МЕТОДЫ СОГЛАСОВАННОСТИ СУЖДЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППОВОГО РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Корнеенко В.П.[1]

(ФГБУН *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В настоящее время для принятия обоснованного управленческого решения на основе результатов экспертных процедур возникает проблема оценки согласованности мнений пары или группы экспертов. Существующие статистические методы и методы ранговой корреляции М. Кендэла согласованность мнений экспертов, под которой следует понимать меру близости между векторными экспертными оценками объектов, не измеряют. Так, например, значение коэффициента Спирмэна ранговой корреляции для пары строгих ранжирований объектов совпадает со значением тангеса угла наклона уравнения линейной регрессионной модели. Предлагаемые методы базируются на критериях близости (расстояний) между объектами, представленными в виде векторных ранговых оценок, которые рассматриваются как элементы метрического пространства. Оценки объектов, представленные в градациях балльной шкалы, предварительно преобразовываются в оценки объектов со связанными рангами. В статье на конкретных примерах показано, что коэффициент конкордации (согласованности) Кендэла не позволяет точно оценивать согласованность ранжирований экспертов, что может приводить к ошибочным управленческим решениям. Преимущество предложенных методов от существующих заключается в том, что в них учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

Ключевые слова: согласованность мнений экспертов, ранговая шкала измерения, медиана Кемени, критерий близости ранжирований.

1. Введение

В настоящее время при решении прикладных многокрите-

---

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@ipu.ru).

риальных задач, связанных с экспертным оцениванием объектов, возникает проблема построения результирующего ранжирования (результирующей векторной оценки) объектов в порядковой (ранговой, балльной) шкале и оценки согласованности суждений (мнений) пары или группы экспертов. Методы экспертного оценивания – это наиболее доступные и универсальные способы измерения качества объектов при решении различных прикладных задач [3–6, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 24].

Существующие статистические методы [3–5] и методы ранговой корреляции М. Кендэла [9] согласованность мнений экспертов, под которой следует понимать меру близости между векторными экспертными оценками объектов, не измеряют.

Несмотря на то, что коэффициент конкордации (согласованности) Кендэла не позволяет точно оценивать согласованность ранжирований экспертов в ранговой шкале, он до сих пор активно применяется для оценки согласованности мнений экспертов при решении прикладных задач [6, 7, 13, 19].

В [13, с. 57] на основании приближённого значения коэффициента конкордации Кендэла не удалось в службе медицины катастроф принять правильное управленческое решение так как "… к сожалению, коэффициент конкордации не позволяет ответить на вопрос, какие из данных групп гемостатических средств можно исключить, а какие оставить".

В данной статье предлагается новый подход оценивания степени согласованности мнений экспертов для объектов, измеренных в порядковой (ранговой, балльной) шкале и представленных в виде векторов (точек) евклидового метрического пространства.

2. Метод оценки степени согласованности мнений двух экспертов в ранговой шкале

При разработке моделей оценки согласованности экспертных ранжирований необходимо учесть основное требование, которое сформулируем в виде следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под согласованностью мнений экспертов будем понимать относительную меру близости (совпадений) между объектами, представленными экспертами в виде векторных оценках в ранговой шкале измерения, на отрезке [0, 1] ([0, 100] в %), в котором бы учитывалось общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

Пусть n объектов из множества $A = \{a_k | k = \overline{1,n}\}$ ранжированы m экспертами $E_j, j = \overline{1,m}$:

(1) $P_j: a_{j_1} \succcurlyeq a_{j_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_k} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_n}$,

где объект с первым номером является наиболее предпочтительным из всех объектов, объект со вторым номером менее предпочтителен первого объекта, но предпочтительнее всех остальных объектов и т. д.

Ранжировать объекты можно и по экспертным оценкам $x_j^{(l)} = f_j(a_k)$, которые можно рассматривать как результат оценивания экспертом объекта $a_k \in A$ по $f_j \in F$ критерию в произвольной порядковой или количественной шкале измерения.

Свойствам отношения строгого порядка удовлетворяет числовая система шкал критериев, элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением строгого неравенства > (<) [20, 21].

Это означает, что упорядочению объектов (1) экспертом по показателю f_j соответствует упорядочение чисел:

(2) $x_j^{(1)} > x_j^{(2)} > \cdots > x_j^{(n)}$.

Возможна и обратная последовательность

(3) $x_j^{(1)} < x_j^{(2)} < \cdots < x_j^{(n)}$,

в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наименьшее число $x_j^{(1)}$, характеризующее место или рейтинг объекта, и, по мере возрастания предпочтения в (3), объектам приписываются бо́льшие числа.

В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательностей (2) и (3) в виде натуральных чисел:

(4) $x_j^{(1)} = n,\ x_j^{(2)} = n - 1, \dots, x_j^{(n)}$=1

либо

(5) $x_j^{(1)} = 1,\ x_j^{(2)} = 2, \dots, x_j^{(n)} = n,$

т.е. используются числовые последовательность типа (4) и (5).

При прямом (обратном) ранжировании числа $x_j^{(1)}$, $x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(n)}$, удовлетворяющие соотношениям (4), (5) называются рангами (местами) и обычно обозначаются в виде:

$$r_j^{(1)},\ r_j^{(2)}, \dots, r_j^{(n)}.$$

В этом случае ранжирование n объектов $a_l \in A$ можно представить в виде векторной оценки

(6) $\vec{r}_j = (r_j^{(1)}, r_j^{(2)}, \dots, r_j^{(n)})$.

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов. Для эквивалентных объектов удобно, с точки зрения технологии последующей обработки экспертных оценок, назначать одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют связанными рангами [9]. Пусть, кроме отношений строгого порядка, между объектами имеется отношение эквивалентности. Упорядочение объектов в этом случае может иметь, например, для 10 объектов следующий вид:

$$a_1 \succ a_2 \succ \{a_3 \approx a_4 \approx a_5\} \succ a_6 \succ \{a_7 \approx a_8\} \succ \{a_9 \approx a_{10}\}.$$

В этом упорядочении эквивалентны между собой объекты a_3, a_4, a_5 и a_9, a_{10}, а само упорядочение образует нестрогое линейное упорядочение. Ему соответствует числовое отношение нестрого линейного порядка, которое удовлетворяет отношениям строгого неравенства и равенства между числами, описывающими свойства объектов. Любые две числовые системы для нестрогого линейного порядка связаны между собой монотонным преобразованием. Следовательно, ранжирование, при условии наличия эквивалентных объектов представляет собой измерение также в порядковой шкале.

