

УДК 342.8

ББК 67.400.5

ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ ОБЩЕСТВО В МОДЕЛИ ViSE: ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ ОТ РАЗМЕРА ГРУППЫ И ПОРОГА ГОЛОСОВАНИЯ

Чеботарев П. Ю.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Максимов В. М.²,

(Московский физико-технический институт, Москва)

В предположениях модели ViSE получены представления ожидаемых приращений капитала в обществах, состоящих из группы и эгоистов. В общем случае нахождение этих величин требует интегрирования; для случая гауссовского генератора предложений оно приводит к явным выражениям, представленным в настоящей статье. Исследованы зависимости этих величин от структуры общества и порога голосования – для гауссовских и паретовских распределений стохастических предложений, нейтральной и неблагоприятной среды, постоянного и переменного числа участников. Эти зависимости представлены поверхностями в $\mathbb{R}^3$. Обсуждаются условия, определяющие сравнительную эффективность групповой и эгоистической стратегий, а также выгоду общества в целом.

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, кооперация, стохастическая среда, *homines eonomici*, порог голосования.

1. Введение

В модели ViSE общество состоит из n участников (агентов), каждый из которых характеризуется текущим значением *капитала* (его отрицательная величина есть долг). Альтернативно капитал может интерпретироваться как полезность. Задается вектор неотрицательных начальных значений капитала участников. На

¹ Павел Юрьевич Чеботарев, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией (pavel4e@gmail.com).

² Владислав Михайлович Максимов, аспирант (vladislav.maksimov@phystech.edu).

каждом шаге $t = 1, \dots, M$ на голосование ставится одно предложение, и агенты, руководствуясь своими *стратегиями голосования*¹, голосуют «за» или «против». Каждое предложение представляет собой вектор алгебраических приращений капиталов агентов. В случае, если предложение одобрено посредством используемой *процедуры голосования*, оно реализуется: капиталы участников получают предложенные приращения. Один из вариантов модели предполагает банкротство участников, капитал которых стал отрицательным: такие участники перестают голосовать и не учитываются в последующих предложениях (вариант «с вымиранием»).

Предложение в модели ViSE формируется стохастически: его компоненты есть реализации случайных величин, которые в простейшем случае, рассматриваемом в данной работе, одинаково распределены и независимы. Распределения этих величин в рамках изучаемого класса распределений характеризуются параметрами сдвига и растяжения. Чаще всего рассматриваются классы симметричных распределений, имеющих конечные математическое ожидание μ (в этом случае оно совпадает с медианой и используется в качестве параметра сдвига) и дисперсию σ^2 . В качестве параметра растяжения используется стандартное отклонение σ либо разность между медианой и первым квартилем. При сравнении распределений из разных классов они стандартизируются по параметрам сдвига и растяжения.

Предложения, полученные указанным образом, в модели ViSE называются *предложениями стохастической среды*. Среда *благоприятна*, если $\mu > 0$, *нейтральна* при $\mu = 0$ и *неблагоприятна* при $\mu < 0$.

В соответствии с моделью вектор капиталов агентов на шаге t определяется формулой

$$(1) \quad c(t) = r(c(t-1) + \zeta(t)I(t)), \quad 0 < t \leq M,$$

где вектор $\zeta(t)$ – предложение среды на шаге t ; M – общее

¹ В терминологии модели ViSE под стратегией голосования агента понимается алгоритм использования им имеющейся у него информации для принятия индивидуальных решений о поддержке предложений.

число шагов;

$$I(m) = \begin{cases} 1, & \text{если предложение } \zeta(m) \text{ принято голосованием;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$r(\cdot)$ – оператор, исключающий из вектора капиталов отрицательные компоненты в модели с вымиранием и тождественный оператор в модели без вымирания.

Анализ закономерностей изменения вектора капиталов (1) при различных распределениях позволяет оценить выгодность индивидуальных стратегий голосования, а также эффективность процедур принятия коллективных решений как методов отбора предложений и выбирать среди них оптимальные в отношении максимизации выбранных критериев.

Простейшие стратегии голосования участников в модели ViSE – эгоистическая и групповая. *Эгоист* поддерживает те и только те предложения, которые увеличивают его капитал; таких агентов можно назвать также *homines economici*. Все *члены группы*, преследуя групповой интерес, поддерживают те и только те предложения, которые увеличивают суммарный капитал участников группы.

Наиболее распространенный метод принятия демократических решений – голосование с порогом поддержки. В соответствии с процедурой этого класса предложение принимается тогда и только тогда, когда доля участников, поддержавших его, превосходит число α , называемое *строгим относительным порогом голосования*. При $\alpha = 0,5$ получаем процедуру простого большинства; при $\alpha = 0$ для принятия предложения достаточно одного голоса; при $\alpha = 1$ предложение не принимается даже при его всеобщей поддержке. Для задания процедуры, одобряющей все предложения без исключения, следует присвоить α произвольное отрицательное значение. Таким образом, полный набор пороговых процедур голосования может быть задан условием $\alpha \in [-1/n, 1]$, где n – число участников. При этом $\alpha n \in [-1, n]$ называют *строгим абсолютным порогом голосования*.

Порог $\alpha n = n - 1$ соответствует процедуре единогласия, меньшие пороги, удовлетворяющие условию $\alpha n \geq [n/2] + 1$, –

различным процедурам *квалифицированного большинства*, традиционно используемым для принятия наиболее важных решений, требующих высокой поддержки. Пороги, меньшие половины числа участников, используются для принятия «инициативных» решений, таких, как включение вопроса в повестку дня заседания, создание парламентской комиссии и т.п. Некоторые решения принимаются по желанию всего лишь одного (любого) участника. Например, всякий взрослый член семьи может по своему выбору приобрести товар небольшой стоимости, предназначенный для использования всей семьей.

В данной работе исследуется общество, состоящее из группы и эгоистов; его общая численность n складывается из количества эгоистов n_e и численности группы n_g : $n = n_e + n_g$.

В следующем разделе обсуждаются цели исследования и их связь с полученными ранее результатами.

2. Предварительные результаты, цели и задачи исследования

Общая цель анализа модели ViSE состоит в выяснении того, как социальным агентам следует голосовать и обрабатывать результаты голосований, чтобы коллективные решения приносили им наибольшую пользу – в терминах тех или иных критериев. Как при этом защитить слабых, как отстоять определенные индивидуальные и групповые интересы, не становясь заложниками сплоченных групп конкурентов? Какие категории участников будут в наибольшем выигрыше при заданных внешних условиях? Разумеется, найденные ответы будут в полной мере верны лишь в рамках модели, но они полезны и в жизни – в той мере, в которой модель ее отражает.

Главная черта описанной выше групповой стратегии голосования – то, что она является кооперативной. Несколько участников, кооперируясь, договариваются, что каждый из них будет защищать групповые интересы независимо от того, совпадают ли они с его индивидуальными интересами в каждом конкретном случае. Напомним, что все интересы агентов в модели ViSE выражаются в терминах капитала/полезности.

Феномен кооперации чаще всего моделируют в формализме

теории игр [13,15,17]. При этом нередко постулируется, что кооперативное поведение всех игроков выгоднее для каждого из них, чем всеобщий отказ от кооперации, в то же время в несимметричной ситуации, когда одни выбирают кооперацию, а другие уклоняются от нее, первые заметно проигрывают, последние же получают относительный выигрыш. При выполнении указанных порядковых соотношений всеобщий отказ от кооперации является единственным равновесием Нэша, которое при этом неэффективно по Парето.

Но всегда ли выигрыши в указанных ситуациях (всеобщая кооперация, тотальный отказ от нее, кооперация части агентов) соотносятся именно так? От чего это зависит? Как это связано с благоприятностью внешних условий, соотношением числа агентов, имеющих близкие интересы, и «чужаков», с алгоритмом голосования (который, как показано в [6], можно интерпретировать в терминах степени либеральности/консерватизма общества)? То, что люди в одних ситуациях интуитивно стремятся к кооперации, в других считают ее излишней, а в третьих демонстрируют разнообразие стратегий, говорит о нетривиальности этих вопросов и о том, что они не менее фундаментальны, чем вопросы о выходе общества на границу Парето при заданном соотношении выигрышей.

В рамках модели ViSE соотношение выигрышей при разных стратегиях исследуется в предположениях о принятии решений голосованием и стохастической природе предложений. Ключевую роль при этом, разумеется, играет влияние групп и отдельных участников на коллективные решения. Так, если голоса малой группы критически важны для принятия или непринятия решения, то участникам этой группы, скорее всего, удастся защитить свои интересы. Данная статья посвящена выявлению закономерностей такого рода в случае, когда общество состоит из двух компонент: одной группы и эгоистов. Эта структура общества проста, но анализ ее приводит ряду нетривиальных выводов.

Отметим, что выход на границу Парето, где обычно находится общество, состоящее из кооперирующихся агентов, также может быть изучен в рамках модели ViSE. Именно такая эволюция реализуется алгоритмом «снежного кома кооперации» [7,6], эффективным, когда кооперация части агентов взаимна.

Модель ViSE исследуется с 2003 г. (см. [14]). При ее изучении

были получены частичные ответы на приведенные выше вопросы в отношении обществ различной структуры.

Так, в [2] изучались общества, состоящие из группы и эгоистов, и в [5] получены точные и приближенные выражения среднего приращения капитала участников для таких обществ при гауссовском генераторе предложений. В [4] найден оптимальный порог притязаний группы в двухкомпонентном обществе.

В [11] и [3] рассматривались однородные общества, состоящие из эгоистов либо из участников с различными просоциальными стратегиями. Предложения генерировались посредством не только гауссовских распределений, но и распределений с тяжелыми хвостами, включая распределения Стюдента и симметризованные распределения Парето.

