МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ В ПОРЯДКОВЫХ ШКАЛАХ С УЧЁТОМ ИХ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Корнеенко В.П.[1]
(ФГБУН *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В. П. Корнеенко
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: vkorn@ipu.ru

При решении многокритериальных задач оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой для корректного применения аддитивного интегрального механизма агрегирования возникает проблема преобразования исходных оценок объектов в порядковых шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности в точечные оценки результирующей шкалы разности. Суть метода перехода от исходных оценок объектов в концевых вершинах иерархического дерева в порядковых шкалах с учётом экспертной вероятности к точечным оценкам в результирующей количественной шкале разности вначале сводится к переходу от исходных точечных оценок в балльной шкале к интервальным градациям промежуточной количественной шкалы. Затем с учётом субъективной вероятности осуществляется переход к точечной оценке результирующей шкалы разности. В статье доказано, что предлагаемый подход обеспечивает сохранение упорядочения объектов в исходных и результирующих шкалах. Идея метода показана на примере решения задачи многокритериальной оценки ценности информационно-аналитических материалов, исходные оценки которых представлены в балльных градациях и соответствующих им субъективной (экспертной) вероятности.

Ключевые слова: шкала измерения, экспертная вероятность, точечная результирующая шкала

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@mail.ru).

1. Введение

При решении прикладных задач многокритериального оценивания и выбора объектов в условиях неопределённостей, к которым можно отнести риски инвестиционных проектов, качество объектов научно-технических экспертиз, ценность информационно-аналитических материалов и др., не всегда возможно исходные оценки представить в виде точечных значениях. Например, инвестиционный риск проекта «можно выразить количественно одним единственным способом: задав интервалы значений неопределенностям, связанным с затратами и выгодами от решения» [1, с. 75].

Существуют различные методы учёта неопределённости в математических моделях объектов [2–5]. Одним из способов является представление оценок объектов в виде различных функций принадлежности к области значений показателя [2], при построении которых возникает ряд трудностей.

В случае неопределённости для возможных количественных значений показателей объектов в [3] предлагается экспертно задавать функцию доверия в рамках теории Демпстера – Шафера. Однако эксперту проще оценки объектов представлять в порядковой шкале с некоторой степенью уверенности (субъективной вероятности) [4].

Одним из подходов оценивания объектов – информационно-аналитических материалов стратегической разведки США в порядковой пяти балльной шкале с учётом степени достоверности (экспертной вероятности) было предложено в работе [5] в виде схем Кента, как показано на рисунке 1 при иллюстрации степени достоверности информации.

Однако при решении многокритериальных задач оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой критериев, представленных в виде иерархических деревьев, возникает проблема преобразования исходных оценок по критериям в единую результирующую шкалу в виде точечных значений.

Рис. 1. Схема Кента, иллюстрирующая степень достоверности информации

Источник: составлено по [5, с. 249]

Одним из подходов перехода к точечным значениям для объектов $a_l \in A = \{a_l | l = \overline{1, n_A}\}$, например, при оценке риска с поправкой на вероятность его наступления, сводится к формуле:

(1) $R_l = U_l \times P_l$,

где R_l – величина риска; U_l – последствия (ущерб) риска; P_l – вероятность риска; l – номер объекта.

Такой подход перехода к точечным значениям (1) не обеспечивает исходное упорядочение между объектами после учёта субъективной вероятности. Пусть, например, между объектами $a_l, a_q \in A$ в пяти балльной шкале существует доминирование в виде:

(2) $a_l \succ a_q \Leftrightarrow 5 > 4$.

С учётом субъективных вероятностей в 100-балльной шкале $P_l = 60$ и $P_q = 80$ от упорядочения (2) приходим к следующему упорядочению объектов:

$$a_l \prec a_q \Leftrightarrow 300 < 320.$$

Отсюда к построению результирующей шкалы для объектов в порядковых шкалах с учётом их экспертной вероятности вытекает требование – сохранения ранжирования между объектами в исходных и результирующих шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности.

Рассмотрим предлагаемый метод при решении задачи оценивания по обобщённому критерию ценности информационно-аналитических (научных) материалов с иерархической структурой критериев в интересах организаций, занимающихся сбором информации и оценивающей её для принятия управленческих решений.

2. Задача формирования обобщённых оценок объектов с многоуровневой структурой критериев

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА КРИТЕРИЕВ

Задача многокритериальной оценки качества объектов (информационно-аналитических материалов) в организационных системах управления с многоуровневой структурой показателей относится к классу задач агрегирования, оценки объектов которых в исходных шкалах измерения [6] преобразованны в шкальные значения результирующей шкалы.

Для организационных систем управления понятие цели является многоуровневым – задаётся деревом целей, достижение которых обеспечивается иерархической организацией подсистем в систему. При этом предполагается, что достижение целей подсистем более низких уровней иерархии обеспечивает достижение глобальных целей всей системы. В результате оценка качества системы состоит из оценок качества её подсистем, т.е. и сам процесс оценивания и результат будут задаваться многоуровневыми структурами.