В этом примере связанные ранги объектов $a_3,\ a_4,\ a_5$ будут одинаковыми и равными:

$$r_j^{(3)} = r_j^{(4)} = r_j^{(5)} = \frac{3+4+5}{3} = 4.$$

Связанные ранги объектов $a_9,\ a_{10}$ также будут одинаковыми и равными их среднему арифметическому:

$$r_j^{(9)} = r_j^{(10)} = \frac{9+10}{2} = 9{,}5.$$

Как следует из этого примера, связанные ранги могут оказаться дробными (рациональными) числами.

Удобство использования связанных рангов заключается в том, что сумма рангов n объектов равна сумме натуральных чисел от единицы до n: $\sum_k^n r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n\ \forall f_j \in F$. При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму.

2.1. ОЦЕНКА СОГЛАСОВАННОСТИ ПАРЫ ЭКСПЕРТНЫХ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Ранжирования двумя экспертами E_i и $E_j, j = \overline{1,m}$, представим в ранговой шкале, в том числе со связанными рангами:

(7) $P_i: \vec{r}_i = (r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(k)}, \dots, r_i^{(n)})$; $P_j: \vec{r}_j = (r_j^{(1)}, \dots, r_j^{(k)}, \dots, r_j^{(n)})$.

Если оценки объектов представлены в балльной шкале, то упорядочив объекты по убыванию (2) или возрастанию (3) баллов можно перейти к ранговой шкале с учётом связанных рангов.

Рассматривая векторные оценки (6) объектов как точки в n мерном евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, то тогда расстояния между ранжированиями P_i и P_jможно представить в виде меры близости между векторными оценками

(8) $d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^n \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right|$,

в котором отображение $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задаёт метрику метрического пространства.

Очевидно, что расстояние между векторами можно вычислить и по формуле евклидовой нормы

(9) $d_2\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2}$

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиями объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства [10].

Рассмотрим ранжирование $P_{\uparrow}$, в котором ранги объектов упорядочены строго по возрастанию и $P_{\downarrow}$, в котором ранги объектов упорядочены строго по убыванию:

(10) $P_{\uparrow}\colon \vec{r}_{\uparrow} = (1, 2, \dots, n)$; $P_{\downarrow}\colon \vec{r}_{\downarrow} = (n, n-1, \dots, 2, 1)$.

Согласованность исходных ранжирований (7) будем оценивать относительно максимального расстояния между строго возрастающими и строго убывающими рангами объектов (10):

$$d(\vec{r}_{\downarrow}, \vec{r}_{\uparrow}) = \sum_{i=1}^{n} |n - (2i - 1)| = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, \text{если } n - \text{чётное число;} \\ \dfrac{n^2 - 1}{2}, \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

Введём следующее определение степени согласованности мнений двух экспертов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Под степенью (коэффициентом) согласованности между P_i и P_j ранжированиями будем понимать выражение:

(11) $\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}\left(P_i, P_j\right) = 1 - \frac{d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right)}{d(\vec{r}_{\downarrow}, \vec{r}_{\uparrow})}$,

которое, с учётом формулы $d(\vec{r}_{\downarrow}, \vec{r}_{\uparrow})$, в ранговой шкале примет вид:

(12) $\mathcal{S}_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|r_i^{(k)} - r_j^{(k)}\right|, \text{если } n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{n^2 - 1}\sum_{k=1}^{n}\left|r_i^{(k)} - r_j^{(k)}\right|, \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$

Очевидно, что при совпадении ранжирований $d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = 0$ и степень согласованности примет значение $\mathcal{S}_{ij} = 1$, а при противоположных ранжированиях – $\mathcal{S}_{ij} = 0$, т. е. степень согласованности мнений двух экспертов будет удовлетворять неравенству:

$0 \le \mathcal{S}_{ij} \le 1$.

Наряду со степенью согласованности между P_i и P_j ранжированиями введём в рассмотрение и коэффициент рассогласованности, под которым примем выражение:

(13) $\bar{\mathcal{S}}_{ij} = 1 - \mathcal{S}_{ij} = \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow)}$.

Исходя из введённых оценок согласованности и рассогласованности мнений двух экспертов введём в рассмотрение следующий критерий принятия гипотезы при экспертном оценивании объектов.

КРИТЕРИЙ. При принятии управленческих решений, связанных с принятием гипотезы (об эффективности проекта, качества разработанного лекарства и т.п.), если для коэффициентов согласованности и рассогласованности мнений пары экспертов выполняется неравенство

(14) $\mathcal{S}_{ij} > \bar{\mathcal{S}}_{ij}$,

то гипотеза может быть принята, в противном случае гипотеза должна быть отвергнута.

Рассмотрим два ранжирования

(15) $P_i: \vec{r}_i = (1,\ 2, \dots, n-q,\ n-q+1,\ n-q+2, \dots, \dots, n)$;

(16) $P_j: \vec{r}_j = (n-q, n-q-1, \dots, 2, 1, n-q+1, \dots, \dots, n)$,

в котором начальные ранговые оценки упорядочены в строго противоположном направлении, а после q оценок в ранжировании совпадают.

Докажем что для ранжирований (15), (16) степень согласованности удовлетворяет неравенству:

(17) $\frac{q}{n} \le \mathcal{S}_{ij} < 1$.

Теорема 1. *Пусть для пары ранжирований* (15), (16) n *объектов* q *ранговых оценок в ранжированиях совпадают:*

(18) $r_i^{(k)} = r_j^{(k)}\ \ \forall\, k = n - q + 1, \dots, \dots, n, q < n.$

Тогда значение степени согласованности удовлетворяет неравенству (17).