В [7] аналитически исследовались общества, состоящие из двух групп и эгоистов, в [9] – из трех групп, в [8] – из двух групп равного размера, одна из которых характеризуется порогом притязаний. В [1] анализировались двухкомпонентные общества, состоящие из эгоистов и альтруистов с разными стратегиями, а в [18] – общества, где есть эгоисты, группы и альтруисты либо участники с комбинированной стратегией голосования, образующие «ответственную элиту».

В [10] была решена задача об оптимальном пороге голосования в случае гауссовского генератора и общества из эгоистов, а в [16] – при произвольном генераторе предложений. В [1] проведен сравнительный анализ методов стимулирования просоциальной стратегии голосования, которая предохраняет общество от разорения.

Более подробный обзор ранее полученных результатов можно найти в [3].

В настоящей работе мы вновь обращаемся к двухкомпонентному обществу, состоящему из группы и эгоистов, чтобы систематически исследовать зависимость изменений капитала участников от порога голосования и относительного размера группы. При этом будут рассмотрены гауссовские и паретовские генераторы предложений и общества как с постоянным составом участников, так и с вымиранием.

Отправной точкой будут полученные в [2] с помощью приближенных оценок пять зон локализации порога голосования для

обществ рассматриваемого типа. Приведем их для нейтральной среды, более точно указав границы зоны 3 с зонами 4 и 5.

Зона 1. $\alpha < \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$, где $\beta = n_e/2n$. При таких порогах голосования значительная часть предложений принимается.

Зона 2. $\alpha > 1 - \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$. Эта зона зеркальна по отношению к первой; здесь предложения принимаются редко, и капитал участников меняется мало.

Зона 3. $2\beta \leq \alpha < 1 - 2\beta$. При таких порогах голосования принимаются те и только те предложения, которые поддержаны группой. Это приводит к тому, что для эгоистов результаты голосования в нейтральной среде в среднем нейтральны: ожидаемое приращение их капиталов равно нулю.

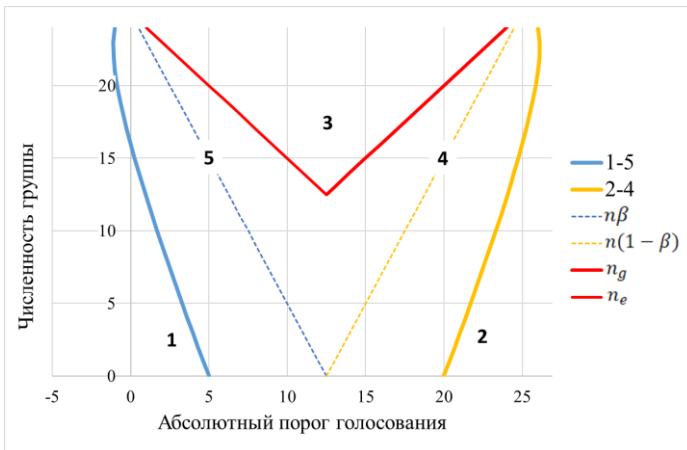


Рис. 1. Зоны абсолютного порога голосования для общества, состоящего из группы и эгоистов, в нейтральной среде; $n = 25$

Чтобы доказать последние утверждения, достаточно переписать неравенство, определяющее зону 3, в виде $n_e \leq \alpha n < n_g$. При таких порогах голосования предложение принимается тогда и только тогда, когда за него голосует группа. Поскольку в каждом предложении приращения капитала участников независимы, математическое ожидание приращения капитала эгоиста по множеству принятых предложений (как и по множеству всех

предложений) равно нулю.

Зона 4. $1 - 2\beta \leq \alpha \leq 1 - \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$. При таких порогах принимаются предложения, поддержанные группой вместе с определенным числом эгоистов, что дает последним возможность блокировать наиболее разорительные для них (в терминах количества теряющих капитал агентов) предложения. Это положительно сказывается на их капитале.

Зона 5. $\beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right) \leq \alpha < 2\beta$. При сравнительно низких порогах голосования, удовлетворяющих этому условию, ситуация зеркальна предыдущей, а именно, у эгоистов достаточно голосов, чтобы принять все самые выгодные для них (в терминах количества увеличивающих капитал агентов) предложения, что также положительно влияет на их капитал.

Зоны 4 и 5, в отличие от других, пересекаются. Схема указанных зон представлена на рис. 1.

Сформулируем основные задачи исследования.

1. В опубликованных ранее работах установлено, что для агентов каждой из категорий выгодны ситуации, когда эта категория оказывает сильное влияние на принятие решений. Последнее означает, что часто реализуются решающие и/или блокирующие коалиции, включающие значительное число участников данной категории. Однако этого общего факта недостаточно для сравнения *любых* ситуаций, характеризуемых долей группы и порогом голосования, по выгодности их для разных участников. Одна из задач работы – получить и представить наиболее интересные результаты такого сравнения. Для этого будут получены выражения среднего приращения капитала группы и эгоистов в двухкомпонентном обществе.

2. Вторая задача – установить характер зависимости результатов указанного сравнения от благоприятности среды.

3. Третья задача – выяснить, насколько сильно качественные результаты такого сравнения зависят от типа симметричного распределения случайных величин, генерирующих предложения.

4. Наконец, предположим, что эгоисты могут вступать в группу, а члены группы, напротив, выходить из нее, если им это выгодно. К каким изменениям структуры общества это может

привести? Порог голосования также может меняться посредством коллективных решений, принятых в интересах тех, кому это выгодно. Интересно исследовать возможные направления эволюции общества в сторону предпочтений агентов, т.е. траектории переходов в пространстве параметров, характеризующих общество, и равновесия в этом процессе. Данное исследование проведено в [6].

3. Динамика капиталов в модели без вымирания

В этом разделе получены выражения среднего приращения капитала (далее – «СПК») группы и эгоистов в двухкомпонентном обществе без вымирания.

Теорема 1. Пусть $M(\tilde{d}_e)$ и $M(\tilde{d}_g)$ – математические ожидания приращений капиталов эгоиста и члена группы за один шаг соответственно. Для любого распределения – генератора предложений среды, имеющего математическое ожидание μ , имеет место

$$(2) \quad M(\tilde{d}_e) = E_{[an],n_e}^F \bar{F}(0) + E_{[an]-n_g,n_e}^F (1 - \bar{F}(0)),$$

$$(3) \quad M(\tilde{d}_g) = \mu P_{[an],n_e} + E_{1,0}^{\bar{F}} (P_{[an]-n_g,n_e} - P_{[an],n_e}),$$

где

$$(4) \quad E_{k,m}^{F'} = \mu P_{k-1,m-1} + \mu^- (P_{k,m} - P_{k-1,m-1})$$

выражает условное математическое ожидание компоненты вектора из m независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $M(\zeta) = \mu$ и функцией распределения $F'(\cdot) = F'_\zeta(\cdot)$ при условии, что более k компонент вектора положительны, $\mu^- = M(\zeta \mid \zeta \leq 0)$, F – функция распределения генератора предложений среды, $\bar{F} = \bar{F}_{n_g}$ – функция распределения среднего n_g независимых случайных величин с распределением F , $P_{k,m} = \sum_{i=k+1}^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$, $\binom{m}{i}$ – число сочетаний из m по i , $q = F'(0)$, $p = 1 - q = P\{\zeta > 0\}$.

При вычислении суммы, выражающей $P_{k,m}$, используются следующие соглашения: если $k < 0$, то $P_{k,m} = 1$; если $k \geq 0$, то при

$m < k + 1$ полагаем $P_{k,m} = 0$, т.к. в сумме нет слагаемых. В остальных случаях полезно выражение $P_{k,m}$ через функцию распределения биномиального распределения: $P_{k,m} = 1 - \text{Bi}(p, k, m)$.

Доказательство. Равенство (2) обобщает выражение $M(\tilde{d}_e) = E_{[\alpha n], n_e}^N(1 - P_G) + E_{[\alpha n] - n_g, n_e}^N P_G$ (формула (16) в [5], где N – функция распределения гауссовского генератора предложений, P_G – вероятность поддержки предложения группой) на случай произвольного генератора предложений с распределением F с использованием того факта, что вероятность отсутствия поддержки предложения со стороны группы равна $\bar{F}(0)$. Отметим, что в настоящей статье величины, обозначенные E , выражают математическое ожидание (от “Expectation”), а в [5] через E обозначались события (от “Event”).

Равенство (3) выводится подстановками из формул (7), (17), (25) и (26) статьи [5] с учетом того, что решения принимаются с порогом α .

Докажем (4). По теореме 3 из [16]

$$E_{k,m}^{F'} = p(\mu^+ - \mu^-)P_{k-1,m-1} + \mu^- P_{k,m},$$

где $\mu^+ = M(\zeta \mid \zeta > 0)$. Используя выражение для $p(\mu^+ - \mu^-)$ из формулы полной вероятности для математических ожиданий $p\mu^+ + (1 - p)\mu^- = \mu$, получаем требуемое:

$$\begin{aligned} E_{k,m}^{F'} &= (\mu - \mu^-)P_{k-1,m-1} + \mu^- P_{k,m} = \\ &= \mu P_{k-1,m-1} + \mu^- (P_{k,m} - P_{k-1,m-1}). \end{aligned}$$

Предложение 1. В случае генерации предложений посредством нормального распределения с параметрами μ и σ ($F \equiv N(\mu, \sigma)$) в обозначениях теоремы 1 имеет место

$$(5) \quad E_{k,m}^F = \mu P_{k,m} + \frac{\sigma f}{q} (P_{k-1,m-1} - P_{k,m}),$$

$$(6) \quad E_{1,0}^{\bar{F}} = \mu F_0\left(\frac{\mu}{\sigma_g}\right) + \sigma_g f_0\left(\frac{\mu}{\sigma_g}\right),$$

$$(7) \quad \bar{F}(0) = 1 - F_0\left(\frac{\mu}{\sigma_g}\right),$$

где $f = f_0\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$; $\sigma_g = \sigma/\sqrt{n_g}$; $F_0(\cdot)$ и $f_0(\cdot)$ – стандартные нормальные функция распределения и плотность.

