными матрицами специального вида

$$\begin{aligned} A(k) &= A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k) A_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times n_x}, \\ B(k) &= B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k) B_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times m_w}, \\ C(k) &= C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k) C_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times n_x}, \\ D(k) &= D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k) D_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times m_w}, \end{aligned}$$

где  $\xi_{ji}(k)$  при всех  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются независимыми в совокупности по  $i, j, k$  скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Стоит отметить, что  $\xi_{ji}(k)$  также являются независимыми со случайным возмущением  $w(t)$  при любых  $k$  и  $t$ .

Поскольку система (2.1) имеет нулевое начальное состояние и рассматривается на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , ее также можно описать с помощью вход-выходного соотношения вида

$$(2.2) \quad Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N},$$

где  $Z_{0:N} = (z^\top(0), \dots, z^\top(N))^\top \in \mathbb{L}_2^{p_z(N+1)}$  — последовательность выходных сигналов системы,  $W_{0:N} = (w^\top(0), \dots, w^\top(N))^\top \in \mathbb{L}_2^{m_w(N+1)}$  — последовательность входных сигналов системы. Для сокращения записи дальнейших выкладок введем обозначения  $l_z = p_z(N+1)$ ,  $l_w = m_w(N+1)$ .

1). Матрица связи в  $Z_{0:N} = F_{0:N}W_{0:N}$  имеет вид  $F_{0:N} = \text{block}_{0 \leq k, \kappa \leq N}(f(k, \kappa))$ , где

$$(2.3) \quad f(k, \kappa) = \begin{cases} C(k)T(k, \kappa+1)B(\kappa), & \text{если } k > \kappa, \\ D(k), & \text{если } k = \kappa, \\ 0, & \text{если } k < \kappa. \end{cases}$$

Матрица перехода  $T(k, \kappa)$  для  $k > \kappa$  удовлетворяет рекуррентной формуле  $T(k, \kappa) = A(k-1)T(k-1, \kappa) = T(k, \kappa+1)A(\kappa)$  при граничном условии  $T(k, k) = I_{n_x}$ . Стоит отметить, что случайная матрица  $F_{0:N}$  и случайный вектор  $W_{0:N}$  являются независимыми в силу независимости случайных величин  $\xi_{ji}(k)$  и  $w(k)$ . Поскольку рассматриваемая система (2.1) полностью описывается соотношением (2.2) на конечном временном интервале, нормы этой системы эквивалентны соответствующим нормам матрицы  $F_{0:N}$ , т.е. аналогом  $\mathcal{H}_2$ -нормы системы является 2-норма матрицы  $F_{0:N}$ , которая определяется по формуле

$$\|T_{zw}\|_2 = \|F_{0:N}\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Меру отклика системы  $T_{zw}$  на входной вектор  $W_{0:N}$  можно описать с помощью среднеквадратичного коэффициента усиления (СКУ), который определяется по формуле

$$(2.4) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \frac{\|Z_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}.$$

С учетом независимости  $F_{0:N}$  и  $W_{0:N}$  среднеквадратичный коэффициент усиления можно записать следующим образом:

$$(2.5) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где  $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$ ,  $\Sigma = \mathbf{E}[W_{0:N} W_{0:N}^\top] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$ . Аналогом  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы системы  $T_{zw}$  является  $\infty$ -норма матрицы  $F_{0:N}$ , которая равна максимальному сингулярному числу матрицы  $F_{0:N}$  и определяется выражением

$$(2.6) \quad \|T_{zw}\|_\infty = \sigma_{\max}(F_{0:N}) = \max_i \sqrt{\lambda_i(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Стоит отметить, что значение  $\infty$ -нормы матрицы  $F_{0:N}$  системы  $T_{zw}$  равно супремуму СКУ по всем векторам  $W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}$ . Далее кратко изложены теоретические аспекты анизотропийной теории, необходимые для понимания сути рассматриваемых в работе задач анизотропийного анализа.

## 2.2. Анизотропия случайного вектора

При создании анизотропийной теории использовались теоретические понятия из таких областей математики, как теория вероятности и теория информации. К примеру, понятие анизотропии случайного вектора основано на определениях относительной энтропии или расстояния Кульбака-Лейблера и дифференциальной энтропии. В [35] определение сформулировано следующим образом.

**Определение 1.** Анизотропией  $\mathbf{A}(W)$   $m$ -мерного случайного вектора  $W$  называется неотрицательная величина, определённая по формуле

$$(2.7) \quad \mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{2\pi e}{m} \|W\|^2 \right) - \mathbf{h}(W),$$

где  $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$  — относительная энтропия (расстояние Кульбака-Лейблера) функции плотности распределения вероятности  $f$  вектора  $W$  относительно функции плотности гауссовского распределения  $p_{m,\lambda}$  с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$ ,  $\lambda > 0$ ;  $\mathbf{h}(W) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$  — дифференциальная энтропия  $W$ .

По формуле вычисления анизотропии видно, что ее значение определяется функцией распределения  $f$  случайного вектора  $W$  и его первыми двумя статистическими моментами, причем последнее слагаемое  $h(W)$  определяется только функцией распределения. Важно отметить следующие свойства анизотропии:

**Лемма 1.** [1] Анизотропия  $\mathbf{A}(W)$  случайного вектора  $W \in \mathbb{L}_2^m$  обладает следующими свойствами:

а) Для любой положительно определенной матрицы  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , являющейся ковариационной матрицей случайного вектора  $W$ , минимум анизотропии  $\mathbf{A}(W)$  вычисляется по формуле

(2.8)

$$\min \left\{ \mathbf{A}(W) : W \in \mathbb{L}_2^m, \mathbf{E}[WW^\top] = \Sigma \right\} = -\frac{m}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)},$$

причем минимум достигается только на гауссовском векторе  $W$  с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma$ .

б) Для любого вектора  $W \in \mathbb{L}_2^m$  анизотропия  $\mathbf{A}(W)$  является неотрицательной величиной. Нулевое значение анизотропии соответствует гауссовскому случайному вектору  $W$  с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$ .

Из второго пункта данной леммы видно, что случай нулевой анизотропии соответствует задачам  $\mathcal{H}_2$ -теории, для которых действует предположение о входном возмущении в виде гауссовского белого шума. С помощью понятия анизотропии случайного вектора можно описать множество входных случайных возмущений системы (2.1). Далее будем предполагать, что на вход системы поступают случайные возмущения, последовательность которых описывается вектором  $W_{0:N}$  с ограниченной анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N})$ . В следующем подразделе перейдем к понятию анизотропийной нормы системы.

### 2.3. Анизотропийная норма системы

Упомянутое в конце предыдущего подраздела множество случайных векторов с ограниченной сверху анизотропией обозначим следующим образом:

$$\mathbb{W}_a = \{W \in \mathbb{L}_2^m : \mathbf{A}(W) \leq a\},$$

где  $a \geq 0$  — заданная неотрицательная величина. На основании определений среднеквадратичного коэффициента усиления  $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$  и понятия анизотропии случайного вектора  $\mathbf{A}(W_{0:N})$  приведем определение анизотропийной нормы.

Определение 2. Анизотропийной нормой матрицы  $F_{0:N}$  называется неотрицательная величина вида

$$(2.9) \quad \|F\|_a = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}).$$

Как упоминалось ранее, система (2.1) полностью описывается соотношением (2.2) и нормы системы эквивалентны соответствующим нормам матрицы  $F_{0:N}$ . Следовательно, анизотропийная норма системы (2.1) совпадает с анизотропийной нормой матрицы  $F_{0:N}$ . Стоит отметить, что анизотропийная норма является неубывающей функцией от  $a$  и ее значение лежит в интервале между масштабированной 2-нормой и  $\infty$ -нормой системы, т.е. справедливы следующие неравенства:

$$(2.10) \quad \frac{\|T_{zw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = \|T_{zw}\|_0 \leq \|T_{zw}\|_a,$$

$$(2.11) \quad \|T_{zw}\|_a < \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty.$$

При этом для рассматриваемой системы должно выполняться условие

$$\|T_{zw}\|_2 / \sqrt{l_w} < \|T_{zw}\|_\infty.$$

Данное неравенство нарушается только в том случае, когда матрица  $F_{0:N}^\top F_{0:N}$  имеет вид  $F_{0:N}^\top F_{0:N} = \lambda I_{l_w}$  для некоторого  $\lambda \geq 0$ . Если данное условие выполняется при  $\lambda = 1$ , то систему называют изометричной.