Доказательство. Не умоляя общности, пусть q – чётное число и $n = \alpha q$, где α – целое число. Тогда n и $n - q$ тоже чётные числа, т.е. коэффициент согласованности примет вид:

$$\mathcal{S}_{ij} = 1 - \frac{2}{n^2} d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right|.$$

Представим расстояние между ранжированиями в виде суммы слагаемых

$$d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{k=1}^{n-q} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right| + \sum_{k=n-q+1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right|,$$

Так как $\sum_{k=n-q+1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right| = 0$, то

$$d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{k=1}^{q-1} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right| = \frac{(n-q)^2}{2} = \frac{(\alpha q - q)^2}{2}.$$

Поскольку $\frac{q}{n} = \frac{q}{\alpha q} = \frac{1}{\alpha}$, то убедимся в справедливости неравенства (17). Действительно имеем:

$$\mathcal{S}_{ij} = 1 - \frac{d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right)}{d\left(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow\right)} = 1 - \frac{\frac{(n-q)^2}{2}}{\frac{n^2}{2}} = 1 - \frac{(\alpha q - q)^2}{(\alpha q)^2} = \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha}$$

Поскольку $\mathcal{S}_{ij} = \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}$ и $\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} < 1$, то справедливо неравенство

(19) $\frac{1}{\alpha} \leq \mathcal{S}_{ij} < 1.$

Из справедливости неравенства (19) следует справедливость неравенства (17) для ранжирований (15), (16), что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Из данной теоремы следует вывод, что в коэффициенте $\mathcal{S}_{ij}$ (11) при выполнении условия (18) теоремы 1 учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

2.2. СРАВНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ КОЭФФИЦИЕНТА

СТЕПЕНИ СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ РАНЖИРОВАНИЙ

На данных примера [9, с. 9–6] сравним значения коэффициента ранговой корреляции К. Спирмэна

(20) $\rho = 1 - \frac{6\sum_{k=1}^{n} d_k^2}{n^3 - n}$.

со значениями коэффициента степени согласованности $\mathcal{S}_{ij}$ (11).

Оценивается группа из 10 учеников, которую ранжировали в соответствии с их способностями по математике и музыки в ранговой шкале (табл. 1).

Таблица 1. Ранжирования учеников в ранговой шкале

Ученики (k = 1÷10)	*I*	*F*	*C*	*B*	*J*	*E*	*A*	*H*	*G*	*D*	*Сумма*
Математика (P_Σ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
Музыка (P_M)	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10	55
$d_k = \left\lvert r_\Sigma^{(k)} - r_M^{(k)} \right\rvert$	7	7	0	3	1	5	2	6	3	0	34
$d_k^2 = \left(r_\Sigma^{(k)} - r_M^{(k)}\right)^2$	49	49	0	9	1	25	4	36	9	0	182

Для того чтобы наличие (или отсутствие) совпадений между этими предметами стали более очевидными элементы первого ряда расположены в порядке возрастания, т. е. в последовательности натуральных чисел.

1. Вычислим коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна для исходных данных примера:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{k=1}^{n} d_k^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \times 182}{990} \approx -0{,}103.$$

2. Вычислим коэффициент степени согласованности (n – чётное):

$$\mathcal{S}_{ij} = 1 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \left\lvert r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right\rvert = 1 - \frac{2}{100} \times 34 = 0{,}32\ (32\%).$$

Из таблицы 1 видно, что у двух учеников *C* и *D* по математике и музыке совпадают две оценки, что даёт 0,2 (20 %) совпадения ранжирований, а в целом величина согласованности ранжирований составила 32 %.

Возникает вопрос, что означает отрицательное значение $\rho = -0{,}103$ коэффициента К. Спирмэна? Покажем, что коэффициент К. Спирмэна это коэффициент α при переменной x уравнения линейной регрессионной модели:

(21) $y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$

где α, β – параметры модели; ε – случайная компонента.

Вычисление параметров α, β сводится к аппроксимации набора данных $\{x_k, y_k\}, k = \overline{1,n}$, линейной функцией

(22) $f(x) = \alpha x + \beta,$

минимизирующей функционал:

(23) $F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n}[y_k - (\alpha x_k + \beta)]^2.$

Откуда оценки параметров α, β линейной модели (21) [14]:

(24) $\widehat{\alpha} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}; \widehat{\beta} = \bar{y} - \widehat{\alpha}\bar{x},$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Рассчитаем по данным таблицы 1 коэффициенты линейной модели (21):

$$\widehat{\alpha} = \frac{10\times 294 - 55\times 55}{10\times 385 - 3025} \approx -0{,}103; \widehat{\beta} = 5{,}5 - (-0{,}103)\times 5{,}5 \approx 6{,}07.$$

Покажем, что коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна, подробно рассмотренный в [9], не определяет степень согласованности между двумя экспертными ранжированиями объектов. График теоретической линии регрессии

$$\hat{y} = -0{,}103 \times x + 6{,}07$$

и график эмпирической линии регрессии, соединяющей точки рангов учеников по музыке относительно возрастающих рангов по математике представлен на рис. 1.

Из графика видно, что значение коэффициента уравнения регрессии, численно совпадающее с коэффициентом ранговой корреляции К. Спирмэна, характеризует угол наклона прямой линии регрессии к оси абсцисс.

В данном случае отрицательное значение коэффициента К. Спирмэна равное –0,103 означает, что с возрастанием рангов по математике способности к музыке ученика падает.

Таким образом, коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна всего лишь отражает возрастание или убывание значений линейного уравнения регрессии, когда один из факторов выполняет роль независимой детерминированной переменной, а другой зависимую стохастическую.

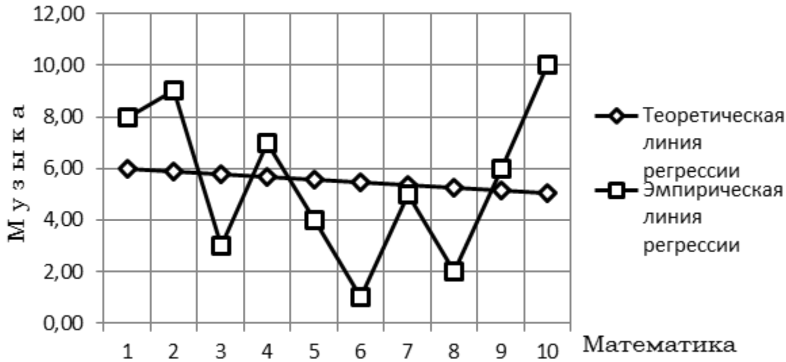

Рис. 1. Графики теоретической и эмпирической линий регрессии

В этом случае коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна не может служить мерой близости мнений двух экспертов. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для пары строгих ранжирований* n *объектов с прямым (обратным) порядком предпочтений объектов, представленных в ранговой шкале, значение коэффициента ранговой корреляции К. Спирмэна* ρ (20) *совпадает со значением коэффициента* $\widehat{\alpha}$ (24) *при переменной x уравнения линейной регрессионной модели* y (21) *при условии равенства числа рангов числу оцениваемых объектов.*

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n,\ r_j^{(k)} \in \{1,2,\dots,n\},\ j = \overline{1,m},$$

то для утверждения теоремы достаточно показать, что правые части ρ (20) и $\widehat{\alpha}$ (24) совпадают. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2 = \sum_{k=1}^{n}(r_i^{(k)})^2 - 2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\, r_j^{(k)} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(r_j^{(k)})^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\, r_j^{(k)} = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} -$$
$$-2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\, r_j^{(k)},$$