Доказательство. Подставив выражение $\mu^- = \mu - \frac{\sigma f}{q}$ (формула (П.5) в [5] для случая, когда $F' \equiv N(\mu, \sigma)$) в формулу (4), получаем (5).

Выражение (6) следует из формулы (32) в [5] с учетом того, что среднее n_g независимых нормальных величин с параметрами μ и σ распределено нормально с параметрами μ и $\sigma/\sqrt{n_g}$.

Для получения (7) достаточно воспользоваться наблюдением из предыдущего абзаца и использовать симметричность и непрерывность нормального распределения.

Следствие 1. При гауссовском генераторе предложений СПК эгоистов и членов группы выражаются формулами

$$M(\tilde{d}_e) = \left(\mu P_{[an]-n_g, n_e} + \frac{\sigma f}{q} (P_{[an]-n_g-1, n_e-1} - P_{[an]-n_g, n_e}) \right) F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + \\ + \left(\mu P_{[an], n_e} + \frac{\sigma f}{q} (P_{[an]-1, n_e-1} - P_{[an], n_e}) \right) F_0 \left(-\frac{\mu}{\sigma_g} \right),$$

$$M(\tilde{d}_g) = \mu P_{[an], n_e} + \left(\mu F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + \sigma_g f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) \right) (P_{[an]-n_g, n_e} - P_{[an], n_e}).$$

Данное следствие выводится из теоремы 1 и предложения 1 с помощью подстановок.

Таким образом, СПК эгоистов и членов группы при гауссовском генераторе предложений выражаются довольно простыми формулами (следствие 1). В случае произвольного генератора предложений можно использовать формулы (2)–(4) теоремы 1, но нужна функция распределения $\bar{F} = \bar{F}_{n_g}$ среднего n_g независимых случайных величин с распределением F . При гауссовской F это распределение нормально, другие двухпараметрические семейства распределений не обладают замкнутостью относительно суммирования или взятия среднего. Среднее независимых непрерывных *равномерных* случайных величин распределено по Бейтсу; в случае произвольного распределения для расчетов по формулам (2)–(4) нужно табулировать соответствующее распределение среднего, не имеющее универсального алгебраического выражения. При достаточно большом n_g и выполнении условий центральной предельной теоремы можно использовать

нормальное приближение этого распределения.

Перейдем к результатам, позволяющим ответить на вопросы 1–3 из раздела 2.

4. Результаты моделирования

4.1. ДИНАМИКА КАПИТАЛОВ В НЕЙТРАЛЬНОЙ СРЕДЕ С ГАУССОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

На рис. 2 представлена зависимость среднего приращения капитала (СПК) эгоистов от порога голосования и численности группы в обществе из $n = 25$ агентов при гауссовском распределении предложений с $\mu = 0$ (нейтральная среда) и $\sigma = 12$ без вымирания. Для наглядности эта зависимость, как и следующие, показана в виде поверхности, проходящей через точки с целыми координатами n_g (размер группы) и an (абсолютный порог голосования); третья координата точек – соответствующее СПК. Показаны также план («вид сверху», вдоль оси СПК) этой поверхности и ее сечения, соответствующие нескольким порогам голосования и размерам группы.

Форма данной поверхности – два симметричных относительно плоскости $an = 12$ соединяющихся «хребта». Максимумы капитала эгоиста достигаются при численности группы $n_g = 24$ (один эгоист) и порогах голосования $an = 24$ и $an = 0$. В первом случае голоса эгоиста достаточно, чтобы заблокировать принятие невыгодных для него предложений, во втором – для одобрения выгодных. В нейтральной среде ($\mu = 0$) результатом этого является одно и то же значение СПК, недостижимое ни для одной категории агентов в иных обществах с 25 участниками. Это значение снижется по мере роста числа эгоистов, приводящего при $n = 25$ к сокращению размера группы. При $an = 24$ или $an = 0$ СПК эгоиста снижается ровно вдвое при увеличении числа эгоистов на единицу в диапазоне от 1 до 24.

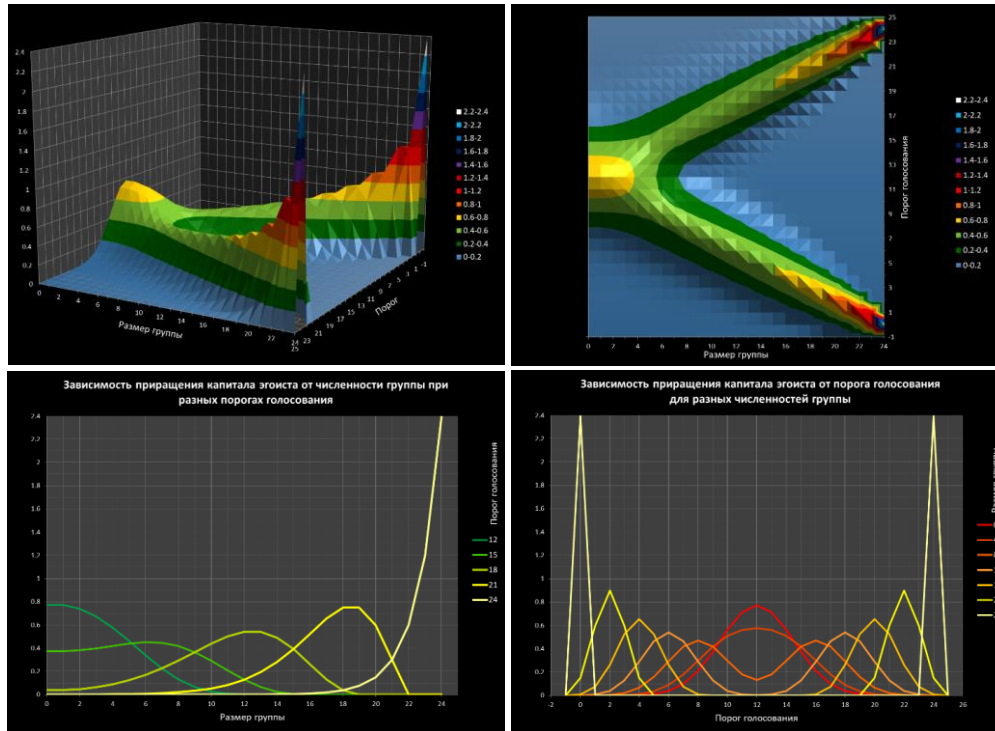


Рис. 2. Среднее приращение капитала эгоиста за 1 шаг; $n = 25$ участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

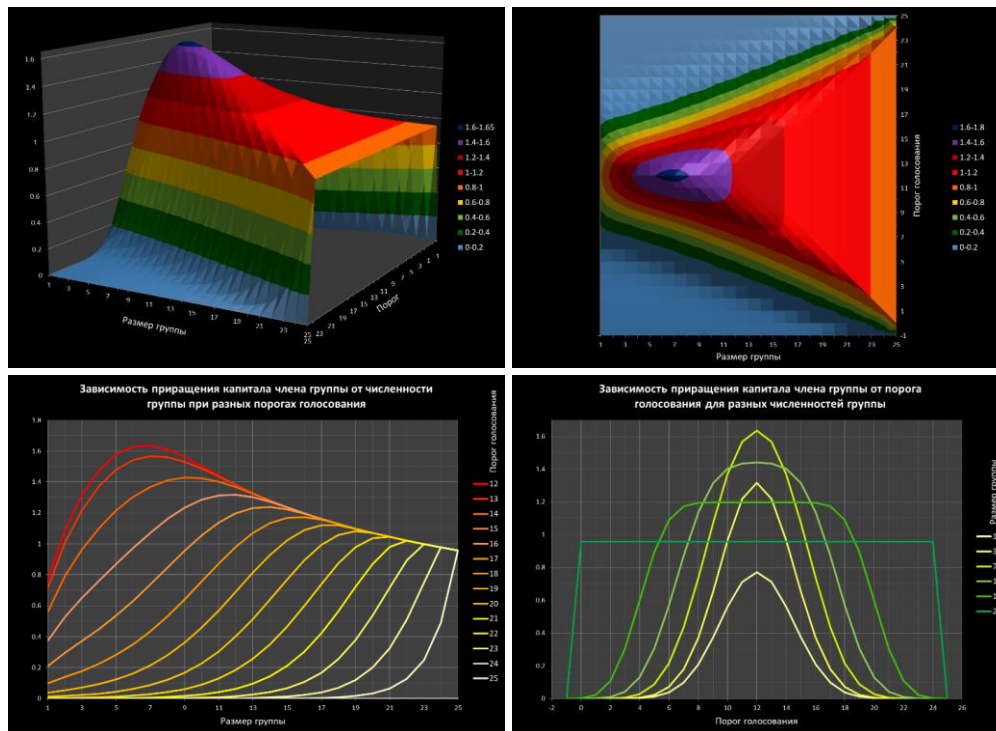


Рис. 3. Среднее приращение капитала члена группы за 1 шаг; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

Группа из одного агента – это эгоист, поэтому СПК эгоистов (и СПК по всему обществу) при $n_g = 1$ и $n_g = 0$ равны. Два «хребта» соответствуют относительно высоким и низким α и содержат наибольшие (при фиксированной структуре общества) значения СПК эгоистов. С уменьшением группы хребты становятся ниже. Соединившись, они дают два локально максимальных значения при $n_g \in \{0, 1\}$ и $\alpha = 0,5$.

Эти значения уступают СПК на «хребтах» при $n_g \in [20, 24]$, в частности, ниже «пиков» СПК одного эгоиста ($n_g = 24$) в 3,1 раза. В то же время они в 1,73 раза выше наибольшего СПК эгоистов в самых «невыгодных» для них обществах – при $n_g = 7$.