Одной из проблем для объектов с иерархической структурой показателей в виде дерева является выбор способа перечисления вершин. Для деревьев в основном применяются два способа перечисления – «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине, и «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо.

Способом перечисления «по ветвям» дерево задаётся в виде множества упорядоченных вершин [7, с. 584–587]:

(3) $ID = \{\mathfrak{F}, \mathcal{D}\}$,

где $\mathfrak{F} = \{F_0, F_{j_1}, \dots, F_{j_1 \dots j_k} \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество вершин (критериев), в которых индекс $j_1 \dots j_k$ вершины $F_{j_1 \dots j_k}$ указывает путь к этой вершине от корневой вершины F_0 (k = 0);

$\mathcal{D} = \{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество дуг, в которых множество вершин $\{F_{j_1 \dots j_k}\}$, упорядоченных по убыванию важности, инцидентно вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$;

F_0 – глобальный (обобщённый) критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии;

F_{j_1} – групповые критерии 1-го уровня иерархии, являющиеся концевыми вершинами множества дуг $\{(F_0, F_{j_1}) \big| j_1 = \overline{1, n_0}\}$ n_0 – число дуг инцидентных вершине F_0;

$F_{j_1 \dots j_k}$ – групповые критерии k-го уровня, являющиеся концевыми вершинами дуг $\{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \big| j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}\}$;

$n_{j_1 \dots j_{k-1}}$– число дуг инцидентных вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$.

Концевые вершины n-го нижнего уровня условимся обозначать строчными буквами –$f_{j_1 \dots j_n}$.

2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ОБЪЕКТОВ

Пусть $A = \{a_l : l = \overline{1, n_A}\}$ – множество объектов (информационно-аналитических материалов). Постановку задачи сравнения объектов по обобщённым оценкам с учётом многоуровневой структуры в виде иерархического дерева ID (3) критериев представим в виде нахождения упорядочения $a_{l_1} \succcurlyeq a_{l_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{l_{n_A}}$:

$$F_0(F_{j_1}(F_{j_1 j_2} \dots (F_{j_1 \dots j_{n-1}}(f_{j_1 \dots j_n}(A))))) \rightarrow \max_{a_{l_1} \succcurlyeq a_{l_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{l_{n_A}}},$$

где max – направление упорядочения (ранжирования) объектов по убывающим значениям ценности.

При решения задач многокритериального оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой показателей в качестве методов агрегирования часто применяется аддитивная свёртка критериев с глобальными весами критериев [7–9]:

(4) $F_0(A) = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 j_2 \dots j_n}} wg(f_{j_1 j_2 \dots j_n}) \cdot y_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(l)}$,

где $y^{(l)}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ – точечная оценка $a_l \in A$ объекта в концевой вершине $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ дерева в результирующей шкале измерения;

$y^{(l)}_{\Sigma} = F_0(A)$ – обобщённая оценка объекта $a_l \in A$ по глобальному критерию верхнего (нулевого) уровня иерархии;

$w\mathrm{g}_{j_1 j_2 \dots j_n} = w\mathrm{g}(f_{j_1 j_2 \dots j_n})$ – глобальный количественный (нормированный) вес концевого $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ критерия, который находится перемножением локальных весов по ветвям дерева от корневого F_0 критерия к концевому $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$.

При этом возникает вопрос при каких условиях аддитивная свёртка корректна? Для корректного применения аддитивной свёртки необходимо, чтобы оценки объектов по концевым критериям иерархического дерева, измеренных в разнотипных шкалах, были преобразованы в результирующие однородные шкалы.

В [10] приведено определение однородности для непрерывных критериев по признаку совпадения максимальных и минимальных значений (соответственно и совпадения размахов). Однако этого условия недостаточно, если речь идёт о порядковых шкалах.

Поэтому расширенное понятие однородной шкалы оценок объектов по критериям, представленным в однотипной шкале измерения по отношению к частным критериям должно включать одинаковое число градаций (шкальных значений оценок объектов) и учитывать приращение между градациями.

3. Метод построения результирующей шкалы для объектов в порядковой шкале с учётом субъективной вероятности эксперта

3.1. МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ

Введём обозначения:

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_j, \dots, f_m\}$ – множество критериев (концевых вершин дерева), m – число критериев;

$\mathcal{R} = [1, \dots, r, \dots, n]$ – n-балльная порядковая шкала области определения оценок объектов.

$\mathcal{P} = [0,1, \dots, 100]$ – расширенная 100-балльная порядковая шкала области определения экспертной (субъективной) вероятности (к 100-балльной шкале добавляется нулевой балл).

На практике субъективную вероятность можно рассматривать и в количественной шкале на отрезке $[0, 1]$. Исходные экспертные оценки с учётом степени уверенности экспертов представим в виде кортежа:

(5) $\langle r_j^{(l)}, p_{jr}^{(l)} \rangle$,

где $r_j^{(l)} = f_j(a_l) - r$-й балл $a_l \in A$ объекта по f_j критерию;

$p_{jr}^{(l)} = P(r_j^{(l)})$ – субъективная вероятность того, что $a_l \in A$ объект оценён экспертом в r баллов по f_j критерию.