то

$$(25)\quad \rho = 1 - \frac{6\sum_{k=1}^{n}\left(r_{\mathrm{i}}^{(k)} - r_j^{(k)}\right)^2}{n^3 - n} = \frac{12}{n^3-n}\cdot\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\, r_j^{(k)} - 3\cdot\frac{n+1}{n-1}.$$

Подставляя

$$x_k = r_i^{(k)}, y_k = r_j^{(k)},\ \sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1+n}{2}\cdot n$$

в $\widehat{\alpha}$ (24), получим:

$$(26)\quad \widehat{\alpha} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} - \left(\frac{1+n}{2}\cdot n\right)^2}{\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{1+n}{2}\cdot n\right)^2} = \frac{12}{n^3-n}\cdot\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\, r_j^{(k)} - 3\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot$$

Правые части ρ (25) и $\widehat{\alpha}$ (26) совпадают, следовательно, выполняется утверждение теоремы: $\rho = \widehat{\alpha}$. Теорема 2 доказана. ■

3. Метод оценки степени согласованности мнений группы экспертов относительно медианы Кемени

Пусть n объектов $a_k \in A$, $k = \overline{1,n}$, представлены ранжированиями P_j (1) m экспертами E_j, $j = \overline{1,m}$, в ранговой шкале с учётом связанных рангов $\vec{r}_j$ (6).

Согласованность группы экспертов будем оценивать как среднее между согласованностью ранжирования каждым экспертом и результирующим ранжированием объектов известного как медиана Кемени-Снелла.

3.1. ЗАДАЧА ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ

При многокритериальной оценке эффективности объектов в конкретной предметной области, оцениваемых экспертами, возникает задача выбора результирующего (группового) ранжирования объектов, представленных точечными и интервальными оценками [1, 2, 4, 8, 11, 12, 15, 25]. В частности, при построении иерархической системы показателей на начальном этапе возникает задача ранжирования показателей по убыванию их значимости, когда мнения экспертов (аналитиков) не совпадают [21].

Одним из первоначальных методов построения результирующего ранжирования (упорядочения) n объектов по предпочтительности m экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [25] и изданной на русском языке в 1972 г. [8]. В [8, 25] упорядочения объектов $a_k \in A$ представлены матрицами бинарных отношений частичного и линейного порядка на множестве пар объектов:

$$(27) \quad M(P_j) = [p_{kq}^j],\ k, q = \overline{1, n},$$

где $p_{kq}^j = \begin{cases} 1, \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_q; \\ -1, \text{если объект } a_q \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, \text{если объекты } a_q \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{равноценны.} \end{cases}$

Понятно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов $a_q,\ a_k \in A$ ранжирования P_j (1). В работе Дж. Кемени и Дж. Снелла приводится следующее определение результирующего ранжирования [8, с. 33–34]): медианой данного множества упорядочений $P_1, \ldots, P_j, \ldots, P_m$ (не обязательно различных) называется такое упорядочение R, для которой сумма расстояний

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)$$

минимальна, а средним значением – упорядочение R, для которой минимальна величина

$$(29) \quad \sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)^2.$$

.

Расстояние между произвольными ранжированиями P_i и P_j рассчитываются по матричным l_1-нормой и l_2-нормой по формулам [23]:

(30) $d_1(P_i, P_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|p_{kq}^{i} - p_{kq}^{j}\right|;$

(31) $d_2(P_i, P_j) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(p_{kq}^{i} - p_{kq}^{j})^2}.$

Расстояние (30), часто называемое как «расстояние Кемени», между произвольными ранжированиями P_i и P_j, представленных в матричном виде $M(P_j)$, можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю по формуле

(32) $d(P_i, P_j) = \sum_{k<q}\left|p_{kq}^{i} - p_{kq}^{j}\right|,$

значение которой равно количеству поразрядных несовпадений элементов матриц $M(P_i)$ и $M(P_j)$ ранжирований P_i и P_j.

Математическая постановка задачи выбора результирующего ранжирования относительно мнений m экспертов сводится к поиску перестановки $\sigma^* = (i_1^*, \dots, i_n^*)$ на множестве $\{1,2,\dots,n\}$ номеров объектов ранжирования, минимизирующей сумму расстояний

(33) $d(P_j, P_\sigma) = \sum_{k<q}\left|p_{kq}^{j} - p_{kq}^{\sigma}\right|.$

до исходных ранжирований P_j, $j = \overline{1,m}$:

(34) $R_*(P_1, \dots, P_m) = \min\limits_{(i_1,\dots,i_n)} \sum_{j=1}^{m} d(P_j, P_\sigma),$

где каждому произвольному ранжированию

(35) $P_\sigma\colon a_{\sigma_1} \succcurlyeq a_{\sigma_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{\sigma_n}$

соответствует матрица бинарных отношений $M(P_\sigma) = \left[p_{kq}^{\sigma}\right]$, $k, q = \overline{1,n}$, объектов, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ – перестановка на множестве $\{1,2,\dots,n\}$ номеров объектов.

Поскольку для комбинаторной задачи (34) по матричному критерию не существует оптимального метода построения результирующего ранжирования, то в ряде работ [12, 15, 17, 18] предлагаются эвристические и приближённые методы решения. Поэтому в [18] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающей с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика [8]», т. е. по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным. Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является.

В статье [11] показано, что поскольку существует взаимосвязь между ранговыми оценками объектов a_k ранжирований P_j (1) и элементами p_{kq}^{j} матрицы $M(P_j)$ (27) бинарных отношений между парой объектов в виде:

а) для объектов с обратным порядком предпочтения

(36) $r_{j\downarrow}^{(k)} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{q=1,k\neq q}^{n}\left(1 - p_{kq}^{j}\right);$

б) для объектов с прямым порядком предпочтения

(37) $r_{j\uparrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2}\sum_{q=1,k\neq q}^{n}\left(1 - p_{kq}^{j}\right),$

то от постановки комбинаторной задачи (34) можно перейти к эквивалентной постановки задачи нахождения медианы (результирующего) ранжирования R_* в ранговой шкале r_k, $k = \overline{1,n}$:

(38) $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(r_j^{(k)} - r_k)^2 \to \min_{(r_1,\dots,r_n)}$

при условии:

(39) $\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{1+n}{2}\cdot n.$

Условие (39) означает, что поскольку для ранговых оценок объектов выполняется соотношение $\sum_{k=1}^{n} r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2}\cdot n,$ то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов результирующего ранжирования R_* как элемента метрического пространства.