Из определения анизотропийной нормы видно, что для ее вычисления необходимо определить наихудшее входное возмущение  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$ , при котором достигается супремум среднеквадратичного коэффициента усиления. Поскольку  $W_{0:N}$  является случайным вектором, для его определения необходимо получить его функцию распределения и первые два статистических момента. Вычисление анизотропийной нормы в пространстве состояний является целью первой задачи анизотропийного анализа. Вторая задача анализа заключается в формулировке условий ограниченности анизотропийной нормы системы (2.1) заданным числом  $\gamma \geq 0$  при заданном параметре  $a \geq 0$ . Постановке и решению этих задач посвящены разделы 2 и 3 данной работы.

## 2.4. Критерий изометричности системы

При доказательстве теоремы о вычислении анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, которое приведено в разделе 3, используется критерий изометричности системы. Поскольку изначально в формулировке критерия изометричности система подразумевается не стохастической, для рассматриваемого случая системы с мультипликативными шумами необходимо вывести необходимые и достаточные условия изометричности в терминах матриц системы. Для того, чтобы привести формулировку критерия изометричности системы в терминах ее матриц, необходимо ввести вспомогательные матрицы. На основании выражения элементов матрицы  $\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$  определим матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  на интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  следующим образом:

(2.12)

$$P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}[T(k, j+1)] \cdot \mathbf{E}[B(j)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(j)] \cdot \mathbf{E}[T^\top(k, j+1)],$$

$$(2.13) \quad Q(k) = \sum_{j=k}^N \mathbf{E}[T^\top(j, k)] \cdot \mathbf{E}[C^\top(j)C(j)] \cdot T(j, k),$$

где  $T(k, \kappa)$  — матрица перехода, удовлетворяющая выражению  $T(k, \kappa) = A(k-1)T(k-1, \kappa) = T(k, \kappa+1)A(\kappa)$ . Матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  удовлетворяют рекуррентным формулам

(2.14)

$$(2.15) \quad \begin{aligned} P(k+1) &= \mathbf{E}[A(k)] \cdot P(k) \cdot \mathbf{E}[A^\top(k)] + \mathbf{E}[B(k)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(k)], \\ Q(k) &= \mathbf{E}[A^\top(k)Q(k+1)A(k)] + \mathbf{E}[C^\top(k)C(k)], \end{aligned}$$

где  $P(0) = 0$ ,  $Q(N+1) = 0$ . Запишем по аналогии с критерием для детерминированного случая [36] критерий изометричности для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ :

Лемма 2 (Критерий изометричности). Линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами вида (3.1) является изометричной тогда и только

тогда, когда при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  матрицы системы удовлетворяют уравнениям

$$(2.16) \quad \sum_{i=0}^M \left[ B_i^\top(k) Q(k+1) B_i(k) + D_i^\top(k) D_i(k) \right] = I_{m_w},$$

$$(2.17) \quad P(k) \left[ A_0^\top(k) Q(k+1) B_0(k) + C_0^\top(k) D_0(k) \right] = 0,$$

где матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  определяются выражениями (2.14)-(2.15).

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами вида

$$(3.1) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases}$$

на конечном временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  с начальным состоянием  $x(0) = 0$ . Здесь  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор состояния системы,  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — вектор входного возмущения, а  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  — вектор оцениваемого выхода системы. Матрицы системы  $A(k), B(k), C(k), D(k)$  являются случайными матрицами специального вида

$$\begin{aligned} A(k) &= A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k) A_i(k), B(k) = B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k) B_i(k), \\ C(k) &= C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k) C_i(k), D(k) = D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k) D_i(k), \end{aligned}$$

где  $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$  для всех  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k$  являются независимыми в совокупности по  $i, j, k$  скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Матрицы  $A_i(k), B_i(k), C_i(k)$  и  $D_i(k)$  при всех значениях  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  и

$k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются детерминированными вещественными матрицами соответствующих размерностей. Также случайные величины  $\xi_{ji}(k)$  являются независимыми со входным случайным возмущением  $w(k)$ . Последовательность значений входного сигнала  $w(k)$  системы (3.1) в виде вектора  $W_{0:N}$  удовлетворяет условию  $A(W_{0:N}) \leq a$ , где параметр  $a \geq 0$  является заданным числом. Также задано некоторое неотрицательное число  $\gamma \geq 0$ .

Для системы (3.1) ставятся две задачи анизотропийного анализа:

Задача 1. Задана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с реализацией (3.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . На вход системы подаются случайные возмущения, описываемые вектором  $W_{0:N}$  и обладающие ограниченной анизотропией  $A(W_{0:N}) \leq a$ , где  $a \geq 0$  является заданной величиной. Необходимо вычислить в терминах пространства состояний анизотропийную норму  $|||T_{zw}|||_a$  системы.

Решением данной задачи является формула вычисления анизотропийной нормы системы (3.1) в терминах ее матриц. Полученное решение данной задачи используется при рассмотрении второй задачи анизотропийного анализа с приведенной ниже формулировкой.

Задача 2. Заданы линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с реализацией (3.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , значение параметра  $a \geq 0$  и величина  $\gamma \geq 0$ . На вход системы (3.1) подается возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором  $W_{0:N}$ , который удовлетворяет условию  $A(W_{0:N}) \geq a$ . Необходимо сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы системы  $T_{zw}$  заданным числом  $\gamma$  в терминах матриц данной системы, т.е. привести условия справедливости неравенства

$$(3.2) \quad |||T_{zw}|||_a \leq \gamma.$$

Решением данной задачи является система условий в терми-

нах матриц системы, при выполнении которых справедливо неравенство (3.2). В случае систем с детерминированными матрицами эти условия представляют собой разностное уравнение Риккати и алгебраическое неравенство специального вида. Также условия ограниченности анизотропийной нормы могут быть представлены в терминах неравенства Риккати и в терминах линейных матричных неравенств. Эти варианты решения второй задачи анизотропийного анализа также рассмотрены в данной работе.

#### 4. Решение задачи

В данном разделе представлены решения двух поставленных задач анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. В первом подразделе представлен вывод выражения для ковариационной матрицы наихудшего входного возмущения  $W_{0:N}^*$  и теорема о вычислении анизотропийной нормы в терминах разностных уравнений Риккати. Во втором подразделе приведены критерий и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами в терминах разностных уравнений и неравенства Риккати соответственно.

##### 4.1. Вычисление анизотропийной нормы

Исходя из определения анизотропийной нормы системы, для ее вычисления необходимо определить функцию распределения и первые два статистических момента наихудшего возмущения  $W_{0:N}^*$ , при котором достигается супремум в (2.9). Значение анизотропии вектора  $W_{0:N}^*$  определяется этими характеристиками, причем только от распределения зависит исключительно слагаемое  $-h(W_{0:N})$ . Поэтому задача поиска экстремума анизотропии разбивается на два этапа: поиск оптимальной функции распределения при фиксированных моментах и поиск оптимальных моментов при найденной функции распределения. Исходя из п.2 Леммы 1 (св-ва анизотро-

пии) и принципа максимальной энтропии оптимальным является гауссовское распределение с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей  $\Sigma$ , подлежащей определению. Гауссовский случайный вектор  $W_{0:N}$  с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей может быть представлен в виде выхода некоторого фильтра  $T_{wv}$  с передаточной матрицей  $G_{0:N}$ , на вход которого подается гауссовский случайный вектор  $V_{0:N}$  с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей.