Чтобы при построении обобщённых оценок объектов критерии отвечали требованию однородности, т.е. имели общую шкалу, каждая градация которой отражает одинаковый уровень предпочтений для каждого объекта, необходимо от экспертных оценок с учётом степени уверенности экспертов $p_{jr}^{(l)}$ перейти к результирующей количественной шкале разности. Это связано с тем, что объекты в порядковой шкале могут быть сравнимы только в шкале разности, т. е. объект a_l предпочтительнее объекта a_q на $\Delta r = r_j^{(l)} - r_j^{(q)}$ баллов, если $r_j^{(l)} > r_j^{(q)}$.

Преобразование

$$\mathcal{A}: \langle r_j^{(l)}, p_{jr}^{(l)} \rangle \to y_{jr}^{(l)}$$

исходных оценок в виде кортежа (5) к точечным оценкам $y_{jr}^{(l)}$ с учётом экспертной вероятности $p_{jr}^{(l)} \in \mathcal{P}$ в результирующей количественной шкале разности формально представим в виде сложного отображения $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: r_j^{(l)} \to Y_{jr}^{(l)} \Rightarrow \mathcal{B}: Y_{jr}^{(l)} \times p_{jr}^{(l)} \to y_{jr}^{(l)},$$

где $\mathcal{C}$ – точечно-множественное отображение исходной оценки $r_j^{(l)} \in \mathcal{R}$ в порядковой шкале в градацию $Y_{jr}^{(l)}$ в виде отрезка промежуточной шкалы $S = \{Y_r = [y_{r-1}, y_r] | r = \overline{1, n}\}$;

$\mathcal{B}$ – отображение декартового произведения $Y_{jr}^{(l)} \times p_{jr}^{(l)}$ промежуточной шкалы и субъективной вероятности в точечную оценку $y_{jr}^{(l)} \in Y_r \subset Y$ результирующей количественной шкалы разности с областью значений $Y = [y_{\min}, y_{\max}]$;

$y_{\min}$ (y_{max}) – минимальное (максимальное) значение шкалы.

3.2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ ОБЪЕКТОВ В ПОРЯДКОВОЙ ШКАЛЕ С УЧЁТОМ СУБЪЕКТИВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ЭКСПЕРТА

Пусть исходные оценки объектов с учётом степени уверенности экспертов представлены в виде кортежа (5), где $r \in \mathcal{R}$, $p_{jr}^{(l)} \in P_j$, $f_j \in \mathcal{F}$, $j = \overline{1,m}$.

Алгоритм метода сводится к следующим шагам.

Шаг 1. *Переход от исходных градаций порядковой (балльной) шкалы к интервальным шкальным градациям промежуточной (количественной) шкале.* Вначале количественная промежуточная шкала разбивается на n отрезков совокупностью точек

(6) $y_0 < y_1 < \cdots < y_r < \cdots < y_n$,

где $y_0 = y_{\min}$, $y_n = y_{\max}$, $r = \overline{1,n}$.

Соответствие между балльными градациями $r \in \mathcal{R}$ и интервальными шкальными значениями $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, $r = \overline{1,n}$, промежуточной шкалы $S = \{Y_r | r = \overline{1,\ n}\}$ задаётся отображением:

(7) $\mathcal{i}: r \rightarrow Y_r = [y_{r-1}, y_r], \forall\ r = \overline{1,n}$.

В случае равномерного разбиения с шагом $h = \frac{\Delta S}{n} = \frac{y_n - y_0}{n}$ отображение (7) можно представить в виде точечно-множественного отображения:

$$\mathcal{i}: r \rightarrow [y_0 + (r-1)h, y_0 + rh],$$

где $y_{r-1} = y_0 + (r-1)h$, $y_r = y_0 + rh$; $h = y_r - y_{r-1}, \forall\ r = \overline{1,n}$.

Шаг 2. *Переход от оценок объектов в интервальных градациях* Y_r *промежуточной шкалы к точечным* $y_{jr}^{(l)}$ *в результирующей количественной шкале разности с учётом экспертной вероятности и принимающих значения на отрезках* $[y_{r-1}, y_r]$

разбиения (6). Будем предполагать, что субъективная вероятность $p_{jr}^{(l)}$ численно совпадает с вероятностью того, что непрерывная случайная величина *Y* примет значение меньшее, чем значение точечной оценки $y_{jr}^{(l)}$ из полуинтервала $[y_{r-1}, y_{jr}^{(l)}) \subset Y_r$:

$$p_{jr}^{(l)} = P(y_{r-1} \le Y < y_{jr}^{(l)}).$$

Зная плотность распределения $\varphi(y)$ случайной величиной *Y*, точечную оценку $y_{jr}^{(l)}$ можно рассматривать как переменную функции в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$(8) \quad p_{jr}^{(l)}(y_{jr}^{(l)}) = \int_{y_{r-1}}^{y_{jr}^{(l)}} \varphi(y)dy.$$