Оптимальным решением задачи (38)–(39) по переменным r_k, $k = \overline{1,n}$, являются среднеарифметические числа рангов объектов по числу m ранжирований (экспертов):

(40) $r_k^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)}, \forall\, k = \overline{1,n},$

и результирующее ранжирование:

(41) $R_*: a_{k_1} \succcurlyeq a_{k_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{k_n},$

объектам которого поставлено в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) при прямом направлении возрастания предпочтения объектов:

(42) $r_{k_1}^* > r_{k_2}^* > \cdots > r_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = n; r_{k_2}^* = n - 1; \dots; r_{k_n}^* = 1;$

б) при обратном направлении убывания предпочтения объектов:

(43) $r_{k_1}^* < r_{k_2}^* < \cdots < r_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = 1;\ r_{k_2}^* = 2; \dots;\ r_{k_n}^* = n.$

При равенстве шкальных оценок

$$r_{k+1}^* = r_{k+2}^* = \cdots = r_{k+s}^*$$

объектам, занимающих места с $(k+1)$-го по $(k+s)$-ое присвоим «средний» ранг равный:

(44) $r_{k+i}^* = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(k+i) = k + \frac{1+s}{2}, \forall i = \overline{1,s}.$

Подробное обоснование построения результирующего ранжирования объектов (медианы Кемени) по критерию минимума расстояния в ранговой шкале представлено в [11].

3.2. ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ГРУППЫ ЭКСПЕРТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО МЕДИАНЫ КЕМЕНИ

Алгоритм оценки согласованности мнений группы из m экспертов сводится к следующим шагам.

Шаг 1. Вычислить оценки r_k^* (40), $k = 1 \div n$, и результирующее ранжирование (медиану Кемени) представить в ранговой шкале $R_*: \vec{r}_* = (r_1^*, \dots, r_n^*)$.

Шаг 2. Вычислить расстояние

(45) $d(\vec{r}_j, \vec{r}_*) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_j^{(k)} - r_k^* \right|$

медианы ранжирований R_* до исходных ранжирований $P_1, \dots, P_m$ в ранговой шкале.

Шаг 3. Вычислить коэффициенты $\mathcal{S}_{R_*,P_j} = \mathcal{S}(R_*, P_j)$ согласованности ранжирования P_j экспертом E_j относительно результирующего ранжирования R_*.

Шаг 4. Оценить согласованность мнений m экспертов относительно медианы Кемени как среднее от $\mathcal{S}_{R_*,P_j}$.

Введём следующее определение коэффициента согласованности ранжирований для группы экспертов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Под степенью согласованности ранжирований m экспертами примем усреднённое значение коэффициентов согласованности экспертов относительно медианы ранжирования R_*, представленной в ранговой шкале:

(46) $\mathcal{S}_E = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}(R_*, P_j)$,

которое с учётом формулы $d_{\downarrow\uparrow}$, определяется в виде:

$$\mathcal{S}_E = \begin{cases} 1 - \frac{2}{mn^2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| r_j^{(k)} - r_k^* \right|, \ n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{m(n^2-1)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| r_j^{(k)} - r_k^* \right|, \ n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

По значениям коэффициентов согласованности экспертов можно оценивать по близости к обобщённому мнению (медиане Кемени) и ранжировать по убыванию оценок согласованности:

(47) $E_i \succ E_j \Leftrightarrow \mathcal{S}(R_*, P_i) > \mathcal{S}(R_*, P_j)$.

3.3. СРАВНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОНКОРДАЦИИ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ СОГЛАСОВАННОСТИ ГРУППЫ ЭКСПЕРТОВ

Покажем, что коэффициент конкордации (согласованности), предложенный в работе М. Кендэла [9], который можно определить как нормированную дисперсию, для объектов в ранговой шкале в виде формулы

(48) $W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)}$,

где $S = \sum_{k=1}^{n}(S_k - \bar{S})^2$ – квадраты отклонений $S_k = \sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)}$ суммы рангов a_k объекта от среднего значения $\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$ n объектов, не может служить мерой согласованности мнений m экспертов.

Рассмотрим пример. Необходимо вначале подсчитать степень согласованности m экспертов с помощью коэффициентов $\mathcal{S}_E$ и W, используя данные из работы Кендэла М [9, с. 104–108].

Группа из 4-х экспертов упорядочили шесть объектов, которые представлены в столбцах 2–7 табл. 2.

Таблица 2. Оценка объектов в ранговой шкале

№	Объект						Расстояния $d(\vec{r}_j, \vec{r}_*)$	Оценка $\mathcal{S}(R_*, P_j)$
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	5	4	1	6	3	2	6	0,67
P_2	2	3	1	5	6	4	8	0,56
P_3	4	1	6	3	2	5	10	0,44
P_4	4	3	2	5	1	6	6	0,67
S_k	15	11	10	19	12	17	$\sum_{k=1}^{6} S_k = 84$	$\bar{S} = 14$
$(S_k - \bar{S})^2$	1	9	16	25	4	9	$S = 64$	$W \approx 0{,}229$ (22,9 %)
R_*	**4**	**2**	**1**	**6**	**3**	**5**	$d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = 18$	$\mathcal{S}_E$=0,585 (58,5 %)

Поскольку $\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{6}\cdot 84 = 14,$ то при

$S = \sum_{k=1}^{6}(S_k - \bar{S})^2 = 64$

величина коэффициента конкордации составит:

$$W = \frac{12\times 64}{4^2(6^3-6)} \approx 0{,}229\ (22{,}9\%).$$

При чётности числа объектов $d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = \frac{n^2}{2} = 18$ и оценка согласованности мнений экспертов в среднем составит величину:

$\mathcal{S}_E = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\mathcal{S}(R_*, P_j) = \frac{1}{4}(0{,}67 + 0{,}56 + 0{,}44 + 0{,}67) \approx 0{,}585\ (58{,}5\ \%),$

а на основании оценок согласованности каждого эксперта до медианы Кемени, значения которых представлены в столбце 9 табл. 2, экспертов можно ранжировать по степени приближения к медиане: $\{E_1 \approx E_4\} \succ E_2 \succ E_3$.