Таким образом, эгоистам выгодно находиться в меньшинстве в обществах с относительно высоким или низким порогом голосования (в зонах 4, 5). Менее выгоден локальный максимум при отсутствии группы и голосовании простым большинством ($\alpha = 0,5$) – на пересечении пунктирных линий на рис. 1. Как было показано в разделе 2, в зоне 3 СПК эгоистов равно нулю, а в зонах 1 и 2 принимает малые положительные значения.

Обратимся теперь к результатам группы. В каком обществе из 25 агентов быстрее всего растет капитал ее участника? Это общество с $n_g = 7$ ($n_e = 18$) и $\alpha = 0,5$ (рис. 3). Как было отмечено выше, именно при $n_g = 7$ минимальна верхняя грань СПК эгоиста. Тем самым разделение общества на $n_e = 18$ эгоистов (72% общества) и группу из $n_g = 7$ членов наименее выгодно для первых и оптимально для вторых – по критерию максимального достижимого приращения капитала.

Указанный максимум СПК члена группы составляет 68% от наибольшего значения СПК эгоиста («пики» на рис. 2). В то же время при простом большинстве он в 2,1 раза выше, чем СПК в обществе из эгоистов, и в 1,7 раза выше, чем в обществе-группе.

При отдалении порога голосования от порога простого большинства СПК члена группы падает почти до нуля. Так, если $n_e < 13$, то при изменении абсолютного порога голосования от n_e до 0 СПК члена группы снижется в 2^{n_e} раз. Так же СПК снижается и при повышении порога голосования от $n_g - 1$ до 24. При $n_e \leq \alpha n \leq n_g - 1$ СПК не меняется. Последнее объясняется тем, что такие

пороги, принадлежащие зоне 3 на рис. 1, эквивалентны: при них одобряются все предложения, поддержанные группой, и только они. Если $n_e \geq 13$, то при изменении порога голосования от $\alpha n = 12$ до 0 либо до 24 СПК снижается несколько меньше, чем в 2^{n_e} раз.

При увеличении или уменьшении размера группы от наиболее выгодной для нее численности СПК монотонно снижается. Зависимость самого выгодного размера группы от абсолютного порога голосования представлена в табл. 1.

Для понимания ситуации важен вопрос: «Какие общества принадлежат множеству Парето по вектору СПК агентов?» Здесь «общество A доминирует B по Парето» означает, что при некоторой биекции множеств агентов обществ A и B каждый агент в A имеет СПК не ниже (и хотя бы один – выше), чем соответствующий агент в B . Ответ на данный вопрос дает рис. 4, где область, содержащая общества из множества Парето, выделена цветом.

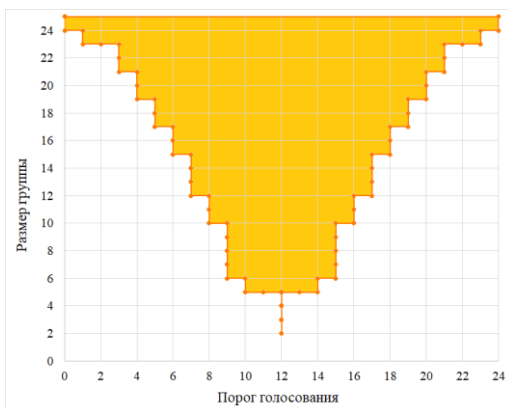


Рис. 4. Общества из 25 агентов, образующие множество Парето по вектору СПК при нормальном распределении и $\mu = 0$, принадлежат закрашенной области

Сечения этого множества линиями равного размера группы симметричны относительно порога простого большинства, причем мощность сечения тем выше, чем больше группа.

Несколько примеров обществ, входящих в множество Парето, приведены в табл. 2. Отметим, что если в обществе A СПК как

эгоистов, так и членов группы выше, чем в обществе B , это не значит, что A доминирует B по Парето. Действительно, если в B и богатые, и бедные в среднем беднее, чем в A , нельзя утверждать, что B беднее, т.к. в B почти все могут быть богатыми, а в A почти все – бедными.

Рассмотрим теперь СПК по всему обществу. Соответствующая поверхность, показанная на рис. 5, имеет минимум при простом большинстве и группе в 36% общества ($n_g = 9$). «Яме», включающей этот минимум, соответствуют размеры группы от 7 до 10 и относительные пороги, близкие к 0,5. В частности, при $n_g = 8$ СПК почти такое же, как при $n_g = 9$. В случае абсолютных порогов голосования 8–11 или 13–16 СПК при $n_g = 9$ выше, чем в случае простого большинства (порог 12) и лишь за пределами отрезка [8, 16] становится ниже. При простом большинстве и уменьшении размера группы до нуля СПК общества растет на 28%, а при увеличении до 25 – на 58%. Заметны слабо возвышающиеся «хребты», унаследованные от поверхности СПК эгоистов; их высота минимальна при $n_g = 7$. Тем самым значение $n_g = 7$ наименее выгодно не только для эгоистов, но и для общества в целом – в смысле максимального достижимого СПК; участникам группы оно, напротив, предоставляет наилучшие возможности роста капитала.

Последнее – важный вывод, соотносимый с реальностью. Для сплоченной эгоистичной группы (олигархии, бюрократии мафии, и др.) выгоднее всего быть сравнительно небольшой. Эта оптимальная доля, при которой группа наиболее эффективно защищает свои интересы, падает с ростом числа агентов n . Примерно та же доля группы оказывается наименее выгодной не только для остальных, но и для общества в целом.

Обществу в целом выгоднее всего быть группой из 25 агентов. При сокращении группы СПК общества снижается, и при простом большинстве и 9 эгоистах оно ниже, чем в обществе из одних эгоистов. Если эгоистов 10, то уровень СПК общества из эгоистов недостижим ни при какой процедуре голосования с порогом, даже в зонах 4 и 5, где расположены «хребты».

Для сравнения успешности стратегий голосования рассмотрим разность СПК участника группы и эгоиста (рис. 6).

Таблица 1. Зависимость размера группы, наиболее выгодного для ее членов, от строгого абсолютного порога голосования и диапазоны численностей группы, при которых эгоистическая стратегия выгоднее групповой; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$.

Порог голосования	0, 24	1, 23	2, 22	3, 21	4, 20	5, 19	6, 18	7, 17	8, 16	9, 15	10, 14	11–13
Оптимальный размер группы	25	24	23	22	21	19	17	16	14	12	9	7
Эгоистическая стратегия выгоднее групповой для размеров группы из множества:	[2, 24]	[2, 23]	[2, 21]	[2, 19]	[2, 16]	[3, 13]	[5, 9]	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Таблица 2. Примеры обществ, принадлежащих множеству Парето по СПК; нормальное распределение; $\mu = 0$.

Порог голосования αn	12	12	12	12	12	0; 24	1; 23	3; 21	6; 18	9; 15	9; 15	9; 15
Размер группы	2	5	7	15	25	24	23	23	15	12	10	6
СПК эгоиста	0,738	0,460	0,226	0	–	2,393	1,197	0	0,037	0,129	0,292	0,451
СПК члена группы	1,091	1,578	1,635	1,236	0,957	0,489	0,749	0,998	1,024	1,318	1,285	0,973

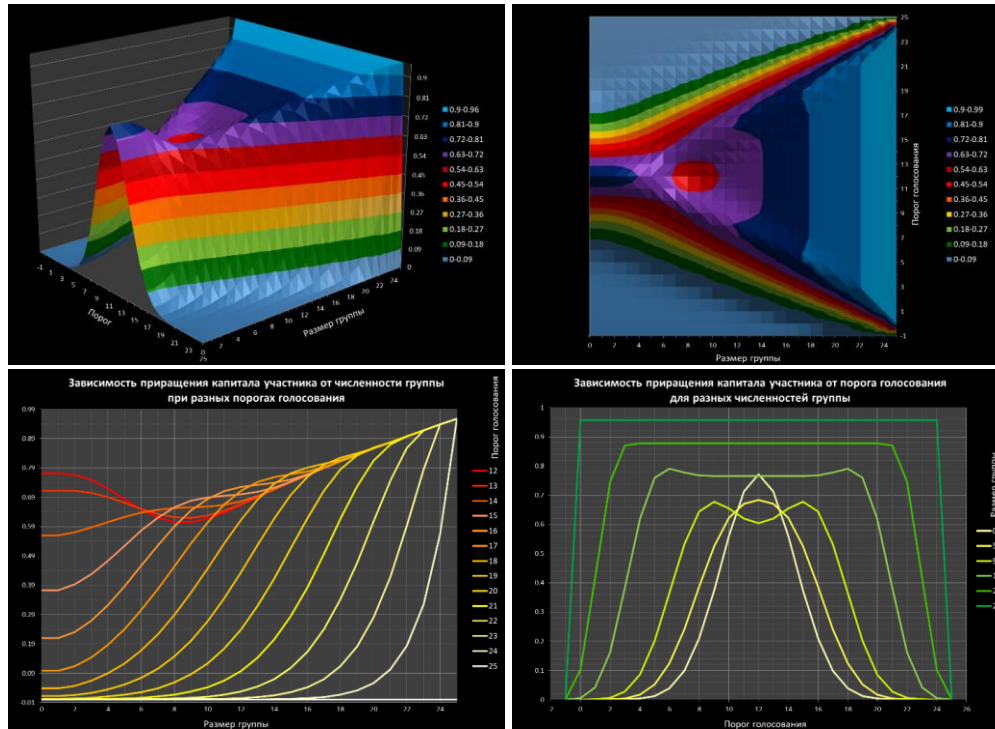


Рис. 5. Среднее приращение капитала агента за 1 шаг; 25 агентов: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