Пусть, например, функция распределения $F(y) = P(Y < y)$ случайной величины *Y* линейна на отрезках разбиения (6) (см. рис. 2):

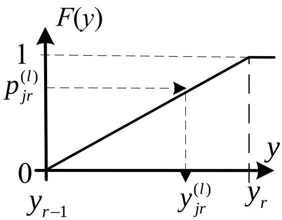


Рис. 2. График равномерного распределения

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le y_{r-1}; \\ \dfrac{y - y_{r-1}}{y_r - y_{r-1}}, & y_{r-1} < y \le y_r; \\ 1, & y > y_r. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения на отрезке разбиения

$$Y_r = [y_{r-1}, y_r]$$

постоянна, т.е.

$$(9) \quad \varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_r - y_{r-1}}, & y_{r-1} < y \le y_r; \\ 0, y \notin [y_{r-1}, y_r], \end{cases}$$

то, подставив $\varphi(y)$ (8) в $p_j^r(y_{jr}^{(l)})$ (8), получим:

$$p_{jr}^{(l)}(y_{jr}^{(l)}) = \frac{1}{y_r - y_{r-1}} (y_j^r - y_{r-1}),$$

откуда значение точечной оценки $y_{jr}^{(l)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле:

(10) $y_{jr}^{(l)} = y_{r-1} + (y_r - y_{r-1}) \times p_{jr}^{(l)} \; \forall \, p_{jr}^{(l)} \in [0,1], \; r = \overline{1,n}.$

Если субъективная вероятность принимает значения в расширенной 100-балльной шкале, то точечные оценки на сегменте $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ с учётом степени уверенности экспертов вычисляются по формулам:

(11) $y_{jr}^{(l)} = y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(l)}.$

Данный метод обладает следующими свойствами, которые обоснуем для равномерного распределения с плотностью $\varphi(y)$ (9) в виде теоремы.

Теорема 1 (о сохранении упорядочения объектов в исходных и результирующих шкалах). *Пусть переход от исходных балльных оценок* $r_j^{(l)}$ *объектов с учётом экспертной вероятности* $p_{jr}^{(l)}$ *к точечным оценкам* $y_{jr}^{(l)}$ *в результирующей шкале выполнен в соответствии с линейным отображением* (10).

Тогда в исходной и результирующей шкале сохраняется упорядочение объектов, т. е. для любых $a_l, a_q \in A$ *объектов из соотношения с прямым порядком предпочтения объектов*:

(12) $a_l \succ a_q \Leftrightarrow r_j^{(l)} > b_j^{(q)}, \; \forall \, r, b \in \mathcal{R}$

следует соотношение

(13) $y_{jr}^{(l)} > y_{jb}^{(q)} \Leftrightarrow a_l \succ a_q,$

а для равноважных объектов в порядковой исходной шкале объекты в результирующей шкале упорядочиваются в соответствии с величинами экспертной вероятности, т. е. для любых $a_l, a_q \in A$ *объектов из соотношения*

(14) $a_l \approx a_q \Leftrightarrow z_j^{(l)} = z_j^{(q)} = \mathrm{z}$ и $p_{jz}^{(l)} > p_{jz}^{(q)}$

следует соотношение в результирующей шкале:

(15) $y_{jz}^{(l)} > y_{jz}^{(q)} \Rightarrow a_l \succ a_q.$

Доказательство. Пусть справедливо соотношение (12), где $r_j^{(l)} = r \in \mathcal{R}$, $b_j^{(q)} = b \in \mathcal{R}$ и $r > b$, то тогда для точек разбиения (6) справедливо неравенство $y_r > y_b$. Поскольку $y_{jb}^{(q)} \in [y_{b-1}, y_b]$, $y_{jr}^{(l)} \in [y_{r-1}, y_r]$, то отсюда следует (13): $y_{jr}^{(l)} > y_{jb}^{(q)} \Leftrightarrow a_l \succ a_q$.

Из (14) следует, что если оценкам $z_j^{(l)}$, $z_j^{(q)}$ объектов a_l, a_q в порядковой шкале соответствует интервальная $Y_z = [y_{z-1}, y_z]$ градация, то точечные оценки будут принимать значения из отрезка $Y_z = [y_{z-1}, y_z]$, т.е. $y_{jz}^{(l)}, y_{jz}^{(q)} \in Y_z = [y_{z-1}, y_z]$.