Рассмотрим вариант, когда для 7-ми объектов мнения трёх экспертов из пяти совпадают с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу [11]. По формуле $\mathcal{S}_E$ (46) оценка согласованности равна $\mathcal{S}_E = 0{,}58\ (58\ \%)$, что даёт 58 % совпадения мнений экспертов. Исходные данные и расчёты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение оценок согласованности экспертами

№	Объект							Расстояния $d(\vec{r}_j, \vec{r}_*)$	*Оценка* $\mathcal{S}(R_*, P_j)$
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	7	6	5	4	3	2	1	0	1,00
P_2	7	6	5	4	3	2	1	0	1,00
P_3	7	6	4	5	2	3	1	4	0,83
P_4	2	1	5	3	6	4	7	22	0,08
P_5	1	3	2	4	5	7	6	24	0,00
S_k	24	22	21	20	19	18	16	$\sum_{k=1}^{5} S_k = 140$	$\bar{S} = 20$
$(S_k - \bar{S})^2$	16	4	1	0	1	4	16	$S = 42$	$W \approx 0{,}06$ (6 %)
R_* - медиана	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	$d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = 24$	$\mathcal{S}_E$=0,58 (58,0 %)

Коэффициент конкордации по данным таблицы 3 составит

$$W = \frac{12 \times 42}{5^2(7^3 - 7)} \approx 0{,}06\ (6\ \%).$$

Результаты расчётов из табл. 3 показывают, что коэффициент конкордации почти на порядок занижает оценку согласованности мнений пяти экспертов по сравнению с точным значением коэффициента $\mathcal{S}_E$ согласованности.

Приходим к выводу, что коэффициент конкордации не позволяет оценивать согласованность ранжирований экспертов за исключением крайних случаев: при совпадении мнений всех экспертов коэффициент конкордации принимает единичное значение, а при не совпадении нулевое значение.

Следует заметить, что согласно данным таблицы мнения трёх экспертов из пяти совпадают полностью, что даёт 60 %, а по формуле оценка согласованности составила 58 %. Это связано с тем, что 2 % минус получено за счёт рассогласования мнений двух остальных экспертов.

Рассчитаем теоретическую оценку точности коэффициента конкордации W (48) для специального случая, когда у большей подгруппы экспертов ранжирования совпадают, а у другой подгруппы противоположны.

Теорема 3. *Пусть n объектов строго ранжированы m экспертами, где $m \geq 3$, и v ранжирований $P_i, i = \overline{1,v}$, не совпадают с $q = m - v$ ранжированиями $P_j \in P \setminus \{P_i\}_{i=1}^{v}, j = \overline{1,q}$, экспертов с единым мнением, где $q > \frac{m}{2}$, и при этом пусть значения рангов для объектов из несовпадающих ранжирований удовлетворяют равенствам*:

(49) $r_i^{(k)} = n + 1 - r_j^{(k)}, \forall\, P_i,\ P_j \in\ P = \{P_1, \dots, P_m\}$.

Тогда коэффициент согласованности мнений m экспертов примет значение $\mathcal{S}_E = \frac{q}{m}$, а коэффициент конкордации W (48) не зависит от n числа объектов и вычисляется по формуле:

(50) $W(m) = \frac{(q-v)^2}{m^2}$,

при чём относительная величина отклонения от значения коэффициента согласованности мнений экспертов составит величину

(51) $\Delta W(m) = \frac{\mathcal{S}_E - W(m)}{\mathcal{S}_E} = 1 - \frac{(q-v)^2}{mq}$.

Доказательство. В соответствии с мажоритарным правилом большинства [11] медиана Кемени совпадает с ранжированиями экспертов с единым мнением.

С учётом условия (49) расстояние между v ранжированиями $P_i, i = \overline{1,v}$, и результирующим ранжированием R_* совпадёт с расстоянием противоположных ранжирований, т. е.

$$d(P_i, R_*) = d(P_\downarrow, P_\uparrow),$$

откуда $\mathcal{S}_{P_i,R_*} = \mathcal{S}(P_i, R_*) = 0$. Для q ранжирований экспертов с единым мнением имеем $d\big(P_j, R_*\big) = 0$, откуда

$\mathcal{S}_{P_j,R_*} = \mathcal{S}(P_j, R_*) = 1, P_j \in P \backslash \{P_i\}_{i=1}^{v}, j = \overline{1,q}.$

Следовательно: $\mathcal{S}_E = \frac{1}{m} \cdot \left(q \times \mathcal{S}(P_j, R_*) + v \times \mathcal{S}(P_i, R_*)\right) = \frac{q}{m}$.

Не умоляя общности, будем считать, что ранги ранжирований P_i с номерами $i = \overline{1,v}$ строго монотонно убывают, т.е. $r_i^{(k)} = n - k + 1,\ k = \overline{1,n}$, то тогда ранги $P_j,\ j = \overline{1,q}$, ранжирований исходя из (49) строго монотонно возрастают, т.е.

$$r_j^{(k)} = k,\ k = \overline{1,n}.$$

Рассчитаем параметры коэффициента конкордации W (48), а именно:

$$S_k = \sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)} = kq + (n - k + 1)v = (n + 1)v + k(m - 2v),$$
$$\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(n + 1)v + k(m - 2v)] = \frac{m(n+1)}{2}.$$

Исходя из формул $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим:

$$S = \sum_{k=1}^{n}(S_k - \bar{S})^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[(n + 1)v + k(m - 2v) - \frac{m(n+1)}{2}\right]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(m - 2v)\left(k - \frac{n+1}{2}\right)\right]^2 = (m - 2v)^2 \sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 =$$
$$= (m - 2v)^2 \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k(n + 1) + \frac{1}{4}(n + 1)^2\right) = \frac{(m-2v)^2(n^3-n)}{12},$$

Откуда

$$W(m) = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{(q-v)^2}{m^2} \text{ и } \Delta W(m) = \frac{\mathcal{S}_E - W(m)}{\mathcal{S}_E} = 1 - \frac{(q-v)^2}{mq}.$$

Теорема 3 доказана. ■

На следующем примере рассчитаем согласованность для трёх ранжирований пяти объектов, где $q = 2$ и $v = 1$:

$$P_1: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1,\ P_2: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1,$$
$$P_3: a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5,$$

ранги которых представлены в столбцах 2-6 табл. 4.

Поскольку медианой Кемени для трёх ранжирований является ранжирование $R_*: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$, то коэффициент согласованности трёх экспертов: $\mathcal{S}_E = \frac{q}{m} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (67 %).