Множество формирующих фильтров, выходами которых являются случайные векторы  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$ , обозначим  $\mathcal{G}_a$ . Задачу определения ковариационной матрицы наихудшего сигнала  $W_{0:N}^*$  можно свести к задаче нахождения формирующего фильтра  $T_{wv}$ , генерирующего этот наихудший сигнал. Данный формирующий фильтр можно описать с помощью вход-выходного соотношения  $W_{0:N}^* = G_{0:N} V_{0:N}$ , где  $G_{0:N}$  — передаточная матрица формирующего фильтра  $T_{wv}$ . Сформулируем задачу поиска матрицы  $G_{0:N}$  наихудшего формирующего фильтра.

**Задача.** Найти передаточную матрицу  $G_{0:N}$  формирующего фильтра  $T_{wv} \in \mathcal{G}_a$ , при которой достигается супремум следующего выражения

$$(4.1) \quad |||F|||_a = \sup_{G_{0:N} \in \mathcal{G}_a} \frac{\|F_{0:N} G_{0:N}\|_2}{\|G_{0:N}\|_2},$$

**Решение.** Правую часть выражения (4.1) можно переписать следующим образом:

$$(4.2) \quad \frac{\|F_{0:N} G_{0:N}\|_2}{\|G_{0:N}\|_2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где  $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ ,  $\Sigma = G_{0:N} G_{0:N}^\top$ . Запишем математически условия, накладываемые на матрицу  $G_{0:N}$

$$(4.3) \quad W_{0:N} = G_{0:N} V_{0:N}, \quad \mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a, \quad \text{tr}(\Sigma) = 1.$$

Из свойства анизотропии (2.8) следует, что функционал анизотропии  $\mathbf{A}(W_{0:N})$  удовлетворяет условию

$$(4.4) \quad \mathbf{A}(W_{0:N}) \geq -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{l_w \Sigma}{\text{tr}(\Sigma)} \right) = -\frac{1}{2} \ln \det (l_w \Pi),$$

где  $\Pi = \frac{\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)}$ . Таким образом, исходная задача поиска наилучшего формирующего фильтра с матрицей  $G_{0:N}$  сводится к задаче поиска экстремума функционала

$$(4.5) \quad J(\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) \rightarrow \max,$$

при условиях

$$(4.6) \quad \text{tr}(\Pi) = 1, \quad -\frac{1}{2} \ln \det(l_w \Pi) \leq a.$$

Видно, что на искомую точку экстремума функционала  $\Pi$  введены сразу два типа ограничений: в виде равенства и неравенства. Следовательно, для решения данной задачи воспользуемся теоремой Куна-Такера [22]. Выпишем функцию Лагранжа  $L(\Pi)$  для функционала (4.5) и условий (4.6):

$$(4.7) \quad L(\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) + \lambda_1(1 - \text{tr}(\Pi)) + \lambda_2(-\frac{1}{2} \ln \det(m\Pi) - a),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — множители Лагранжа. Необходимым условием экстремума функционала (4.5) является равенство нулю производной  $dL(\Pi)$  функции Лагранжа в точке экстремума  $\Pi^*$ . Поскольку  $\mathcal{L}(\Pi)$  является функцией матричного аргумента, для определения производной  $dL(\Pi)$  воспользуемся производной Фреше

$$(4.8) \quad dL(\Pi)[\Delta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\Pi + \varepsilon\Delta) - L(\Pi)}{\varepsilon}.$$

Производная  $dL(\Pi)[\Delta]$ , определяемая выражением (4.8), должна быть равна нулю при любом значении  $\Delta$ . Определив из данного условия матрицу  $\Pi$  и множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$ , получаем искомую ковариационную матрицу  $\Sigma$  следующего вида:

$$(4.9) \quad \Sigma(q) = (I - q\Lambda)^{-1},$$

где параметр  $q$  определяется из уравнения

$$(4.10) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m\Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))} \right) = a;$$

Таким образом, математически описана связь матрицы  $F_{0:N}$  системы и ковариационной матрицы  $\Sigma$  выходного сигнала наилучшего фильтра. Параметр  $q$  принимает значения от 0 до

$\|F_{0:N}\|_\infty^{-2}$ . Формулы для анизотропии  $\mathbf{A}(W_{0:N})$  и анизотропийной нормы  $\|T_{zw}\|_a$  можно переписать в терминах функции  $\Sigma(q)$  следующим образом:

$$(4.11) \quad \mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{l_w \Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))},$$

$$(4.12) \quad \|T_{zw}\|_a = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma(q))}{\text{tr}(\Sigma(q))}}.$$

Введем вспомогательные функции

$$(4.13) \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

$$(4.14) \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{\Phi(q)}\right)},$$

где

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w} \text{tr} \Sigma(q), \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_w} \ln \det \Sigma(q).$$

Получаем, что анизотропийная норма системы вычисляется по формуле  $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ , где  $\mathcal{A}^{-1}(a)$  соответствует значению  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$ , такому что  $\mathcal{A}(q) = a$ . Полученные выражения позволяют вычислить анизотропийную норму в частотной области.

Для получения формулы нормы в пространстве состояний необходимо определить реализацию в пространстве состояний наихудшего фильтра  $T_{wv}$ , формирующего наихудшее возмущение  $W_{0:N}^*$  с ковариационной матрицей  $\Sigma$  вида (4.9). Зная вид ковариационной матрицы  $\Sigma(q)$  наихудшего фильтра, можно найти передаточную матрицу  $G_{0:N}$  наихудшего фильтра  $T_{wv}$  из выражения

$$(4.15) \quad G_{0:N} G_{0:N}^\top = (I_{l_w} - q\Lambda)^{-1}$$

Распишем (4.15) с учетом  $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ :

$$(4.16) \quad G_{0:N}^{-\top} G_{0:N}^{-1} + q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] = \mathbf{E} \left[ [\sqrt{q} F_{0:N}^\top G_{0:N}^{-\top}] \begin{bmatrix} \sqrt{q} F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix} \right] = I_{l_w}.$$

Введя матрицу  $\Theta_{0:N} = \begin{bmatrix} \sqrt{q} F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix}$ , имеем

$$(4.17) \quad \mathbf{E}[\Theta_{0:N}^\top \Theta_{0:N}] = I_{l_w}.$$

Матрице  $\Theta_{0:N}$  можно поставить в соответствие линейную систему с одним входным сигналом  $w$  и двумя выходами — оцениваемый выход  $z$  исходной системы и гауссовский белый шум  $v$  на входе формирующего фильтра. Из (4.17) видно, что система с матрицей  $\Theta_{0:N}$  является изометричной. Следовательно, матрицы этой системы удовлетворяют критерию изометричности, формулировка которого приведена в Разделе 2. Но для его применения необходимо выбрать конфигурацию системы искомого наихудшего фильтра  $T_{wv}$ . Здесь используется предположение, что для формирования наихудшего возмущения для системы (3.1) необходимо иметь полную информацию о состоянии системы. Изначально функция распределения наихудшего возмущения может быть не определена точно, но при известных первых двух статистических моментах его можно заменить с точностью до этих двух моментов заменить гауссовским возмущением с теми же характеристиками. А любое гауссовское возмущение с известными моментами можно представить в виде выхода некоторой линейной системы, на вход которой подается гауссовский белый шум. На основании приведенных рассуждений предполагаем, что наихудший формирующий фильтр является линейной системой вида

$$(4.18) \quad T_{wv} \sim \begin{cases} x(k+1) &= (\mathbf{E}[A(k)] + \mathbf{E}[B(k)]L(k))x(k) \\ &+ \mathbf{E}[B(k)]S^{1/2}(k)v(k), \\ w(k) &= L(k)x(k) + S^{1/2}(k)v(k), \end{cases}$$