Поскольку справедливо неравенство $p_{jz}^{(l)} > p_{jz}^{(q)}$, то справедливо (15), т. е. $y_{jz}^{(l)} > y_{jz}^{(q)} \Rightarrow a_l \succ a_q$. Теорема 1 доказана. ■

4. Связь между интервальными и точечными оценками объектов

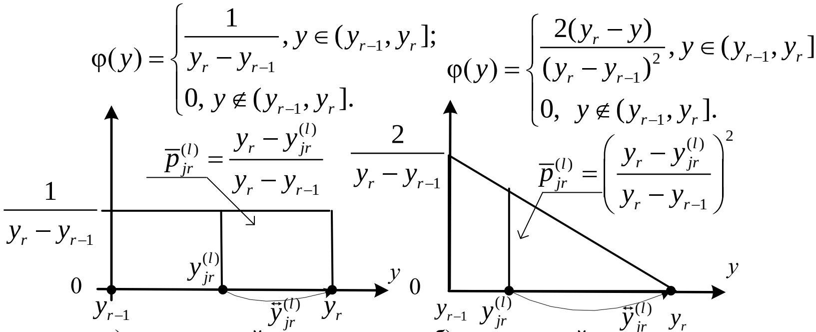
Исходя из того, что при стремлении экспертной вероятности к значению 100 (%) точечная оценка $y_{jr}^{(l)}$ стремится к правой крайней точке шкального интервала $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ и при экспертной вероятности равной 100 (%) она совпадёт с правым концом y_r, т.е.

$$y_{jr}^{(l)} = y_r.$$

В этом случае наряду с точечной оценкой $y_{jr}^{(l)}$ введём в рассмотрение интервальную оценку $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)}$ объекта a_l по критерию f_j, за которую примем сегмент $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)} = [y_{jr}^{(l)}, y_r]$ отрезка Y_r результирующей шкалы. Данной интервальной оценке можно поставить в соответствие вероятность неуверенности эксперта:

$$\bar{p}_{jr}^{(l)} = 1 - p_{jr}^{(l)} = \int_{y_{jr}^{(l)}}^{y_r} \varphi(y)dy.$$

На рисунке 3 показано соответствие между точечными и интервальными оценками при различных плотностях распределения степени уверенности эксперта (субъективной вероятности): $y_{jr}^{(l)} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)} = \left[y_{jr}^{(l)}, y_r\right]$.



а) равномерный закон распределение б) треугольный закон распределения

Рис. 3. Соответствие между точечными и интервальными оценками

Таким образом, с увеличением степени уверенности эксперта крайняя точка $y_{jr}^{(l)}$ интервальной оценки $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)} = [y_{jr}^{(l)}, y_r]$ будет приближаться к правой крайней точке y_r интервала разбиения $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, что соответствует уменьшению длины $\Delta\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)} = y_r - y_{jr}^{(l)}$ интервальной оценки $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(l)}$.

5. Пример решения задачи многокритериального оценивания материалов

5.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходные оценки в 5-балльной шкале для 7-ми информационно-аналитических материалов (ИАМ) по 5-ти критериям, с учётом степени уверенности экспертов представим в таблице 1.

В качестве концевых критериев представлены:

f_1 – актуальность информационных материалов;

f_2 – достоверность информационных материалов;

f_3 – структурность информационных материалов;

f_4 – полнота (содержательность) информационных материалов;

f_5 – наглядность информационных материалов.

Таблица 1. Оценки объектов в 5-ти балльной шкале с экспертной вероятностью в 100-балльной шкале

A	Критерии				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
a_1	$\langle 3, 60\rangle$	$\langle 2, 35\rangle$	$\langle 5, 85\rangle$	$\langle 4, 45\rangle$	$\langle 1, 35\rangle$
a_2	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 3,50\rangle$	$\langle 2, 70\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 4, 50\rangle$
a_3	$\langle 5,45\rangle$	$\langle 2,45\rangle$	$\langle 3, 40\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 5,80\rangle$
a_4	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 3, 90\rangle$	$\langle 3, 90\rangle$
a_5	$\langle 2, 50\rangle$	$\langle 3, 50\rangle$	$\langle 2, 50\rangle$	$\langle 3, 70\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$
a_6	$\langle 4, 75\rangle$	$\langle 4, 65\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 4, 65\rangle$	$\langle 4, 75\rangle$
a_7	$\langle 1, 60\rangle$	$\langle 2, 40\rangle$	$\langle 3, 55\rangle$	$\langle 3, 60\rangle$	$\langle 3, 80\rangle$

5.2. ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ

Для деревьев в основном применяются два способа перечисления – «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине, и «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо. В качества примера, многоуровневая структура критериев информационно-аналитических материалов представлена на рисунке 4 в виде трёхуровневого иерархического дерева способом перечисления «по ветвям».