Коэффициент конкордации вычисленный по формулам W

(48) и $W(m)$ (50) составит:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12\times10}{9\times120} = \frac{1}{9} \text{ и } W(m) = \frac{(q-v)^2}{m^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11\ (11\%).$$

Таблица 4. Результаты сравнения ранжирований объектов

№	Объект					Расстояния $d(\vec{r}_j, \vec{r}_*)$	*Оценка* $\mathcal{S}(R_*, P_j)$
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
1	2	3	4	5	6	7	8
P_1	5	4	3	2	1	0	1,0
P_2	5	4	3	2	1	0	1,0
P_3	1	2	3	4	5	12	0
S_k	11	10	9	8	7	$\sum_{k=1}^{5} S_k = 45$	$\bar{S} = 9$
$(S_k - \bar{S})^2$	4	1	0	1	4	$S = 10$	$W = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$ (11 %)
R_*	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	$d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = 12$	$\mathcal{S}_E = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (67 %)

Из теоремы 3 следует, что коэффициент конкордации ранговой корреляции не может служить оценкой согласованности мнений группы экспертов.

4. Пример оценки степени согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф

На исходных данных работы «Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф» [13] покажем, что опираясь на коэффициент конкордации можно прийти к ошибочным решениям при экспертном оценивании гемостатических лекарственных средств. Суть сводится к следующему [13]: «Экспертам службы медицины катастроф была предложена анкета, включающая блоки профессиональной оценки экспертов-врачей и собственно анкета, включающая группы гемостатических средств. Гемостатические лекарственные средства были ранжированы экспертами по пятибалльной шкале на предмет использования при массивных кровотечениях: оценку «отлично» получала та группа лекарственных препаратов, применение которой необходимо и целесообразно в условиях чрезвычайной ситуации (ЧС), «хорошо» – группа лекарственных средств, применение которой необходимо в условиях ЧС, «удовлетворительно» – группа без которой специалисты медицины катастроф могут обойтись, «неудовлетворительно» – не нужные в ЧС лекарственные средства».

В результате, каждый эксперт выставлял свою оценку, и каждая группа гемостатических средств была оценена в пятибалльной шкале, как представлено в таблице 5.

Таблица 5. Балльные оценки гемостатических средств при оказания медицинской помощи в условиях ЧС

№ Экспертов	Лекарства					
	B02A	B02AB	B02B	B02BC	B02BD	B02BX
1	4	3	2	5	4	3
2	3	3	2	5	3	3
3	4	3	3	4	3	4
4	3	3	3	5	3	3
5	3	3	3	5	3	3
6	5	2	3	5	5	3
7	5	2	3	5	4	4
8	4	4	4	5	4	3
9	5	5	3	4	5	3
10	5	4	3	5	5	3
11	4	4	4	3	5	5
12	5	5	5	5	5	5
13	3	5	3	5	5	5
14	3	4	4	5	5	5
15	4	3	4	5	3	3

Затем балльные оценки гемостатических средств при оказания медицинской помощи в условиях чрезвычайной ситуации были преобразованы в оценки ранговой шкалы с учётом связанных рангов, которые представлены в таблице 6.

Отсюда коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12\times690}{15^2\times(6^3-6)} = \frac{8280}{47250} = 0{,}175238\ (17{,}52\ \%).$$

На основании полученного результата специалисты службы медицины катастроф пришли к ошибочному выводу: «В связи с этим, полученные данные коэффициентов конкордации и вариации позволяют сделать вывод о том, что в настоящее время лидирующая группа лекарственных препаратов для остановки массивных кровотечений для использования на догоспитальном этапе в очаге поражения специалистами службы медицины катастроф отсутствует. Специалисты службы используют в своей работе для купирования кровотечений шесть фармакотерапевтических групп, однако ни одна из них не является идеальной для использования на до госпитальном этапе для остановки массивных кровотечений. Необходимы новые исследования по созданию новых гемостатических средств для местного и наружного применения».

Таблица 6. Ранговые оценки гемостатических средств при оказания медицинской помощи в условиях ЧС

№ Экспертов	Лекарства						Σ
	B02A	B02AB	B02B	B02BC	B02BD	B02BX	
1	4,5	2,5	2	5	4,5	2,5	21
2	3,5	3,5	2	5	3,5	3,5	21
3	5	2	2	5	2	5	21
4	3	3	3	6	3	3	21
5	2,5	2,5	5	6	2,5	2,5	21
6	5	1	2,5	5	5	2,5	21
7	5,5	1	2	5,5	3,5	3,5	21
8	3,5	3,5	3,5	6	3,5	1	21
9	5	5	1,5	3	5	1,5	21
10	5	3	1,5	5	5	1,5	21
11	3	3	3	1	5,5	5,5	21
12	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	21
13	1,5	4,5	1,5	4,5	4,5	4,5	21
14	1	2,5	2,5	5	5	5	21
15	4,5	2	4,5	6	2	2	21
S_k	56	42,5	40	71,5	58	47	315
$(S_k - \bar{S})^2$	12,25	100	156,25	361	30,25	30,25	690

Теперь рассчитаем степень согласованности пятнадцати экспертов с помощью коэффициентов $\mathcal{S}_E$ (46) при чётности количества лекарств по формуле:

$$\mathcal{S}_E = 1 - \frac{2}{mn^2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| r_j^{(k)} - r_k^* \right|, \text{ где } m = 15; n = 6.$$

Вычислив вектор медианы Кемени по формуле r_k^* (40) в количественной шкале $\vec{r}_* = (3{,}73; 2{,}83; 2{,}67; 4{,}77; 3{,}87; 3{,}13)$, найдём расстояние векторной оценке каждого эксперта. В таблице 7 представлены расстояния между медианой Кемени и векторными оценками экспертов.

Таблица 7. Расстояния между оценками в ранговой шкале и медианной Кемени

№ Эксп.	Лекарства						Σ	$\mathcal{S}_{R_*,P_j}$
	B02A	B02AB	B02B	B02BC	B02BD	B02BX		
1	0,77	0,33	0,67	0,23	0,63	0,63	3,27	0,82
2	0,23	0,67	0,67	0,23	0,37	0,37	2,53	0,86
3	1,27	0,83	0,67	0,23	1,87	1,87	6,73	0,63
4	0,73	0,17	0,33	1,23	0,87	0,13	3,47	0,81
5	1,23	0,33	2,33	1,23	1,37	0,63	7,13	0,60
6	1,27	1,83	0,17	0,23	1,13	0,63	5,27	0,71
7	1,77	1,83	0,67	0,73	0,37	0,37	5,73	0,68
8	0,23	0,67	0,83	1,23	0,37	2,13	5,47	0,70
9	1,27	2,17	1,17	1,77	1,13	1,63	9,13	0,49
10	1,27	0,17	1,17	0,23	1,13	1,63	5,60	0,69
11	0,73	0,17	0,33	3,77	1,63	2,37	9,00	0,50
12	0,23	0,67	0,83	1,27	0,37	0,37	3,73	0,79
13	2,23	1,67	1,17	0,27	0,63	1,37	7,33	0,59
14	2,73	0,33	0,17	0,23	1,13	1,87	6,47	0,64
15	0,77	0,83	1,83	1,23	1,87	1,13	7,67	0,57
$\vec{r}_*$	3,73	2,83	2,67	4,77	3,87	3,13	21	10,08