где  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор некоторой оценки состояния исходной системы с начальным состоянием  $x(0) = 0$ ,  $v(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — входное возмущение в виде гауссовского вектора с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, матрицы  $L(k)$ ,  $S(k)$  — детерминированные матрицы фильтра соответствующих размерностей. Применив критерий изометричности к системе с передаточной матрицей  $\Theta_{0:N}$ , получим вы-

ражения для матриц фильтра  $S(k)$  и  $L(k)$

$$\begin{aligned} S(k) &= (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)R_1(k+1)B_i(k)) \\ &\quad - B_0^\top R_2(k+1)B_0)^{-1}, \\ L(k) &= S(k)(B_0^\top(k)(R_1(k+1) + R_2(k+1))A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)), \end{aligned}$$

которые определяются в терминах решения разностного уравнения Риккати в обратном времени

$$\begin{aligned} R_1(k) &= \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_1(k+1)A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k)C_i(k), \\ R_2(k) &= A_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k) \end{aligned}$$

с граничным условием  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ . Из определения анизотропийной нормы следует, что для ее вычисления еще необходимо определить выражение  $\|G_{0:N}\|_2^2 = \text{tr}(G_{0:N}G_{0:N}^\top)$  в пространстве состояний. Исходя из вида фильтра (4.18) получим

$$\text{tr}(G_{0:N}G_{0:N}^\top) = \sum_{k=0}^N \text{tr}(L(k)\Upsilon(k)L^\top(k) + S(k)),$$

где матрицы  $\Upsilon(k)$  удовлетворяют разностному уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} \Upsilon(k+1) &= (A_0(k) + B_0(k)L(k))\Upsilon(k)(A_0(k) + B_0(k)L(k))^\top \\ &\quad + B_0(k)S(k)B_0^\top(k). \end{aligned}$$

с начальным условием  $\Upsilon(0) = 0$ . В силу структуры формирующего фильтра (4.18) вспомогательные функции  $\Phi(q)$  и  $\Psi(q)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \frac{1}{l_w} \text{tr} \Sigma(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr}(L(k)\Upsilon(k)L^\top(k) + S(k)), \\ \Psi(q) &= \frac{1}{l_w} \ln \det \Sigma(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{i=0}^N \ln \det(S(k)), \end{aligned}$$

Полученные результаты решения задачи вычисления анизотропийной нормы запишем в виде теоремы.

Теорема 1. Дана линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами  $T_{zw}$  вида (3.1) на конечном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  и задано значение параметра  $a \geq 0$ . На вход системы подается случайное возмущение, описываемое вектором  $W_{0:N}$  с ограниченной анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$ . При сделанных допущениях анизотропийная норма системы  $T_{zw}$  вычисляется по формуле  $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ , где  $\mathcal{A}^{-1}(a)$  соответствует значению  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$ , такому что  $\mathcal{A}(q) = a$ . Функции  $\mathcal{N}(q)$  и  $\mathcal{A}(q)$  определены следующим образом:

$$(4.19) \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

где функции  $\Phi(q)$  и  $\Psi(q)$  имеют вид

$$(4.20) \quad \Phi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr} \left( S(k) + L(k) \Upsilon(k) L^\top(k) \right),$$

$$(4.21) \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \ln \det S(k).$$

Матрицы  $S(k)$  и  $L(k)$  определены в терминах решения раз-

ностного уравнения Риккати в обратном времени

$$(4.22) \quad R_1(k) = \sum_{i=0}^M \left( A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q C_i^\top(k) C_i(k) \right),$$

$$(4.23) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

$$(4.24)$$

$$S(k) = (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left( q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k) \right) - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k))^{-1},$$

$$(4.25) \quad L(k) = S(k) \left( q D_0^\top(k) C_0(k) + B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) \right).$$

Матрицы  $\Upsilon(k)$  удовлетворяют рекуррентной формуле

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \Upsilon(k+1) = & (A_0^\top(k) + L^\top(k) B_0^\top(k)) \Upsilon(k) (A_0^\top(k) + L^\top(k) B_0^\top(k))^\top \\ & + B_0(k) S(k) B_0^\top(k). \end{aligned}$$

Для уравнений (5.69), (5.70) и (4.26) заданы следующие граничные и начальные условия:  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ ,  $\Upsilon(0) = 0$ .

Основным отличием данной теоремы от ее аналога для систем с детерминированными матрицами заключается в том, что в случае систем с мультипликативными шумами для вычисления анизотропийной нормы необходимо решить два разностных уравнения Риккати вместо одного. Получив решение первой задачи анизотропийного анализа, можно приступить к решению задачи формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы.

#### 4.2. Условия ограниченности анизотропийной нормы

Зная формулу вычисления анизотропийной нормы системы в терминах разностных уравнений Риккати, можно, к примеру, определить параметры оптимального фильтра, обеспечивающего минимум анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. Но стоит отметить, что решение оптималь-

ной задачи является достаточно консервативным и полученный фильтр или регулятор минимизирует значение анизотропийной нормы только для определенной конфигурации исходной системы. Если конфигурация с течением времени поменяется, то значение анизотропийной нормы уже не будет минимальным. Поэтому существуют задачи субоптимальных управления и фильтрации, целью в которых является синтез регулятора или фильтра, обеспечивающего ограниченность анизотропийной нормы системы, замкнутой регулятором, или в ошибках фильтрации, сверху заданным неотрицательным числом. Для решения таких задач необходимо решить вторую задачу анизотропийного анализа, которая заключается в формулировке условий ограниченности анизотропийной нормы системы в терминах ее матриц. Поскольку уже была получена формула вычисления самой анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, необходимо в терминах матриц системы и решения разностных уравнений Риккати (5.69)-(5.70) определить условие, при выполнении которых справедливо неравенство

$$\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$$

для заданных  $a$  и  $\gamma$ . Вывод этого условия производится по аналогии с доказательством аналогичной теоремы в [26]. Преобразуем вспомогательную функцию  $\mathcal{A}(q)$ , введенную в (4.13), следующим образом:

$$(4.27) \quad \mathcal{A}(q) = \mathfrak{A}(q, \mathcal{N}(q)),$$

где

$$(4.28) \quad \mathfrak{A}(q, \gamma) = \frac{1}{2} \ln \det(I_{l_z} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2).$$

Очевидно, что функции  $\mathcal{A}(q)$  и  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  пересекаются в точке, в которой выполняется  $\mathcal{N}(q) = \gamma$ , т.е. при  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ . Поскольку  $\mathcal{N}(q)$  является строго монотонной функцией, при  $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  выполняется  $\mathcal{N}(q) < \gamma$  и соответственно  $\mathcal{A}(q) < \mathfrak{A}(q, \gamma)$ , а при  $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  наоборот. Определив производную функции  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  по аргументу  $q$ , получаем, что она равна нулю как раз в точке  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ , положительна при

$q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  и отрицательна при  $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ . Получаем, что в точке  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  функция  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  достигает максимального значения.