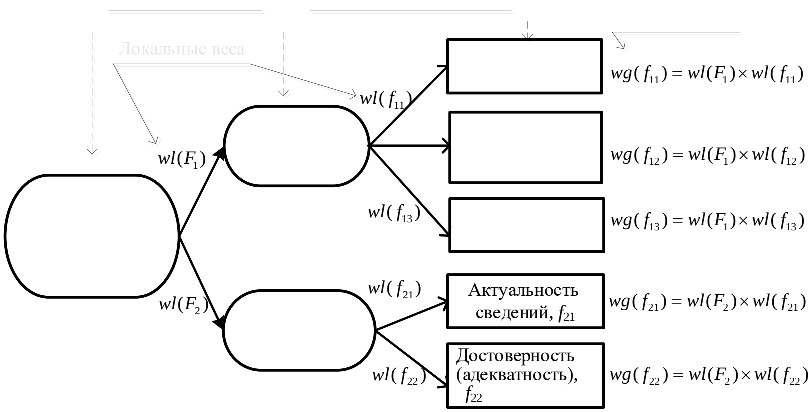


Рис. 4. Иерархическое дерево критериев ценности материалов

Для представленного на рисунке дерева приняты следующие обозначения:

F_0 – обобщённый критерий ценности материалов;

F_1 – группа показателей полезности материалов, характеризующих актуальность сведений – f_{11}, достоверность (адекватность) – f_{12};

F_2 – группа критериев построения формы материалов, характеризующих структурность материала – f_{21}, полноту (уровень раскрытия темы) – f_{22}, наглядность материала – f_{23}.

5.3. ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Для вычисления локальных весов (коэффициенты) критериев иерархического дерева обычно используются экспертные методы оценки и ранжирования объектов. Прямые методы экспертного оценивания весов критериев нашли применение в методике планирования посредством относительных показателей технической оценки (ПАТТЕРН), в которой экспертам предлагается оценить в количественной шкале нормированные локальные веса критериев на каждом уровне иерархии, а затем глобальные веса находятся перемножением локальных весов по ветвям многоуровневого дерева критериев [8].

Другим экспертным подходом на основе матрицы парных сравнений к назначению «весов» конечному набору сравниваемых объектов является оптимизационный метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора [11], который по эффективности превосходит метод анализа иерархий (the Analytic Hierarchy Process, AHP – сокращенно МАИ) Т. Саати [12].

Пусть экспертными методами сформированы следующие количественные локальные веса критериев, а именно:

а) локальные веса групповых критериев:

F_0: $wl(F_1) = 0{,}6$, $wl(F_2) = 0{,}4$;

б) локальные веса концевых критериев:

F_1: $wl(f_{11}) = 0{,}5$, $wl(f_{12}) = 0{,}5$. F_1: $wl(f_{21}) = 0{,}5$, $wl(f_{22}) = 0{,}3$; $wl(f_{23}) = 0{,}2$;

Глобальные веса концевых критериев находим произведением локальных «весов» вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине: $wg(f_{11}) = 0{,}30$, $wg(f_{12}) = 0{,}30$, $wg(f_{13}) = 0{,}20$, $wg(f_{21}) = 0{,}12$, $wg(f_{22}) = 0{,}08$.

Легко убедиться, что сумма глобальных весов равна единице.

5.4. ПЕРЕХОД ОТ БАЛЛЬНЫХ ГРАДАЦИЙ К ИНТЕРВАЛЬНЫМ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ШКАЛЫ

В качестве промежуточной шкалы рассмотрим количественную шкалу:

$$S = \langle y_{\min},\ y_{\max}; n; \leq \rangle,$$

где $y_{\min} = 0,\ y_{\max} = 100; n = 5$ – количество интервальных градаций.

Количественная шкала разбивается на 5 градаций в виде отрезков $Y_r = [y_{r-1}, y_r], r = 1 \div 5$, точками с равномерным шагом дискретизации $h = \frac{100-0}{5} = 20$. Правило перехода к градациям промежуточной шкалы можно представить в виде:

$$i: r \rightarrow [20 \times (r-1), 20 \times r],\ \ , r = 1,\ 2,\ 3, 4, 5.$$

В результате имеем соответствие между балльными и интервальными градациями шкал: $1 \leftrightarrow Y_1 = [0, 20]$; $2 \leftrightarrow Y_1 = [20, 40]$; $3 \leftrightarrow Y_1 = [40, 60]$; $4 \leftrightarrow Y_1 = [60, 80]$; $5 \leftrightarrow Y_1 = [80, 100]$.

Соответствия между градациями порядковых шкал критериев с прямым порядком предпочтения для шкальных интервальных градаций промежуточной шкалы представлено в таблице 2.

Таблица 2. Соответствия между градациями шкал

Балльная шкала	Вербальная шкала	Промежуточная шкала [0, 100], $h = 20$	Промежуточная шкала [0, 10], $h = 2$
1 балл	Очень низкая	[0, 20]	[0, 2]
2 балла	Низкая	[20, 40]	[2, 4]
3 балла	Средняя	[40, 60]	[4, 6]
4 балла	Хорошая	[60, 80]	[6, 8]
5 баллов	Высокая	[80, 100]	[8, 10]

5.5. ПЕРЕХОД К ТОЧЕЧНЫМ ОЦЕНКАМ С УЧЁТОМ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Значение точечной оценки $y_{jr}^{(l)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле (11):

$$y_{jr}^{(l)} = y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(l)} = y_{r-1} + \frac{20}{100} \times p_{jr}^{(l)}, r = 1 \div 5,$$

где $y_0 = 0,\ y_1 = 20,\ y_3 = 40,\ y_4 = 60,\ ,\ y_4 = 80,\ y_5 = 100.$

Точечные оценки представлены в таблице 3.