Отсюда оценка степени согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф по формуле (46)

$$\mathcal{S}_E = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}(R_*, P_j) = \frac{1}{15} \times 10{,}083 \approx 0{,}672 \; (67{,}2\ \%).$$

Поскольку $\bar{\mathcal{S}}_E = 1 - \mathcal{S}_E = 0{,}328$ и по критерию принятия гипотезы выполняется неравенство

$$\mathcal{S}_E > \bar{\mathcal{S}}_E \Leftrightarrow 0{,}672 > 0{,}328,$$

то гипотеза о применении лекарств может быть принята.

По формуле ε-приближения оценим значение коэффициента конкордации с более точным значением коэффициента согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф:

$$\frac{|\mathcal{S}_E - W|}{\mathcal{S}_E} = \frac{0{,}672 - 0{,}175}{0{,}672} \approx 0{,}7396 \; (73{,}96\ \%).$$

Поскольку отклонение значения коэффициента конкордации отличается от более точного значения коэффициента согласованности болеее чем на 50 %, то оно не может считаться удовлетворительным и применяться при решении прикладных задач.

5. Заключение

Таким образом, изложенные методы оценки согласованности экспертных ранжирований объектов в порядковой (балльной, ранговой) шкале измерения по сравнению с методами ранговой корреляции позволяют более точно оценивать согласованность как парных так и групповых ранжирований экспертами.

Показано, что коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна всего лишь отражает возрастание или убывание значений линейного уравнения регрессии, когда один из факторов выполняет роль независимой детерминированной переменной, а другой зависимую стохастическую.

Согласованность группы экспертов оценивается как среднее между каждым экспертом и результирующим ранжированием объектов известного как медиана Кемени-Снелла, которая находится как решение оптимизационной задачи по критерию минимума расстояния к ранжированиям объектов в ранговой шкале.

На примере оценки степени согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф показано, что коэффициент конкордации Кендэла не позволяет точно оценивать согласованность ранжирований экспертов, что может приводить к ошибочным управленческим решениям.

Достоинством предложенных методов заключается в том, что в коэффициенте согласованности учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – В. 3. – С. 127-133.
2. АЙЗЕРМАН М.А., АЛЕСКЕРОВ Ф.Т. *Выбор вариантов: основы теории*. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
3. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
4. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
5. ГОСТ 23554.2–81. *Экспертные методы оценки качества промышленной продукции*. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 69 с.
6. ДАНЕЛЯН Т.Я. *Формальные методы экспертных оценок* // Прикладная информатика. – 2015.– № 1. – С. 183–187.
7. КАБАНОВ В.А., КОМАРОВА Е.С. *Использование метода конкордации в оценке уровня согласованности экспертных мнений* // Реакция региональной экономики на внешние вызовы: материалы межвузовской научно-практической конференции 18 ноября 2016 г. – Владимир: Владимирский филиал РАНХиГС, 2016. – С. 39–42.

8. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. - М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
9. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции*. М.: Мир, 1975. – 216 с.
10. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функции и функционального анализа.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.
11. КОРНЕЕНКО В.П. *Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения* // Управление большими системами. Выпуск 82. – М.: ИПУ РАН. – 2019. С. 44–60.
12. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
13. МЕЛЬНИКОВА О.А., ПЕТРОВ А.Ю., ХАФИЗОВА А.В. *Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф* // Успехи современного естествознания. – 2013 . – № 6. – С. 54–57.
14. МАГНУС Я.Р., КАТЫШЕВ П.К., ПЕРЕСЕЦКИЙ А.А. *Эконометрика. Начальный курс*. – М.: Дело, 2007. – 504 с.
15. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
16. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т.79. – №4. – С.3–4.
17. ОРЛОВ А.И. *Организационно-экономическое моделирование. Ч. 2 : Экспертные оценки*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.
18. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ, № 89 (05). – 2013.– URL: http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf (дата обращения: 23.03.2017).
19. ПЕТРИЧЕНКО Г.С., ПЕТРИЧЕНКО В.Г. *Экспертное оценивание при выборе эффективного мероприятия* // Научные ведомости Белгородского университета. – 2015 № 13 (210). Выпуск 35/1. – С. 122–127.

20. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений* . – М.: Мир, 1976. – 247 с.
21. РАМЕЕВ О.А., КОРНЕЕНКО В.П. *Основы теории многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности* : монография. – М.: МАКС-Пресс, 2018. – 2018. – 414 с.
22. ФАЙН В.Б., ДЕЛЬ М.В. *Турнирный метод ранжирования вариантов* // Заводская лаборатория. 2005. Т.71. № 7. С.58-60.
23. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989. – 352 с.
24. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач стратегического планирования*. М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
25. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences*. – New York, University of Michigan. – 1962. – 168 p.

METHODS OF CONSISTENCY OF EXPERT JUDGMENTS REGARDING THE GROUP RANKING OF OBJECTS IN THE RANK SCALE OF MEASUREMENT

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

Abstract: Currently, in order to make a reasonable management decision based on the results of expert procedures, there is a problem of assessing the consistency of the opinions of a couple or a group of experts. Existing statistical methods and M. Kendal's methods of rank correlation do not change the consistency of expert opinions, which should be understood as a measure of proximity between vector expert estimates of objects. For example, the value of the Spearman coefficient of rank correlation for a pair of strict object rankings coincides with the tangent value of the slope angle of the equation of a linear regression model. The proposed methods are based on the criteria of proximity (distances) between objects represented in the form of vector rank estimates, which are considered as elements of a metric space. The ratings of objects presented in the gradations of the point scale are previously converted into ratings of objects with related ranks. The article shows by concrete examples that the Kendal concordance coefficient does not allow to accurately assess the consistency of experts ' ratings, which can lead to erroneous management decisions. The advantage of the proposed methods from the existing ones is that they *take into account the total number of coincidences of the points of view of a pair of experts.*

Keywords: consistency of expert opinions, rank scale of measurement, median of Kemeny, criterion of proximity of rankings.

УДК 519.8
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2019.82.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...