Стоит отметить, что неравенство  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  эквивалентно неравенству

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a.$$

Этот факт вытекает из свойств анизотропийной нормы. Она является монотонно возрастающей функцией по аргументу  $a$ . Поэтому значение этой нормы при параметре  $a = a_0$  меньше  $\gamma$  тогда и только тогда, когда значение параметра  $a$  такое, что  $\|T_{zw}\|_a = \gamma$ , больше значения  $a_0$ . А неравенство  $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$  эквивалентно существованию  $q \in [0, \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$  такого, что  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ . Таким образом,

$$(4.29) \quad \|F_{0:N}\|_a \leq \gamma \iff \mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a \text{ для некоторого } q.$$

Это означает, что анизотропийная норма системы  $T_{zw}$  ограничена сверху величиной  $\gamma$  тогда и только тогда, когда выполняется условие  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ . Распишем это условие с учетом вида функции  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ :

$$(4.30) \quad \frac{1}{2} \ln \det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2) \geq a.$$

Далее необходимо записать условие (4.30) в терминах матриц системы и наихудшего фильтра. Для этого необходимо воспользоваться равенством

$$\det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) = \det(I_{l_z} - q\mathbf{E}[F_{0:N} F_{0:N}^\top])$$

и ввести матрицу  $H_{0:N}$ , которая удовлетворяет условию

$$(4.31) \quad \det(I_{l_z} - q\mathbf{E}[F_{0:N} F_{0:N}^\top]) = H_{0:N} H_{0:N}^\top$$

и соответствует линейной системе, имеющей вид

$$H_{0:N} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{E}[A(k)] & L(k)S^{-1/2}(k) \\ \hline \mathbf{E}[C(k)] & S^{1/2}(k) \end{array} \right]$$

Матрица  $H_{0:N}$  является блочной нижнетреугольной матрицей с блоками  $S^{1/2}(0), \dots, S^{1/2}(N)$  на диагонали. Следовательно,

можно преобразовать первое слагаемое левой части неравенства (4.30) следующим образом:

$$(4.32) \quad \ln \det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}F_{0:N}^\top]) = \sum_{k=0}^N \ln \det S(k).$$

С учетом (4.32) неравенство (4.30) имеет вид

$$(4.33) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Получаем, что выполнение условия  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  эквивалентно выполнению неравенства (4.33), которое будем называть неравенством специального вида. Запишем полученные результаты решения задачи анизотропийного анализа в следующей теореме.

Теорема 2. Дана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с мультипликативными шумами вида (3.1). Также известны значение параметра  $a \geq 0$  и величина  $\gamma \geq 0$ . Анизотропийная норма данной системы удовлетворяет неравенству  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда существует такое значение  $q \geq 0$ , что для матриц  $R_1(k) \succ 0$ ,  $R_2(k) \succ 0$  при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , являющихся решением разностного уравнения Риккати

$$(4.34) \quad R_1(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k),$$

$$(4.35) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k)$$

$$(4.36)$$

$$S(k) = (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k)) - \\ - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k))^{-1}$$

$$(4.37) \quad L(k) = S(k) (B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + \\ + q D_0^\top(k) C_0(k))$$

с граничными условиями  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ , матрицы  $S(k)$  являются положительно определенными матрицами и удовлетворяют неравенству специального вида

$$(4.38) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Обратим внимание, что приведенные в теореме условия являются необходимыми и достаточными условиями ограниченности анизотропийной нормы системы. Однако для проверки этих условий необходимо получить весь набор матриц  $S(k)$  в терминах решений разностных уравнений Риккати. Полученный набор матриц  $S(k)$  может не удовлетворять условию специального вида и таким образом не быть решением всей системы неравенств. Очевидно, что нужно искать способ одновременного решения и уравнений Риккати, и неравенства (4.38). Тут стоит отметить, что у данной теоремы есть альтернативная формулировка в терминах неравенства Риккати. Ее основным преимуществом является возможность последующего преобразования неравенства Риккати в линейное матричное неравенство, что позволяет решать задачи выпуклой оптимизации. Также линейные матричные неравенства решаются одновременно с неравенством специального вида, что позволяет получить решение, удовлетворяющее всем условиям и из существования такого решения будет следовать ограниченность анизотропийной нормы.

Для перехода от разностных уравнений Риккати к неравенству в первую очередь необходимо объединить уравнения (4.34), (4.35) в одно уравнение. Для этого введем новую переменную  $R(k) = R_1(k) + R_2(k)$ . В терминах новой переменной  $R(k)$  разностные уравнения Риккати принимают следующий вид:

$$(4.39) \quad \begin{aligned} R(k) = & \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + \\ & + A_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) - \\ & - Q_1, \end{aligned}$$

где  $Q_1 = \sum_{i=0}^M (A_i^\top(k)R_2(k+1)A_i(k) + A_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k))$ , а матрицы  $S(k)$  и  $L(k)$  принимают следующий вид:

$$(4.40) \quad S(k) = (I - B_0^\top(k)R(k+1)B_0(k) - \sum_{i=0}^M qD_i^\top(k)D_i(k) + \\ + B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k) - \\ - \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k)(R(k+1) - R_2(k+1))B_i(k)),$$

$$(4.41) \quad L(k) = S(k)(B_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)).$$

Получаем разностное уравнение Риккати вида

$$(4.42) \quad R(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R(k+1)A_i(k) + \sum_{i=0}^M qC_i^\top(k)C_i(k) + \\ + A_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k) + Q_2(k),$$

$$(4.43) \quad S(k) = (I - B_0^\top(k)R(k+1)B_0(k) - \sum_{i=0}^M qD_i^\top(k)D_i(k) - \\ - \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k)(R(k+1) - R_2(k+1))B_i(k)) + \\ + B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k),$$

$$(4.44) \quad L(k) = S(k)(B_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)),$$

где  $Q_2(k) = - \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_2(k+1)A_i(k) - A_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k)$ .

Для решения уравнения  $R(k)$  задано граничное условие  $R(N+1) = 0$ . Поскольку слагаемые  $-Q_2(k)$ ,  $\sum_{i=0}^M B_i^\top(k)R_2(k+1)B_i(k)$ ,  $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$  и  $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$  являются неотрицательно определенными матрицами, то можно воспользоваться свойством монотонности решения разностного уравнения Риккати [15], [16] для перехода к неравенству Риккати. Введем новую матричную переменную  $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$ , которая удовлетворяет условию  $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$  при

всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . С учетом свойства монотонности решения уравнения Риккати получаем неравенство вида

$$(4.45) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(k) \succ & A_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_i(k) + \\ & + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k) \mathcal{S}^{-1}(k) \mathcal{L}(k), \end{aligned}$$

(4.46)

$$(4.47) \quad \mathcal{S}(k) = \left( I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left( q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) B_i(k) \right) \right)^{-1},$$

$$\mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) \left( B_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k) \right),$$

с граничным условием  $\mathcal{R}(N+1) = 0$ . Из условия  $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$  следует  $\mathcal{S}^{-1}(k) \prec S^{-1}(k)$ , поэтому имеет место неравенство специального вида

$$(4.48) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Если у полученных неравенств (4.45)-(4.48) имеется решение  $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$ , то в силу свойства монотонности решения уравнения Риккати существует и решение исходных уравнений Риккати. Следовательно, существование решения неравенства Риккати, удовлетворяющего неравенству специального вида, является достаточным условием ограниченности анизотропийной нормы.