Таблица 3. Оценки объектов в 5-баллной и результирующей количественной шкале

A	f_1		f_2		f_3		f_4		f_5	
	$r_1^{(l)}$	$y_{1r}^{(l)}$	$r_2^{(l)}$	$y_{2r}^{(l)}$	$r_3^{(l)}$	$y_{3r}^{(l)}$	$r_4^{(l)}$	$y_{4r}^{(l)}$	$r_5^{(l)}$	$y_{5r}^{(l)}$
a_1	3	52	2	27	5	97	4	69	1	7
a_2	4	74	3	50	2	34	4	74	2	70
a_3	5	89	2	29	3	48	4	74	5	96
a_4	4	78	4	78	4	78	3	58	3	58
a_5	2	30	3	50	2	30	3	54	4	74
a_6	4	75	4	73	4	74	4	73	4	75
a_7	1	12	2	28	3	51	3	52	3	56

Легко видеть, что если эксперт оценивает объекты с большим значением вероятности, то точечная оценка смещается к правому концу соответствующего отрезка $Y_r = [20(r-1), 20r]$, а если меньшим значением вероятности, то точечная оценка смещается к левому концу соответствующего отрезка.

Кроме того в соответствии с теоремой 1, например для критерия $f_1 \equiv f_{11}$ актуальность сведений, имеем упорядочения:

а) без учёта экспертной вероятности в 5-балльной шкале:

$$a_3 \succ \{a_2 \approx a_4 \approx a_6\} \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7;$$

б) с учётом экспертной вероятности в результирующей шкале:

$$a_3 \succ a_4 \succ a_6 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7.$$

В этом случае для равноважных объектов a_2, a_4, a_6 с оценкой в 4-е балла с учётом экспертной вероятности имеем упорядочение:

$$a_4 \succ a_6 \succ a_2 \Leftrightarrow 90 > 75 > 70.$$

На рисунке 5 показан переход к точечной оценке с учётом степени уверенности эксперта по f_1 критерию от исходных экспертных оценок в порядковой 5- балльной шкале.

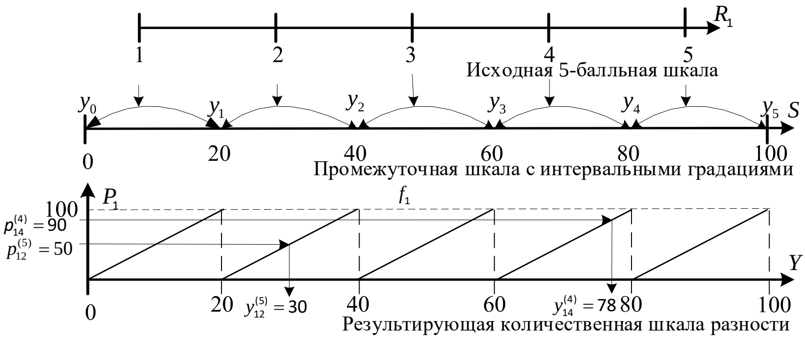


Рис. 5. Переход к точечной оценке с учётом уверенности экспертов

5.6. ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ

Обобщённые оценки определим по данным таблицы 3 по концевым критериям с учётом нормированных весов важности по аддитивной свёртке критериев (4). В таблице 4 результаты вычислений представлены в столбцах 8-9 ($y_j^{(l)} \equiv y_{jr}^{(l)}$).

Таблица 4. Результаты вычислений относительно эталонных объектов $a_{\min}, a_{\max}$

$\boldsymbol{a_l}$	Оценки объектов в результирующей шкале разности						Обобщённые оценки	
	$y_1^{(l)}$	$y_2^{(l)}$	$y_3^{(l)}$	$y_4^{(l)}$	$y_5^{(l)}$	Σ	$y_\Sigma^{(l)} \in [25, 86]$	$y_\Sigma^{(l)} \in [1, 100]$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{a_1}$	52	27	97	69	7	252	52	42
$\boldsymbol{a_2}$	74	50	34	74	70	302	58	57
$\boldsymbol{a_3}$	89	29	48	74	96	336	62	67

a_4	78	78	78	58	58	350	74	74
a_5	30	50	30	54	74	238	42	35
a_6	75	73	74	73	75	370	74	80
a_7	12	28	51	52	56	199	33	22
$a_{\min}$	12	27	30	52	7	128	25	1
$a_{\max}$	89	78	97	74	96	434	86	100

В столбце 9 обобщённые оценки объектов преобразованы в 100-балльную шкалу относительно эталонных объектов. Сравнение объектов наглядно представлено на рис. 6.