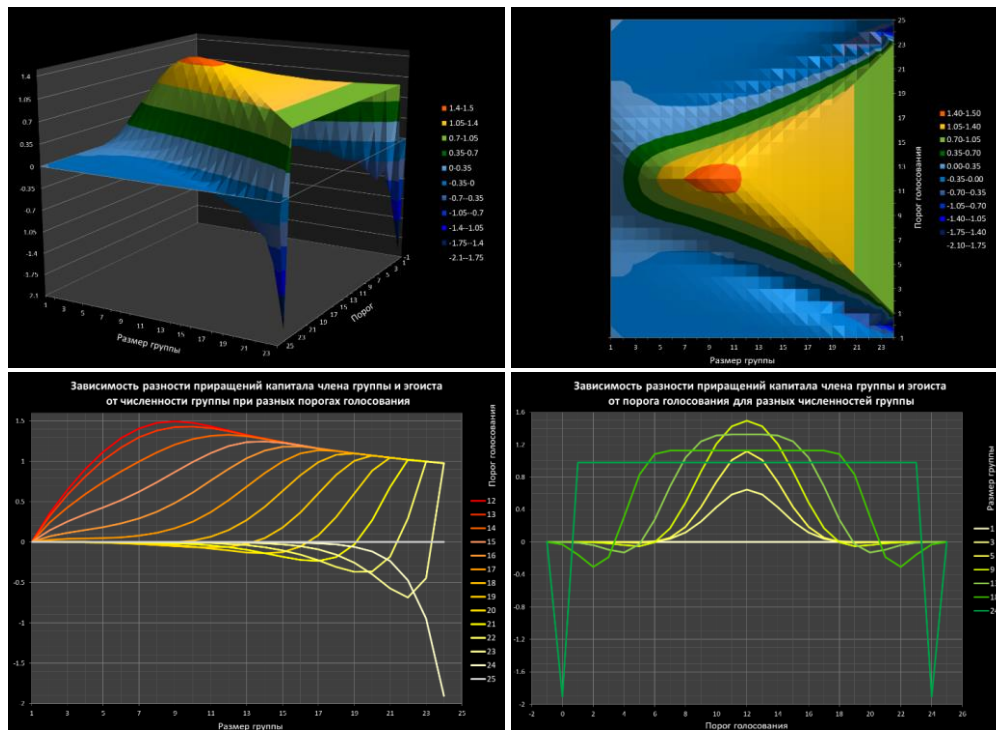


Рис. 6. Разность средних приращений капитала члена группы и эгоиста за 1 шаг; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

Отметим, что эта разность имеет достаточно компактный аналитический вид.

Следствие 2. При гауссовском генераторе предложений разность СПК участника группы и эгоиста выражается формулой

$$M(\tilde{d}_g) - M(\tilde{d}_e) = \frac{\sigma f}{q} \left((P_{[an]-n_g, n_e} - P_{[an], n_e}) \left(\frac{q}{\sqrt{g}f} f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma g} \right) + F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma g} \right) \right) - \right. \\ \left. - (P_{[an]-n_g-1, n_e-1} - P_{[an]-1, n_e-1}) F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma g} \right) - (P_{[an]-1, n_e-1} - P_{[an], n_e}) \right).$$

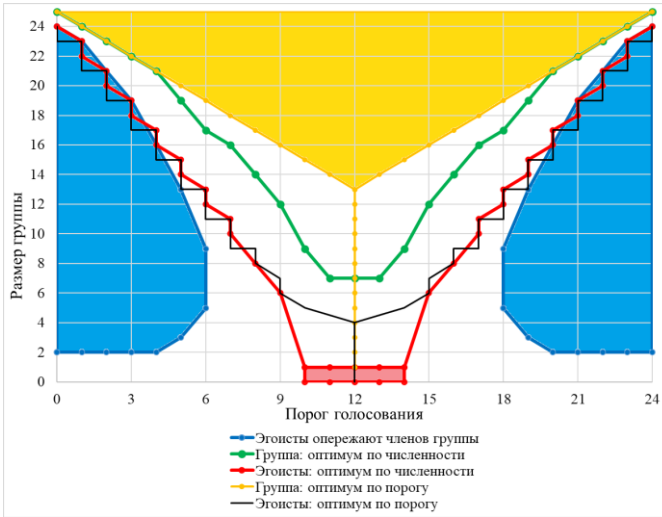


Рис. 7. Области, в которых эгоисты опережают членов группы по СПК и оптимумы СПК эгоистов и членов группы по численности/порогу при фиксированных пороге/численности. 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$

При абсолютных порогах голосования от 7 до 17 (α от¹ 28% до 68%) рассматриваемая разность всегда положительна:

¹ Поскольку число агентов – целое, границы этого отрезка можно задавать с точностью до $1/25 = 4\%$: в полуинтервалах $[28\%, 32\%[$ и $[68\%, 72\%[$; множество реализуемых пропорций поддержки предложений симметрично относительно простого большинства.

выгоднее быть в группе. При удалении от этого отрезка расширяется диапазон численностей группы, при которых выгоднее быть эгоистом. Эти диапазоны показаны голубым на

рис. 7. При самых высоких и самых низких порогах голосования эгоисты лидируют почти при любой структуре общества.

Их превосходство наиболее заметно там, где поверхность СПК эгоистов имеет «пики», т.е. в тех частях зон 4 и 5, где голосов малого числа эгоистов достаточно для принятия выгодных либо блокирования невыгодных для них предложений.

В свою очередь, член группы имеет наибольшее превосходство над эгоистом, когда $n_g = 9$ (36% общества), а процедура – простое большинство. Как отмечено выше, эта же точка доставляет локальный минимум среднему капиталу по всему обществу.

4.2. ДИНАМИКА КАПИТАЛОВ В НЕБЛАГОПРИЯТНОЙ СРЕДЕ

Отметим ряд закономерностей, характерных для умеренно неблагоприятной среды. Пусть $\mu = -1$, $\sigma = 12$. На рис. 8,а показано СПК эгоистов: здесь часть поверхности, соответствующая высоким порогам голосования и очень большой группе, оказывается «сжатой» вдоль вертикальной оси по сравнению с частью (в точности симметричной ей при $\mu = 0$), отвечающей низким порогам. Последняя имеет более высокий пик и заходит (в отличие от первой) в отрицательную область. В зоне 3 (между двумя «хребтами») СПК эгоистов отрицательно. В ней, напомним, предложения принимаются в интересах группы: голосов эгоистов недостаточно для влияния на решения общества. СПК эгоистов в обществах с малой или отсутствующей группой при простом большинстве ниже, чем в нейтральной среде.

СПК члена группы (рис. 8,б) также заходит в отрицательную область – при низких порогах голосования; сильнее всего – когда группа мала. В неблагоприятной среде в этой зоне значений параметров капитал теряют все участники, поскольку принимается много предложений, невыгодных для обеих категорий агентов. Как и в случае $\mu = 0$, СПК члена группы максимально в обществе с простым большинством и $n_g = 7$.

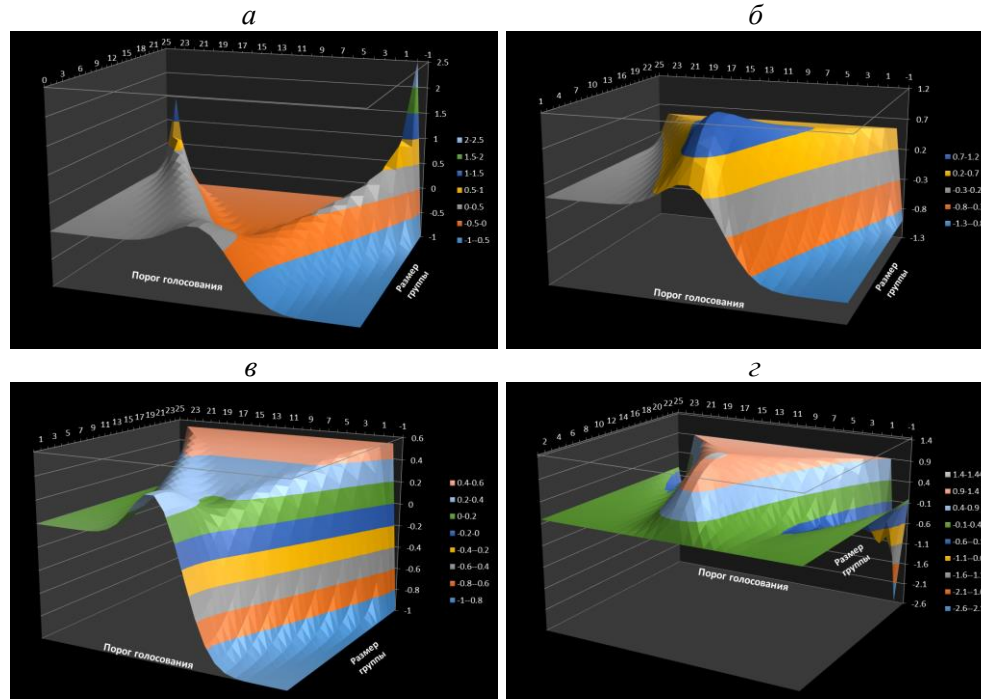


Рис. 8. СПК в двухкомпонентном обществе из $n = 25$ участников при нормальном распределении с $\mu = -1$, $\sigma = 12$ в модели без вымирания: а – эгоисты, б – члены группы: в – среднее по обществу, г – разность между СПК члена группы и эгоиста

СПК по всему обществу также зависит от порога голосования несимметрично (рис. 8,в), принимая сравнительно низкие (в том числе отрицательные) значения при невысоких порогах. В то же время в зоне 3, где СПК эгоистов отрицательно, СПК общества положительно, поскольку группа, имеющая заметное положительное СПК, достаточно велика.