Теорема 3. Дана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с мультипликативными шумами вида (3.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Также заданы скалярные величины  $a \geq 0$  и  $\gamma \geq 0$ . Анизотропийная норма системы удовлетворяет условию  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ , если существуют значение параметра  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^2)$  и семейство матриц  $\mathcal{R}(k) \succ 0$  при  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , которые удовлетворяют рекур-

рентному неравенству Риккати в обратном времени  
(4.49)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k) \succ & A_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_i(k) + \\ & + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k) \mathcal{S}^{-1}(k) \mathcal{L}(k), \end{aligned}$$

с граничным условием  $\mathcal{R}(N+1) = 0$ , где  
(4.50)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(k) &= \left( I_{m_w} - q \sum_{i=0}^M D_i^\top(k) D_i(k) - \sum_{i=0}^M B_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) B_i(k) \right)^{-1}, \\ (4.51) \quad \mathcal{L}(k) &= \mathcal{S}(k) \left( B_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k) \right), \end{aligned}$$

Матрицы  $\mathcal{S}(k)$  при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются положительно определенными матрицами, удовлетворяющими неравенству

$$(4.52) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Полученное неравенство Риккати можно преобразовать к виду линейного матричного неравенства с помощью известной леммы Шура. Перед этим необходимо разделить обе части неравенства (4.49) на параметр  $q > 0$  и ввести замену переменных

$$\eta = q^{-1}, \quad \mathcal{P}(k) = \eta \mathcal{R}(k).$$

Для сокращения записи опустим аргументы  $k$  матриц неравенства, а  $\mathcal{P}(k+1)$  обозначим как  $\hat{\mathcal{P}}$ . Применив замену переменных к (4.49), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \succ & \sum_{i=0}^M A_i^\top \hat{\mathcal{P}} A_i + \sum_{i=0}^M C_i^\top C_i + (A_0^\top \hat{\mathcal{P}} B_0 + C_0^\top D_0) \cdot \\ & \cdot (\eta I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (D_i^\top D_i + B_i^\top \hat{\mathcal{P}} B_i)) (B_0^\top \hat{\mathcal{P}} A_0 + D_0^\top C_0), \end{aligned}$$

Перенесем все слагаемые неравенства в левую часть и воспользуемся леммой Шура. В результате получим

$$(4.53) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} - \sum_{i=0}^M (A_i^\top \hat{\mathcal{P}} A_i + C_i^\top C_i) & A_0^\top \hat{\mathcal{P}} B_0 + C_0^\top D_0 \\ B_0^\top \hat{\mathcal{P}} A_0 + D_0^\top C_0 & \eta I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (D_i^\top D_i + B_i^\top \hat{\mathcal{P}} B_i) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Для дальнейших преобразований введем вспомогательную матрицу  $\Theta(k) \succ 0$ , удовлетворяющую неравенству

$$(4.54) \quad \eta \Theta^{-1} \prec \eta I_{m_w} - \left( \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top \mathcal{D}_i + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top \hat{\mathcal{P}} \mathcal{B}_i \right).$$

Это неравенство эквивалентно условию  $\Theta^{-1}(k) \prec \mathcal{S}^{-1}(k)$ . Получается, что после решения неравенств и вычисления набора матриц  $\Theta(k)$  необходимо обращать каждую из них и проверять выполнение неравенства (4.54). Подобные процедуры могут привести к значительному увеличению погрешности вычислений, поэтому введем дополнительную замену переменных следующего вида:

$$(4.55) \quad \Psi(k) = \eta \Theta^{-1}(k).$$

Для сокращения записи матричных неравенств введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_{ex}(k) &= [ A_1^\top \quad \dots \quad A_M^\top ]^\top, \\ B_{ex}(k) &= [ B_0^\top \quad \dots \quad B_M^\top ]^\top, \\ C_{ex}(k) &= [ C_1^\top \quad \dots \quad C_M^\top ]^\top, \\ D_{ex}(k) &= [ D_0^\top \quad \dots \quad D_M^\top ]^\top. \end{aligned}$$

С учетом введенных замен переменных и обозначений нера-

венства (4.53),(4.54) принимают следующий вид:

(4.56)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \eta I_{m_w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ \mathcal{A}_{ex} & 0 \\ \mathcal{C}_{ex} & \mathcal{D}_{ex} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{M+1}(\widehat{\mathcal{P}}) & 0 \\ 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ \mathcal{A}_{ex} & 0 \\ \mathcal{C}_{ex} & \mathcal{D}_{ex} \end{bmatrix} \succ 0.$$

$$(4.57) \quad \eta I_{m_w} - \Psi - \sum_{i=0}^M \left( \mathcal{D}_i^\top \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i^\top \widehat{\mathcal{P}} \mathcal{B}_i \right) \succ 0.$$

Применив лемму Шура к неравенствам (4.56),(4.57), получим матричные неравенства вида

$$(4.58) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ A_0 & B_0 & \widehat{\mathcal{P}}^{-1} & * & * & * \\ \mathcal{A}_{ex} & 0 & 0 & \Phi_M(\widehat{\mathcal{P}}^{-1}) & * & * \\ C_0 & D_0 & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.59) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi & * & * & * & * \\ B_{ex} & \Phi_{M+1}(\widehat{\mathcal{P}}^{-1}) & * & * & * \\ D_{ex} & 0 & \dots & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Полученные неравенства не являются линейными из-за обратных матриц  $\widehat{\mathcal{P}}^{-1}$  на главных диагоналях. В целях устранения этих компонент умножим неравенства слева и справа на блочно-диагональные матрицы  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Матрицы  $U_1$  и  $U_2$  имеют вид

$$(4.60) \quad U_1 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, I_{m_w}, \underbrace{\widehat{\mathcal{P}}, \dots, \widehat{\mathcal{P}}}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)}),$$

$$(4.61) \quad U_2 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, \underbrace{\widehat{\mathcal{P}}, \dots, \widehat{\mathcal{P}}}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)}).$$

В результате проведенных конгруэнтных преобразований по-

лучаем

$$(4.62) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}\mathcal{A}_0 & \widehat{\mathcal{P}}\mathcal{B}_0 & \widehat{\mathcal{P}} & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}\mathcal{A}_{ex} & 0 & 0 & \Phi_M(\widehat{\mathcal{P}}) & * & * \\ \mathcal{C}_0 & \mathcal{D}_0 & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.63) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{B}_{ex}(k) & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{D}_{ex}^\top(k) & 0 & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Стоит отметить, что при  $k = N$  линейные матричные неравенства имеют вид

$$(4.64) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.65) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Решение данных неравенств в виде наборов матриц  $\mathcal{P}(k)$ ,  $\Psi(k)$  и скаляра  $\eta$  должно удовлетворять неравенству специального вида

$$(4.66) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Таким образом, получаем условия ограниченности анизотропийной нормы системы (3.1) в терминах решений ЛМН и неравенства специального вида. Если у данных неравенств при заданных  $a$  и  $\gamma$  существует решение в виде наборов матриц  $\mathcal{P}(k)$ ,  $\Psi(k)$  и скаляра  $\eta$ , то условие  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  выполняется. Использование полученных результатов решения задач анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами продемонстрировано с помощью численного примера в следующем разделе.

## 5. Пример

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами на конечном интервале времени, описывающую движение самолета в режиме посадки по заданной траектории при наличии внешнего воздействия в виде ветра. Подробное описание этой модели приведено в [5]. Линейная дискретная система имеет реализацию в пространстве состояний вида

(5.67)

$$T_{zu} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B_w(k)w(k) + B_u(k)u(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_{zw}(k)w(k) + D_{zu}(k)u(k), \end{cases}$$

с измеряемым выходом

$$y(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_{yw}(k)w(k),$$

где

$$\begin{aligned} x(k) &= [\Delta V(k) \ \Delta \theta(k) \ \Delta \omega_z(k) \ \Delta \vartheta(k) \ \Delta h(k) \ \Delta T(k)]^\top, \\ w(k) &= [w_y(k) \ \dot{w}_x(k) \ \dot{w}_y(k) \ n_{y1}(k) \ n_{y2}(k)]^\top, \\ u(k) &= [\Delta \vartheta_{cy}(k) \ \Delta \delta_t(k)]^\top, \\ z(k) &= [\Delta V(k) \ \Delta h(k) \ \Delta \vartheta_{cy}(k) \ \Delta \delta_t(k)]^\top, \\ y(k) &= [\Delta V(k) + n_{y1}(k) \ \Delta h(k) + n_{y2}(k)]^\top, \end{aligned}$$