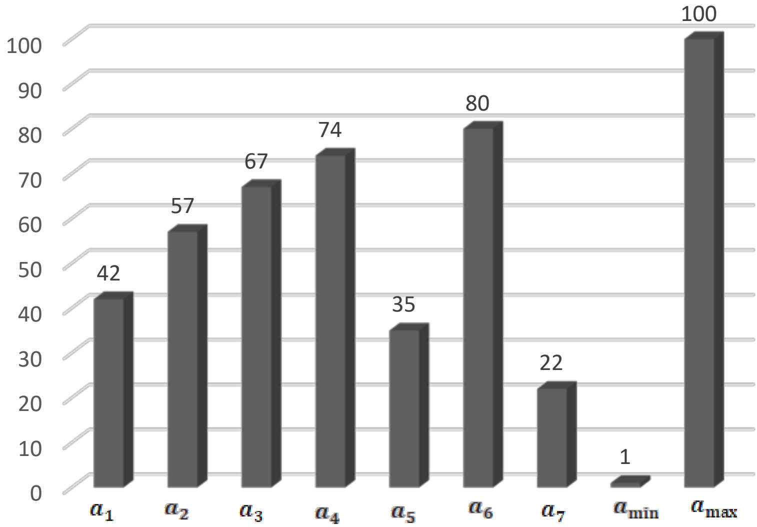


Рис. 6. Сравнение объектов в результирующей шкале

Ранжирование объектов по обобщённым оценкам можно представить в виде: $a_6 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7$.

Заключение

Рассмотренный метод построения результирующей шкалы для объектов, измеренных в градациях порядковой шкалы с учётом экспертной вероятности, как показано на примере решения задачи оценки ценности информационных материалов, позволяет решать ряд прикладных задач, в которых возникает необходимость преобразования исходных оценок, представленных в виде кортежа (5), в точечные оценки результирующей шкалы.

Таким образом, в данной работе решена проблема как от исходных оценок в порядковой шкале с учётом экспертной вероятности перейти к количественной шкале разности не нарушая при при этом упорядочение объектов в исходной шкале.

Литература

1. ХАББАРД Д.У. *Как измерить всё, что угодно. Оценка стоимости нематериального в бизнесе*. – М. : ЗАО «Олимп – бизнес», 2009. – 320 с.
2. ЗАДЕ Л.А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. – М.: Мир, 1976. – 123 с.
3. BEYNON M., CURRY B., MORGAN P. *The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling* // Internationak Jornal Omega. – 2000. – Vol. 28. – P. 37–50.
4. YAZDIA, M., HAFEZIB, P., ABBASSIC, R. *A methodology for enhancing the reliability of expert system applications in probabilistic risk assessment*. Journal of Loss Prevention in the Process Industries. – 2019. – Vol. 58: – P. 51–59.
5. ПЛЭТТ В. *Информационная работа стратегической разведки. Основные принципы*. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 342 с.
6. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*. – М.: Мир, 1976. – 247 с.
7. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации*. – М.: Высш. шк., 2007. – 664 с.
8. SIGFORD S.V., PARVIN R.H. *Project PATTERN a methodology for delernining relevance in complex decision-making* // IEEE Trans., – 1965. – Vol. 12, № 1. – P. 9 – 13.
9. FIGUEIRA J., GRECO S., EHRGOTT M. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. – Springer, 2005. – 1048 p.

10. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций*. – М.: Академия, 2008. – С. 170.
11. КОРНЕЕНКО В.П. *Метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора* // Вестник кибернетики. 2021. № 1 (41). С. 51-62.
12. SAATY T.L. *Axiomatic foundation of the Analytic Hierarchy Process* // Management Scienc. – 1986. – Vol. 32, № 7. – P. 841 – 855.

METHOD FOR CONSTRUCTING THE RESULTS SCALE FOR OBJECTS IN ORDERAL SCALES TAKING INTO ACCOUNT THEIR EXPERT PROBABILITY

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

Abstract: When solving multicriteria problems of estimation and selection of objects with a multilevel structure, measured in different scales, for the correct application of the additive integral mechanism of aggregation, the problem arises of converting the initial estimates of objects into an equivalent resulting scale. In this case, the ordering of objects according to generalized estimates obtained by the additive convolution of criteria with weights of importance will not depend on the scope of the resulting scale. This article is devoted to the method of converting the initial estimates in the sequential scales of measurement, taking into account their expert probability, into point estimates of the resulting scale of the difference. The essence of the method of transition from the initial estimates of objects at the terminal vertices of the hierarchical tree in ordinal scales, taking into account the expert probability, to point estimates in the resulting quantitative scale of the difference, first comes down to the transition from the original point estimates in the point scale to interval gradations of an intermediate quantitative scale. Then, taking into account the subjective probability, a transition is made to a point estimate of the resulting scale of the difference. The idea of the method is shown on the example of solving the problem of multicriteria assessment of the value of information and analytical materials, the initial estimates of which are presented in point grades and the corresponding subjective (expert) probability.

Key words: measurement scale, resulting scale, expert probability.

УДК 519.8
ББК 22.18

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...