При этом поверхность разности СПК члена группы и эгоиста (рис. 8,г) мало отличается от полученной для случая $\mu = 0$ (в частности, имеет максимум при $n_g = 9$), и можно сделать качественный вывод, что неблагоприятность среды примерно в равной степени затрагивает члена группы и эгоиста. При этом поверхность на рис. 8,г не симметрична относительно $an = 12$.

4.3. СЛУЧАЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

В [3, 11] установлено, что в случае, когда предложения генерируются распределениями с тяжелыми хвостами, динамика капиталов однородных обществ заметно отличается от наблюдаемой при нормальном распределении. Для сравнения с полученными выше результатами рассмотрим зависимость СПК двухкомпонентных обществ от размера группы и порога голосования при генерации предложений симметризованным распределением Парето (далее – *СП-распределение*) с параметром $k = 2,01$ (рис. 9). Это распределение имеет по сравнению с гауссовским высокую вероятность больших выбросов. Распределения сопоставляются по квартилям [3]. При этом нормальному распределению с $\sigma = 12$ соответствует СП-распределение с $k = 2,01$ и $\sigma \approx 276,6$.

В среде с большими выбросами очертания поверхностей СПК эгоистов и членов группы примерно такие же, как при нормальном распределении с теми же квартилями, но наибольшие значения СПК участников существенно выше. При простом большинстве группе выгоднее всего иметь размер 8 (при нормальном распределении капитал ее членов быстрее всего рос при $n_g = 7$), а разница между СПК члена группы и эгоиста максимальна при $n_g = 10$ (в случае нормального распределения – при $n_g = 9$).

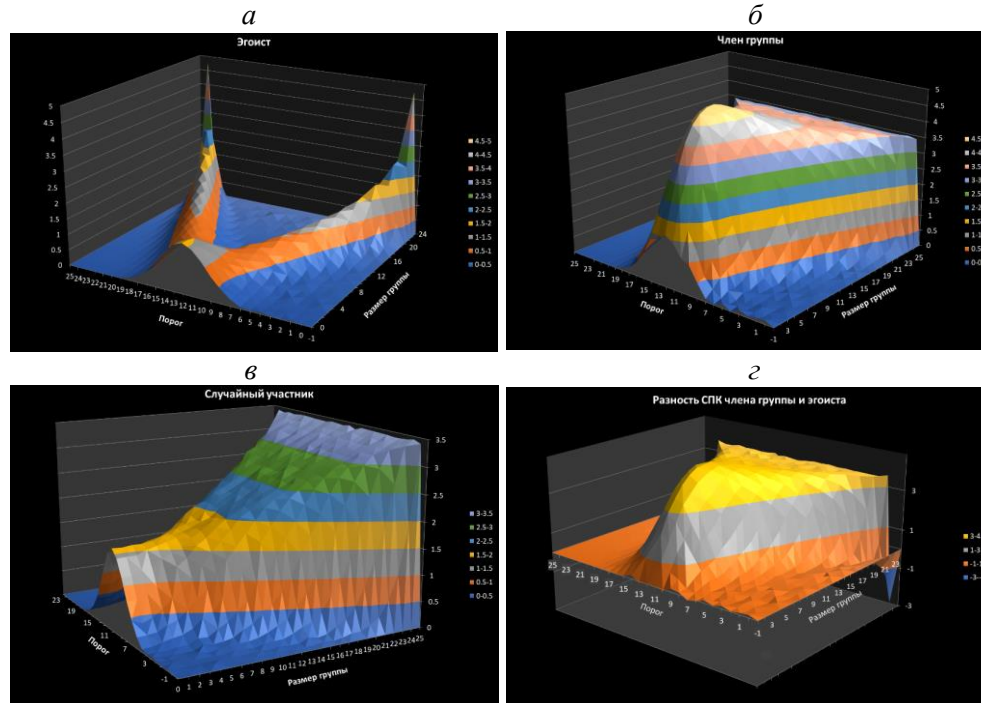


Рис. 9. Поверхности СПК в двухкомпонентном обществе из $n = 25$ участников при СП-распределении с $k = 2,01$, $\mu = 0$ и $\sigma = 276,6$ в модели без вымирания: а – эгоисты, б – члены группы; в – среднее по обществу, г – разность между СПК члена группы и эгоиста

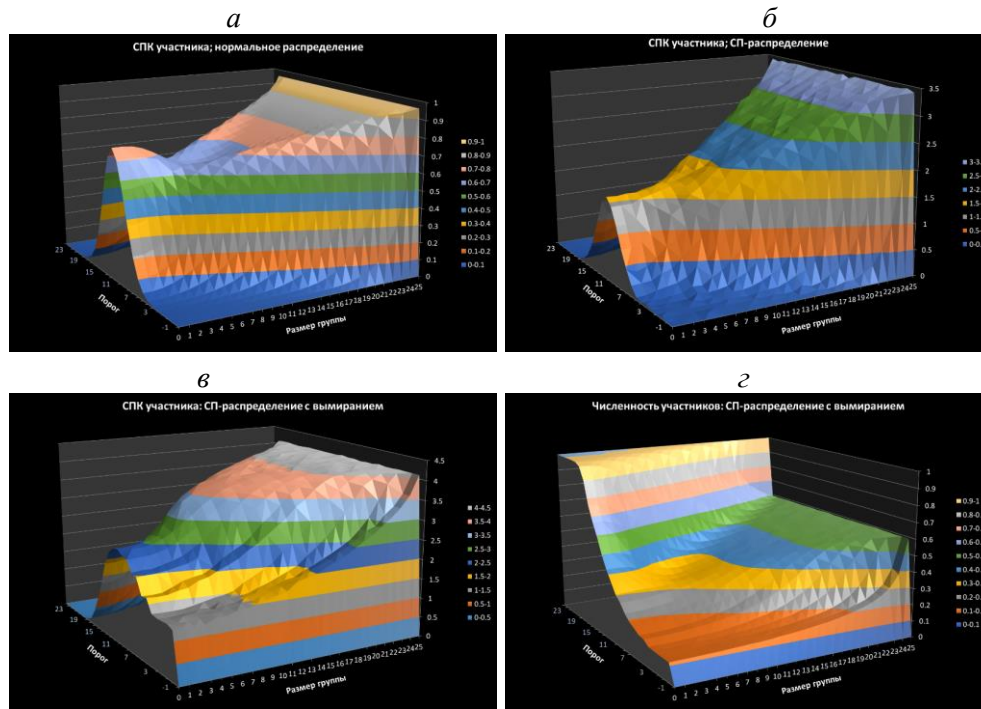


Рис. 10. Показатели общества при $\mu = 0$: а – СПК без вымирания для нормального распределения, б – СПК без вымирания для СП-распределения; в – СПК с вымиранием для СП-распределения, г – относительная численность для СП-распределения. Начальная численность: $n = 25$

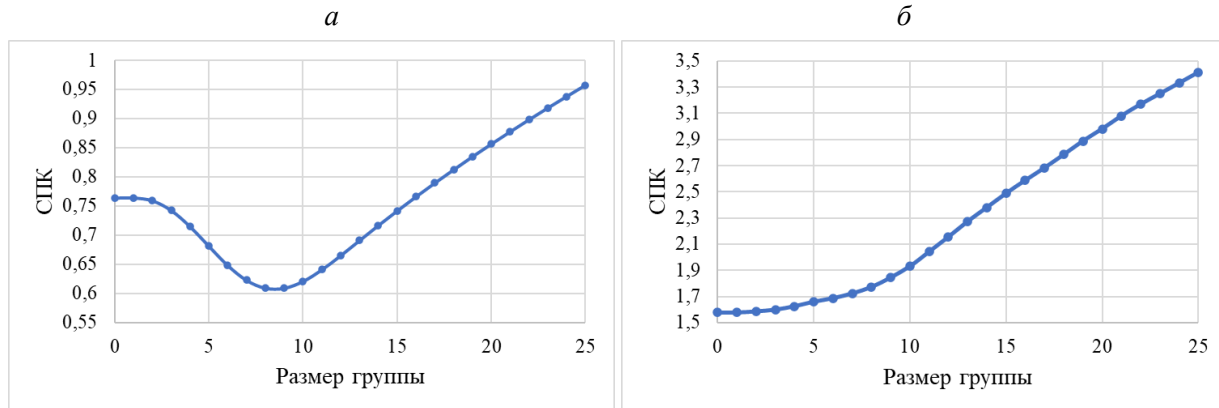


Рис. 11. СПК по обществу из $n = 25$ участников при простом большинстве: а – нормальное распределение с $\mu = 0$, $\sigma = 12$; б – СП-распределение с $k = 2,01$, $\mu = 0$, $\sigma = 276,6$

Форма поверхности СПК по обществу (рис. 9,в) заметно отличается от таковой для нормального распределения (рис. 5, рис. 8,в; для удобства сравнения эти поверхности при $\mu = 0$ представлены на рис. 10,а,б). А именно, СПК агента при СП-распределении не имеет минимума при $n_g = 9$ и при простом большинстве растет с увеличением размера группы (рис. 11). В частности, если расформировать группу из 8 членов, то в случае нормального распределения общество будет богатеть на 27% быстрее, а в случае СП-распределения с $k = 2,01$ – медленнее. То же, разумеется, будет относиться и к собранному со всего общества налогу, если им обложена прибыль участников.