где  $V(k)$  — воздушная скорость;  $T(k)$  — сила тяги двигателей;  $\theta(k)$  — угол наклона траектории;  $\omega_z(k)$  — угловая скорость тангажа;  $\vartheta(k)$  — угол тангажа;  $h(k)$  — высота центра масс самолета;  $\theta_{cy}(k)$  — управление обобщенными рулями высоты;  $\delta_t(k)$  — управление сектором газа;  $w_x(k)$ ,  $w_y(k)$  — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра;  $n_{y1}(k)$ ,

$n_{y2}(k)$  — шумы измерений. Матрицы модели (5.67) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0008 & 0 & -0,0009 & 0 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0099 & 0,9999 & 0 & 0 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9960 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0012 & 0 \\ 0,0117 & 0 \\ 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,004 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & -0,0100 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0004 & -0,0080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Важно отметить, что в отличие из изначальной версии системы (5.67), представленной в [5], в данной работе предполагается, что в датчиках возможны случайные сбои, вследствие которых данные об определенных параметрах состояния самолета не поступают на пульт управления. В системе (5.67) сбой моделируется с помощью случайной величины  $\lambda(k)$ , имеющей распределение Бернулли и принимающей значения 1 с

вероятностью  $p$  (стабильная работа датчика) и  $0$  с вероятностью  $1 - p$  (сбой в датчике). Подобные системы являются известным частным случаем систем с мультипликативными шумами. Для стабилизации нулевого положения системы (5.67) используется статический  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор вида  $u(k) = K_\infty y(k)$ . Матрица регулятора имеет вид [32]

$$K_\infty = \begin{pmatrix} -0.2051 & -0.1793 \\ -0.2716 & -0.0181 \end{pmatrix}.$$

Для системы (5.67), замкнутой  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятором, решим описанные ранее задачи анизотропийного анализа. Пусть система  $T_{yw}$  рассматривается на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, 100\}$  и задано значение вероятности стабильной работы датчиков  $p = 0,95$ . Масштабированная  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы системы равны

$$(5.68) \quad \frac{\|T_{yw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = 0,1858; \quad \|T_{yw}\|_\infty = 1,5483.$$

Используя теорему 1, вычислим значения анизотропийной нормы системы при нескольких значениях параметра  $a$ :

Таблица 1: Результаты вычисления анизотропийной нормы

| $a$            | 0,01   | 1      | 20     | 50     | 100    |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\ T_{zw}\ _a$ | 0,1876 | 0,2094 | 0,3700 | 0,5193 | 0,6875 |

Видно, что значение нормы увеличивается по мере увеличения  $a$ , что соответствует определению анизотропийной нормы. При  $a \rightarrow \infty$  значение анизотропийной нормы  $\|T_{zw}\|_a$  должно стремиться к значению  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы данной системы. Ниже представлен график зависимости анизотропийной нормы от параметра  $a$

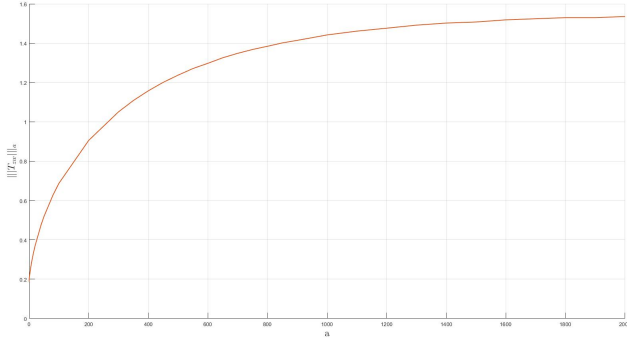


Рис. 1: Зависимость  $\|T_{yw}\|_a(a)$

Видно, что при достаточно больших значениях  $a$  анизотропная норма стабилизируется на уровне  $\|T_{zw}\|_a \approx 1,536$ . Стоит отметить, что нормы рассматриваемой системы различаются при разных значениях вероятности  $p$ . Построим зависимость анизотропной нормы от  $p$  при фиксированных  $a = 100$  и  $N = 100$ .

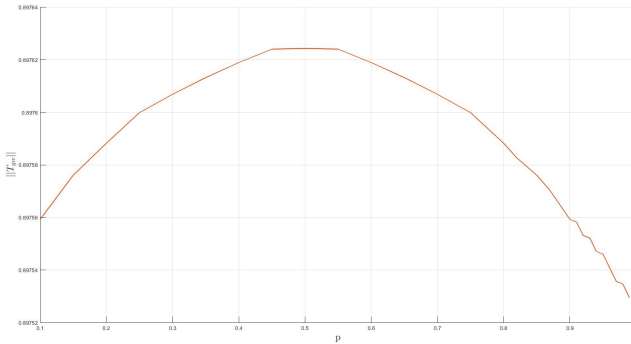


Рис. 2: Зависимость  $\|T_{yw}\|_a(p)$  при  $a = 100$ ;  $N = 100$

Видно, что динамика изменения анизотропной нормы в за-

висимости от значения  $p$  совпадает с динамикой изменения дисперсии случайной величины  $\lambda(k)$ , равной  $\sqrt{p(1-p)}$ . Это связано с тем, что анизотропийная норма системы вычисляется в терминах решения разностного уравнения Риккати, которое для данной системы имеет вид

(5.69)

$$R_1(k) = \sum_{i=0}^M \left( A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sqrt{p(1-p)} C_i^\top(k) C_i(k) \right),$$

$$(5.70) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

(5.71)

$$S(k) = (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left( q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k) \right) - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k))^{-1},$$

$$(5.72) \quad L(k) = S(k) \left( q D_0^\top(k) C_0(k) + B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) \right).$$

В соответствии со свойством монотонности решения уравнения Риккати, при увеличении правой части уравнения увеличивается и решение  $R_1(k)$ ,  $R_2(k)$ . Получаем, что при  $p = \frac{1}{2}$  анизотропийная норма принимает максимальное значение и при решении задачи субоптимальной фильтрации имеет смысл предполагать значение вероятности сбоя  $p = \frac{1}{2}$ , если она изначально не известна. В таком случае фильтр будет обеспечивать ограниченность нормы, наихудшей с точки зрения вероятности сбоя, и для других случаев он также будет эффективен.

Далее рассмотрим вторую задачу анизотропийного анализа, заключающуюся в проверке условий ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным значением  $\gamma > 0$ . Для этого реализуем с помощью пакета Yalmip Matlab toolbox [25] решение системы ЛМН (4.62)-(4.65) и неравенства специального вида (4.66). Если существует решение ЛМН в виде

матриц  $P(k)$  и  $\Psi(k)$ , удовлетворяющих неравенству (4.66), то условие  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  выполняется для данных  $a$  и  $\gamma$ . Ниже представлены результаты решения этой задачи при разных значениях  $\gamma$ :

Таблица 2: Результаты проверки ограниченности анизотропийной нормы

| $\gamma$ | 0,7 | 0,9  | 2    | 5    | 10   |
|----------|-----|------|------|------|------|
| Решение  | Нет | Есть | Есть | Есть | Есть |

Поскольку при  $a = 100$ ,  $N = 100$  и  $p = 0,95$  анизотропийная норма равна  $\|T_{zw}\|_a = 0,8975$ , то при  $\gamma < 0,8975$  решение у системы ЛМН и неравенства специального вида должно отсутствовать, что и можно наблюдать из численных результатов решения задачи. В рассматриваемом случае все матрицы системы фиксированы и потому возможно только проверить выполнение условия ограниченности анизотропийной нормы для данной системы. Если применить эти условия ограниченности для системы с неизвестными матрицами, например системы в ошибках фильтрации с неизвестными матрицами фильтра, то можно из данных условий получить соответствующие наборы матриц фильтра, при которых анизотропийная норма этой системы ограничена сверху заданным  $\gamma$ . Данный подход используется при решении задач субоптимальной анизотропийной фильтрации.

## 6. Заключение

В данной работе представлены методы решения задач анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами. В качестве решения задачи вычисления анизотропийной нормы представлена формула вычисления этой нормы в пространстве состояний. Это формула программно реализована в численном примере и результаты вычислений представлены в соответствующем разделе работы. Итогом решения задачи формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами являются критерий ограниченности анизотропийной нормы в терминах разностных уравнений Риккати, а также достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы в терминах неравенства Риккати и в терминах линейных матричных неравенств. Решение этих ЛМН численно реализовано и результаты проверки ограниченности анизотропийной нормы конкретной системы с мультипликативными шумами представлены в данной работе. Полученные результаты решения задач анизотропийного анализа позволяют решать задачи оптимальной и субоптимальной фильтрации для систем с мультипликативными шумами, а также задачи управления.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П.Е. Анизотропийный анализ робастного качества линейных дискретных нестационарных систем на конечном временном интервале. *АиТ*. 2006. ном. 8. С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем. *Доклады Академии Наук*, Т.342 (1995). С. 583–585.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем. *Автоматика и Телемеханика*, 1999. №3.
4. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. Робастная устойчивость и управление. М.:Наука, 2002. 303 стр.
5. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра. // *Известия РАН, Техническая кибернетика*, 1993, №6, С. 200–208.
6. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте. *Автомат. и телемех.*, 2016. № 1. С. 5–29.
7. ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. *Optimal Filtering*. // New Jersey: Prentice Hall, 1979.
8. BARBOSA KARINA A., DE SOUZA C.E., TROFINO ALEXANDRE. Robust  $\mathcal{H}_2$ -Filter Design Via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. // *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 2002. P.371–376.
9. BERNSTEIN D.S., HADDAD W.H. Steady-state Kalman filtering with an  $\mathcal{H}_\infty$ -error bound. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 12, pp. 9–16, 1989.
10. CHEN T., FRANCIS B. Design of multirate filter banks by  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43,

- pp. 2822–2830, Dec. 1995.
11. DE SOUZA C.E., SHAKED U., FU M. Robust  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, pp. 709–719, Mar. 1995.
  12. DE SOUZA C.E., XIE L. Robust  $\mathcal{H}_2$ -filtering, Control and Dynamic Systems. Academic Press, Vol.65, pp.323–377, 1994.
  13. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems. // INT.J.CONTROL, 2001. Vol.74, No.1. pp. 28–42.
  14. DOMBROVSKII V.V., LYASHENKO E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. // Aut. and Rem. Control, 2003, vol. 64, is. 10. pp. 1558–1570.
  15. FREILING G., IONESCU V. Monotonicity and convexity properties of matrix Riccati equations. IMA Journal of Mathematical Control and Information. March 2001.
  16. FREILING G., IONESCU V. Time-varying discrete Riccati equation: some monotonicity results. Linear Algebra and its Applications 286(1999). pp.135–148.
  17. GERSHON E., SHAKED U. Robust Norm-bounded  $\mathcal{H}_\infty$ -Control and Estimation of retarded State-multiplicative Discrete-time Systems. 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2016.
  18. GERSHON E., SHAKED U., YAESH I.  $\mathcal{H}_\infty$ -control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise. // Automatica 37, 2001. pp. 409–417.
  19. GRIMBLE M.J., SAYED A.E. Solution of the  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal linear filtering problem for discrete-time systems. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 38, pp. 1092–1104, July 1990.
  20. HE YONG, WANG QING-GUO, ZHENG WEI-XING

- Global robust stability for delayed neural networks with polytopic type uncertainties. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 26, Issue 5, 2005, pp. 1349-1354.
21. KALMAN R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *ASME Transactions*, vol. 82, part D (Journal of Basic Engineering), 1960. pp. 35–45.
22. KARUSH W. Minima of Functions of Several Variables With Inequalities As Side Conditions. 1939.
23. KHARGONEKAR P.P., PETERSEN I.R., ZHOU K. Robust stabilization and  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control. 1987.
24. KHLEBNIKOV M.V., SHCHERBAKOV P.S. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalization. // *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 11, pp. 1932–1945.
25. LOFBERG J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab. // *Proc. CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
26. MAXIMOV E.A., KURDYUKOV A.P., VLADIMIROV I.G. Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System.// *Proc. 18th IFAC World Congr.*, Milano, 2011. pp. 4701–4706.
27. PAKSHIN P.V. State estimation and control design for digital linear systems with multiplicative noises.// *Aut. and Rem. Control*, 1978. vol. 39, is. 4. pp. 526–636.
28. PETERSEN I.R. A stabilization algorithm for a class of uncertain systems. *Syst. Control Lett.*, 1987, vol. 8, pp. 351–357.
29. PETERSEN I.R., MCFARLANE D.C. Robust state estimation for uncertain systems. in *Proc. 30th IEEE Conference Decision and Control*, Brighton, UK, 1991, pp. 2630-2631.
30. POLYAK B.T., KHLEBNIKOV M.V. , SHCHERBAKOV P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty. // *Automation and Remote Control*. vol. 82.

- pp. 1-40.
31. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P. Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  optimization. // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, 1994. Vol. 3. pp. 2249–2250.
32. TCHAIKOVSKY M.M. Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases. // Proc. 2012 American Control Conf., Montreal, Canada, June 27–29, 2012.
33. TODOROV E. Stochastic optimal control and estimation methods adapted to the noise characteristics of the sensorimotor system. // Neural Comput. 17, 2005. pp. 1084–1108.
34. TODOROV E., LI WEIWEI Optimal control methods suitable for biomechanical systems. // Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Biology and Medicine Society, Mexico, 2003, pp. 1758–1761.
35. VLADIMIROV I.G., DIAMOND P. Robust Filtering in Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems by Minimum Anisotropic Norm Criterion. CADSMAP Res. Report 01-05. 2001 [completed in 2001].
36. VLADIMIROV I.G., DIAMOND P., KLOEDEN P. Anisotropy-based robust performance of finite horizon linear discrete time varying systems. 2001.
37. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 179–184.
38. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 427–432.
39. VLADIMIROV I.G., PETERSEN I.R. State Distributions and Minimum Relative Entropy Noise Sequences in

- Uncertain Stochastic Systems: The Discrete-Time Case. SIAM Journal on Control and Optimization. 53. pp. 1107–1153.
40. VLASSIS NIKOS, JUNGERS RAPHAEL Polytopic uncertainty for linear systems: New and old complexity results. Systems & Control Letters, vol. 67, 2014, pp. 9-13.
41. ZHOU K., KHARGONEKAR P.P. An algebraic Riccati equation approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization. Syst. Contr. Lett., vol. 11, pp. 85-92, 1988.

## ANISOTROPY-BASED ANALYSIS OF LINEAR DISCRETE TIME VARYING SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISES

Ivan R. Belov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
postgraduate(ivanb1993@mail.ru).

**Abstract:** In the 90s of the last century the anisotropy-based control theory was introduced. Its techniques are used in control and filtration problems for linear systems with nonrandom matrices and input random disturbances with unknown statistic characteristics. The concept of anisotropy of random vector as measure of deviation of the vector probabilities distribution law from standard Gauss distribution was introduced in the theory. The paper demonstrates the solutions of anisotropy-based analysis problems for the linear discrete systems with multiplicative noises. The problems of anisotropic norm calculation and formulation of anisotropic norm boundness conditions are considered for such systems on the finite horizon. The anisotropic norm boundness conditions are presented in two forms: the Riccati difference equations and the Riccati inequality. The obtained anisotropy-based analysis results allow to solve control and filtration problems for multiplicative noise systems.

**Keywords:** linear discrete time varying systems, random disturbances, multiplicative noises, norm, anisotropy, Riccati difference equation, Riccati inequality.

УДК 681.518.22; 681.514; 681.516.75  
ББК 32.965.4; 32.965.6

Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...  
Дата опубликования ...