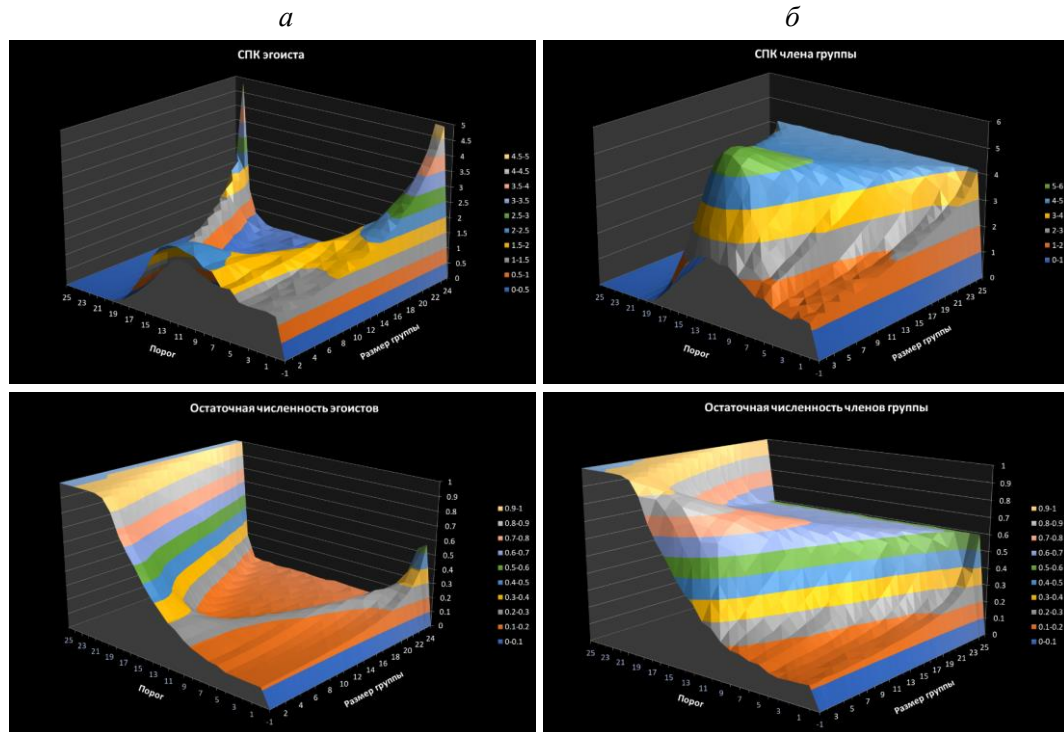
4.4. ДИНАМИКА В МОДЕЛИ С ВЫМИРАНИЕМ

Обратимся к особенностям динамики модели с вымиранием.

На рис. 12 представлены поверхности СПК и средней относительной численности после 500 шагов для эгоистов и членов группы в зависимости от исходного размера группы и порога голосования. Предложения генерируются СП-распределением с $k = 2,01, \mu = 0, \sigma = 276,6$. Результаты получены имитационным моделированием.

Наиболее благоприятны для эгоистов по обоим критериям (СПК и численности) зоны 4 и 5. «Хребет» поверхности СПК эгоистов, находящийся в зоне 5 сравнительно низких порогов голосования, шире, чем «хребет» в зоне 4. В зоне 4 эгоисты, имеющие возможность блокировать невыгодные для них предложения, лучше сохраняют численность, но имеют более низкое СПК, чем в зоне 5, где их голосов достаточно для принятия выгодных для них предложений. В то же время лучше всего численность обеих категорий агентов сохраняется в зоне 2, где предложения принимаются очень редко, а также вблизи границы этой зоны.

В зонах 4 и 5 эгоисты наиболее благополучны, когда их мало. Для членов группы также выгодна ее низкая начальная численность (в данном случае от 3 до 5, т.е. 12–20% числа участников) но – при простом большинстве. Тогда они имеют наибольшее СПК и эффективно сохраняют относительную численность.



За исключением зоны 2, группа сохраняет численность лучше, чем эгоисты. СПК члена группы максимально при $n_g = 6$ и простом большинстве.

Рассмотрим теперь поверхность СПК всего общества (рис. 10,б). При уменьшении исходного размера группы до низких значений СПК заметно падает. При начальной численности группы более 8 СПК выше, чем в случае без вымирания (рис. 9,б). В модели с вымиранием по критерию СПК обществу выгодно иметь группу размером не менее трети от общей численности. Однако рост группы от этого значения увеличивает СПК довольно медленно.

Сравним поверхности численности общества и его СПК (рис. 10,б,г). Численность лучше всего сохраняется при высоких порогах голосования, но при этом СПК близок к нулю, т.к. решения принимаются очень редко. При большой группе и средних порогах голосования общество имеет высокое СПК, но к 500-му ходу не менее 40% участников разоряется.

Таким образом, критерии численности и СПК оценивают общества по-разному: первый максимизируется отказом от принятия предложений, второй – принятием предложений, выгодных для достаточно большой группы, что приводит к довольно интенсивному разорению участников.

Рис. 13 позволяет оценить влияние размера группы на СПК общества в разных средах. Так, при СП-распределении с $k = 2,01$ и порогах голосования среднего диапазона в случае с вымиранием разница между обществом с максимальной ($n_g = 25$) и умеренной ($n_g = 16$) группой невелика (рис. 13,б). Иными словами, численность группы в 64% от всего общества обеспечивает СПК почти максимального достижимого уровня. Тем самым в среде с нередкими аномальными выбросами важно иметь группу размера около $2/3$, но дальнейшее ее увеличение при средних порогах голосования не дает существенного роста СПК.

При нормальном распределении без вымирания (рис. 13,а) и простом большинстве СПК общества из эгоистов фактически равно СПК общества с группой из 16 участников, и они существенно отстают от СПК общества-группы (где $n_g = 25$).

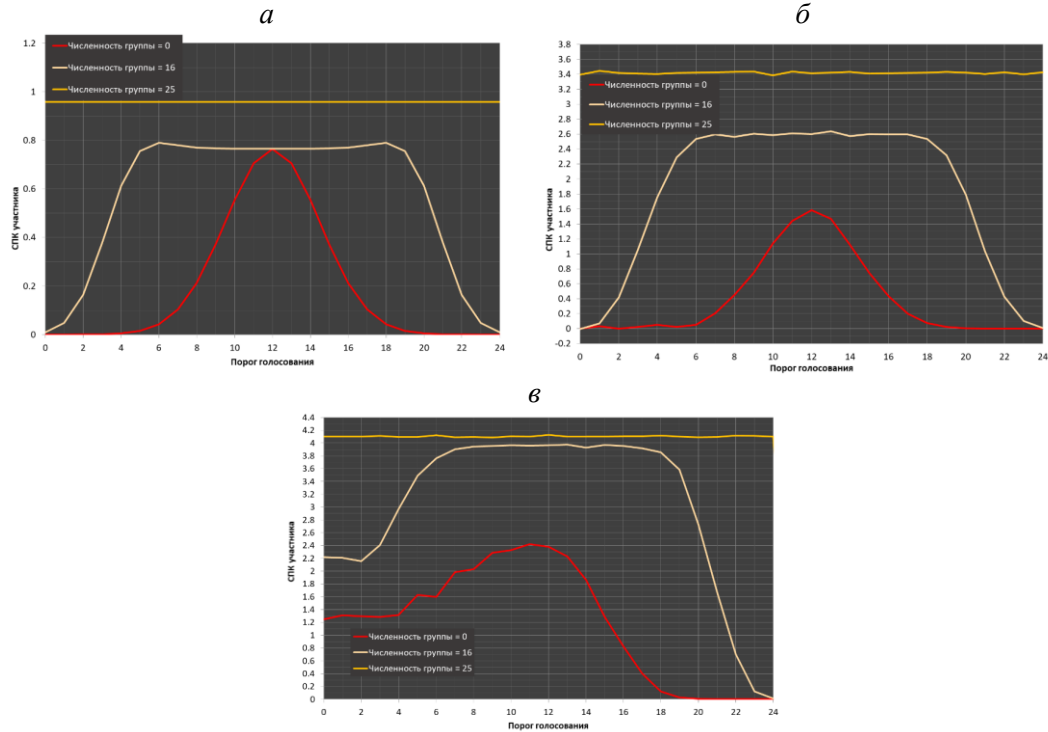


Рис. 13. Срезы поверхностей СПК общества при размерах группы 0, 16 и 25: *а* – нормальное распределение без вымирания, *б* – СП-распределение без вымирания, *в* – СП-распределение с вымиранием

При СП-распределении с $k = 2,01$ без вымирания (рис. 13,б) ситуация промежуточная: СПК общества с $n_g = 16$ значительно выше, чем в обществе из эгоистов, в том числе при простом большинстве, но заметно ниже, чем в обществе-группе. Таким образом, «конкурентоспособность» общества из эгоистов при распределении с тяжелыми хвостами намного ниже, и для достижения высокого среднего капитала нужно иметь большую группу.

5. Обсуждение результатов

В данном разделе обсудим основные выводы работы, как уже сформулированные выше, так и новые.

В статье в предположениях модели ViSE рассмотрены общества, состоящие из группы и эгоистов при разных порогах принятия коллективных решений.

В большинстве случаев групповая стратегия эффективнее эгоистической. При $\mu = 0$ и гауссовском генераторе предложений из 575 рассмотренных нетривиальных обществ с 25 агентами, где представлены обе стратегии ($n_g \in [2, 24]$; $\alpha n \in [0, 24]$), это верно для 347 обществ (60,3%). При порогах голосования от 7 до 17 групповая стратегия побеждает всегда. В то же время при остальных порогах в 70,8% обществ больший ожидаемый капитал обеспечивает эгоистическая стратегия.

Последнее связано с тем, что при низких порогах голосования принимается *большинство* предложений, причем отклоняемые предложения в среднем более разорительны для эгоистов. Тем самым последним удается более эффективно блокировать невыгодные для них предложения. При высоких порогах ситуация зеркальна в отношении принятия/непринятия предложений: они одобряются *редко*, и эгоисты предъявляют к ним более жесткие требования, чем члены группы в терминах доли удовлетворенных агентов своей категории.

Упомянутая «зеркальность» при $\mu = 0$ приводит к симметрии результатов относительно порога большинства $\alpha = 0,5$.

Симметричность функции среднего приращения капитала (СПК) относительно $\alpha = 0,5$ в нейтральной среде при фиксированной структуре общества и симметричном распределении

предложений вытекает из полученных в статье аналитических выражений СПК эгоистов и членов группы в модели с постоянным числом агентов (теорема 1 и ее следствия).

Установлены закономерности влияния благоприятности среды, типа распределения, структуры общества и процедуры голосования на СПК двух категорий участников и всего общества на примере общества из $n = 25$ агентов. Найденные зависимости представлены поверхностями в $\mathbb{R}^3$ и их сечениями. Детально изучен случай нейтральной среды ($\mu = 0$).

Установлено, что для эгоистов наиболее выгодны ситуации, когда их количество n_e мало, а число их голосов, необходимое для принятия или отклонения предложения, – более половины n_e (но не более n_e). Менее выгоден для них локальный максимум, доставляемый обществом, состоящим только из эгоистов.

СПК члена группы при гауссовском генераторе предложений максимально, когда в ней $n_g = 7$ агентов из $n = 25$, а процедура голосования – простое большинство. С ростом n оптимальный размер группы растет как $\sqrt{2n}$ (при $n = 144,5$ млн., например, эта величина равна 17 тыс.).

Значения параметров, выгодные для сравнительно небольшой группы, невыгодны для общества в целом, хотя группа – его часть. Так, среднее по обществу СПК агента имеет локальный минимум при $n_g = 9$ (когда член группы имеет наибольшее превосходство над эгоистом), а при $n_g = 7$ (этот размер группы дает ей наибольшее СПК) – выше этого минимума лишь на 2,6%. Среднее СПК агента максимально, когда все агенты в группе. Общество, где все агенты – эгоисты, а процедура – простое большинство, доставляет среднему СПК агента локальный максимум, составляющий 80,6% от наибольшего значения.

При ухудшении внешних условий доля нетривиальных обществ, в которых групповая стратегия эффективнее эгоистической, медленно растет. Так, при $\mu/\sigma = -1/12$ она составляет 61,4%, а в сильно неблагоприятной среде, где $\mu/\sigma = -1$, равна 64% (против 60,3% в нейтральной среде). В благоприятной среде ситуация симметрична: 61,4% при $\mu/\sigma = 1/12$ и 64% при $\mu/\sigma = 1$. Таким образом, эгоистическая стратегия наиболее конкурентоспособна в нейтральной среде. Отклонения от нейтральности

повышают привлекательность группы.

Некоторые качественные закономерности чувствительны к типу стохастического генератора предложений. Так, при распределении с тяжелыми хвостами (симметризованное распределение Парето с $k = 2,01$) поверхность СПК общества не имеет локального минимума при сравнительно небольшой группе: в случае простого большинства СПК монотонно растет с размером группы, начиная с $n_g = 1$ (рис. 11). Эгоистическая стратегия при таком генераторе оказывается менее конкурентоспособной: групповая стратегия в нейтральной среде дает более высокое СПК для 3/4 нетривиальных обществ (против 3/5 при гауссовском генераторе).

Для распределения с тяжелыми хвостами в статье рассмотрен также вариант модели ViSE с вымиранием. При этом появляется еще один критерий – доля не разорившихся участников. Показано, что эти два критерия в некоторых случаях противоречат друг другу: в обществах, обеспечивающих высокое СПК, разорение может идти интенсивнее, чем в других. Чтобы выбрать один из критериев, нужно ответить на вопрос: «Что важнее – достаток или безопасность?» Альтернативой этому выбору может быть построение агрегированного критерия, балансирующего указанные два.

6. Заключение

В работе изучена динамика модели ViSE для обществ, состоящих из группы и эгоистов.

Получены представления ожидаемых значений капитала как функций от размера группы, порога голосования и других параметров модели. В общем случае нахождение этих величин требует интегрирования; в условиях гауссовского генератора предложений для них получены выражения в стандартных функциях.

Исследованы зависимости этих величин от структуры общества и порога голосования – для гауссовских и паретовских распределений стохастических предложений, нейтральной и умеренно неблагоприятной среды, постоянного и уменьшающегося вследствие разорения числа участников.

Эти зависимости представлены поверхностями в $\mathbb{R}^3$.

Обсуждаются условия, определяющие сравнительную эффективность групповой и эгоистической стратегий, а также выгоду общества в целом. Для сплоченной эгоистичной группы (олигархии, бюрократии, мафии и др.) ей выгоднее всего быть сравнительно небольшой. В модели ViSE эта оптимальная доля, при которой группа наиболее эффективно защищает свои интересы (часто в ущерб остальным агентам) падает с ростом числа агентов n . Примерно та же доля группы оказывается наименее выгодной не только для эгоистов, но и для общества в целом.

Для эгоистов наиболее выгодны ситуации, когда их количество n_e мало, а число их голосов, необходимое для принятия или отклонения предложения, – более половины n_e (но не более n_e). Менее выгоден для них локальный максимум, доставляемый обществом, состоящим из эгоистов.

Общество с постоянным числом участников максимизирует свой капитал, когда все агенты – в группе. Общество, где все агенты – эгоисты, а процедура – простое большинство, доставляет приращению его капитала локальный максимум, который при нейтральной среде и 25 агентах составляет 80,6% от наибольшего значения.

Данное исследование продолжено в работе [6], где изучены сценарии эволюции двухкомпонентного общества при изменении его структуры и порога голосования. В частности, в этой работе обсуждается интерпретация полученных результатов в терминах уровня кооперации в обществе и степени его либеральности.

Литература

1. АФОНЬКИН В.А. *Налоговые схемы стимулирования просоциального голосования в модели ViSE* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 61–68.
2. БОРЗЕНКО В.И., ЛЕЗИНА З.М., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №2. – С. 154–173.
3. МАКСИМОВ В.М., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Социальная*

- динамика, определяемая голосованием: квартильный учет особенностей стохастической среды // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №10. – С. 149–172.
4. МАЛЫШЕВ В.А., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Об оптимальном пороге притязаний группы при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №6. – С. 157–172.
 5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №3. – С. 152–165.
 6. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Кооперация и либерализм: эволюционные сценарии в модели ViSE* // УБС. – ... (?)
 7. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния* // Проблемы управления. – 2008. – №4. – С. 30–37.
 8. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Голосование в стохастической среде: случай двух групп* // Проблемы управления. – 2010. – №1. – С. 18–25.
 9. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Голосование в стохастической среде: феномен убывания полезностей при расширении фракций* // XI Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества, Москва, 6–8 апреля 2010 года. ГУ–ВШЭ, 2010, С. 1–3.
www.hse.ru/data/2010/04/02/1218244162/cheb.doc
 10. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАЛЫШЕВ В.А., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М., АФОНЬКИН В.А. *Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды* // Управление большими системами. – 2016. – Т. 62. – С. 169–187.
 11. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАЛЫШЕВ В.А., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М., АФОНЬКИН В.А. *О сравнительной полезности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №11. – С. 123–149.

12. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М. *Какой процент альтруистов нужен в обществе и на что им следует направлять свои усилия?* // Второй Российский экономический конгресс, Суздаль, 18-22 февраля 2013 г., М.: НЭА, 2013. – С. 1–3.
13. AXELROD R., HAMILTON W.D. *The evolution of cooperation* // Science. – 1981. – V. 211, No. 4489. – P. 1390–1396.
14. CHEBOTAREV P.JU., BORZENKO V.I., LEZINA Z.M., LEZINA I.V., LOGINOV A.K., TSODIKOVA JA.JU. *A model of social dynamics governed by collective decisions* // Abstracts of the International Conference "Mathematical Modelling of Social and Economical Dynamics" (MMSED-2004), June 23–25, 2004. – URL: <http://www.mmsed.narod.ru/articles/artChebotarev.ps>
15. KOLOKOLTSOV V.N., MALAFEYEV O.A. *Understanding Game Theory: Introduction to the Analysis of Many Agent Systems with Competition and Cooperation*. – World Scientific, 2020.
16. MALYSHEV V. *Optimal majority threshold in a stochastic environment* // Group Decision and Negotiation. – 2021. – V. 30. P. 427–446.
17. MOULIN H. *Cooperative Microeconomics: A Game-theoretic Introduction*. – Princeton University Press, 2014.
18. TSODIKOVA Y., CHEBOTAREV P., LOGINOV A. *Modeling Responsible Elite* / Recent Advances of the Russian Operations Research Society. Ed. by F. Aleskerov and A. Vasin. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2020. – P. 89–110.

TWO-COMPONENT SOCIETIES IN THE ViSE MODEL: HOW VOTING THRESHOLD AND GROUP SIZE AFFECT THE CAPITAL DYNAMICS

Pavel Chebotarev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
Doctor of Science, head of laboratory (pavel4e@gmail.com).

Vladislav Maksimov, Moscow Institute of Physics and Technology,
Moscow, PhD student (vladislav.maksimov@phystech.edu).

Abstract: Under the assumptions of the ViSE model, representations of the expected capital gains in societies consisting of a group and egoists are obtained. In the general case, finding these quantities requires integration; for the case of a Gaussian proposal generator, explicit expressions are obtained for them. The dependences of these quantities on the structure of society and the voting threshold are investigated: for Gaussian and symmetrized Pareto distributions of stochastic proposals, a neutral and unfavorable environment, a constant and non-constant number of participants. These dependencies are represented by surfaces in $\mathbb{R}^3$. Conditions that determine the comparative effectiveness of group and egoistic strategies, as well as the benefits of society as a whole, are discussed.

Keywords: social dynamics, voting, cooperation, stochastic environment, homines economici, voting threshold.

УДК 342.8
ББК 67.400.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Х.Х. Хххх.*

*Поступила в редакцию 06.09.2021.
Опубликована XX.XX.2021.*