

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ДЕФИЦИТА МОЩНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹

Зоркальцев В.И.², Пержабинский С.М.³

*(Учреждение Российской академии наук
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО
РАН, Иркутск)*

Исследуется модель минимизации дефицита мощности в электроэнергетической системе (ЭЭС), в которой учитываются нелинейные потери мощности в линиях электропередачи. Модель предназначена для решения задачи оценки надежности ЭЭС. Предлагается способ решения задачи минимизации дефицита мощности, реализованный в виде решения задачи выпуклого программирования методом внутренних точек с использованием квадратичных аппроксимаций. Представлены сравнительные результаты экспериментальных расчетов.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, надежность, дефицит мощности, метод внутренних точек, квадратичные аппроксимации.

1. Введение

В Сибирском энергетическом институте (СЭИ), разработана методика анализа надежности ЭЭС [1, 2, 3].

Методика состоит из трех блоков.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00306а

² Валерий Иванович Зоркальцев, доктор технических наук, профессор (Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130, тел. (3952) 42-78-50).

³ Сергей Михайлович Пержабинский, инженер (sergey_per85@mail.ru).

1. Вероятностный блок, в котором формируются случайным образом возможные состояния ЭЭС.

2. Блок оценки дефицита мощности сформированных расчетных состояний (модель минимизации дефицита мощности).

3. Блок вычисления показателей надежности ЭЭС, где обрабатывается информация, накопленная в результате работы первых двух блоков.

В данной методике блок расчета дефицита мощности занимает центральное место и от его реализации зависит не только качество результатов, но и время решения всей задачи и размер исследуемой ЭЭС. Поэтому к модели минимизации дефицита мощности предъявляются особые требования. Она должна быть агрегированной, максимально адекватной действительности, легко реализуемой, решаемой за максимально короткое время. Чем меньше время оптимизации, тем большее количество случайных состояний можно «проиграть» и, тем самым, увеличить объем накапливаемой информации для ее дальнейшей статистической обработки.

Первые модели оценки дефицита мощности ЭЭС, разработанные в СЭИ, представляют собой решения задачи линейного программирования. Для минимизации дефицита мощности использовался алгоритм Форда-Фалкерсона, затем одноэтапный и двухэтапный алгоритмы метода внутренних точек [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, 5] (распределение суммарного дефицита мощности в системе по узлам проводилось пропорционально нагрузкам в них). При использовании алгоритма Форда-Фалкерсона возникала неоднозначность распределения дефицита по узлам для отдельных расчетных состояний ЭЭС. В результате этого возникала неоднозначность оценок вероятности и математических ожиданий дефицита электроэнергии в узлах системы после выполнения всего цикла расчетов.

Одним из направлений повышения адекватности модели оценки дефицита мощности является учет потерь мощности при передаче ее по межузловым связям. При этом модель приобретает более реальный физический смысл и позволяет получить однозначное решение.

В данной работе рассматривается модель, в которой учитываются потери мощности, представляемые в виде квадратичной функции от передаваемой по линии электропередачи мощности. Предлагается алгоритм метода внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации. Особенность этого алгоритма состоит в том, что в целевую функцию добавляются квадратичные составляющие функций ограничений с весами, равными приближениям к множителям Лагранжа этих ограничений.

2. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетических систем с учетом потерь мощности в сети

Рассматривается схема электроэнергетической системы, состоящая из n узлов и связей между ними. Задана располагаемая мощность $\bar{x}_i$, нагрузка $\bar{y}_i$ в i -ом узле ЭЭС, предел пропускной способности $\bar{z}_{ij}$ линии электропередачи, связывающей узлы i и j , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$. Считается, что для всех i и j , $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$, $\bar{z}_{ij} \geq 0$. Если при некоторых i и j $\bar{z}_{ij} = 0$, то это означает, что связи между узлами i и j нет.

Переменными задачи являются: x_i – используемая мощность, y_i – покрываемая нагрузка в узле i , z_{ij} – поток мощности из узла i в узел j .

Требуется минимизировать суммарный дефицит мощности в системе

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i) \rightarrow \min,$$

учитывая балансы мощности в узлах

$$(2) \quad x_i - y_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} = 0, \quad i=1, \dots, n$$

и линейные двусторонние ограничения-неравенства на переменные

$$(3) \quad 0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i=1, \dots, n,$$

$$(4) \quad 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i=1, \dots, n,$$

$$(5) \quad 0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n.$$

Замечание. Коэффициенты α_{ij} , используемые для описания потерь при передаче электроэнергии из узла i в узел j , заданны и удовлетворяют условию

$$2\alpha_{ij}\bar{z}_{ij} < 1, \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Это условие означает то, что дополнительная единица мощности, передаваемая из узла i в узел j , достигает узла j с положительным значением: при любом $z_{ij} \in [0, \bar{z}_{ij})$

$$\frac{d(z_{ij} - \alpha_{ij}(z_{ij})^2)}{dz_{ij}} > 0, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n.$$

Определение. Тройку векторов x, y, z , удовлетворяющих балансовым уравнениям (2) и неравенствам (3) – (5), будем называть допустимым решением задачи (1) – (5). Множество таких троек векторов образует множество допустимых решений.

Множество допустимых решений задачи (1) – (5), как правило, невыпукло (за исключением некоторых вырожденных случаев). Действительно, пусть существуют такие допустимые решения $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}), (\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$, что $\tilde{z} \neq \hat{z}$, тогда их выпуклая комбинация $(\lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\hat{y}, \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\hat{x}, \lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\hat{z})$ не удовлетворяет балансовым ограничениям (2). Значения функций в левой части ограничений (2) равны $\lambda(1-\lambda)\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(\tilde{z}_{ji} - \hat{z}_{ji})^2 > 0$ для $\lambda \in (0, 1)$ и всех i таких, что существует номер j , при котором $\tilde{z}_{ji} \neq \hat{z}_{ji}$.

Для представления задачи (1) – (5) в виде эквивалентной задачи выпуклого программирования заменим ограничения (2) на следующие:

$$(6) \quad x_i - y_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Множество векторов, соответствующих ограничениям (3) – (6), является выпуклым, для любой выпуклой комбинации двух допустимых решений $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$, $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$ выполняются ограничения (3) – (6).

Вместо задачи (1) – (5) можно использовать задачу выпуклого программирования (1), (3) – (6), множество решений которой содержит множество допустимых решений исходной задачи. В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть значения переменных $\tilde{y}_i, \tilde{x}_i, \tilde{z}_{ij}$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$ являются оптимальным решением задачи (1), (3) – (6), тогда существуют такие $\hat{x}_i, \hat{z}_{ij}$, что значения переменных $\tilde{y}_i, \hat{x}_i, \hat{z}_{ij}$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$ составляют оптимальное решение задачи (1) – (5)

Из приведенной выше теоремы следует, что распределение дефицита мощности по узлам системы, найденное в результате решения задачи (1), (3) – (6), будет оптимальным и в задаче (1) – (5).

Задача (1) – (5) имеет решение, так как множество допустимых решений не пусто ($y=0$, $x=0$, $z=0$ составляют допустимое решение) и ограничено (неравенства (3) – (5) выполняются для любого допустимого решения). Из существования решения в задаче (1) – (5) следует существование решения в задаче (1), (3) – (6). Докажем, что решение в задаче (1) – (5) единственно по переменным, составляющим компоненты вектора y .

Теорема 2. Решение задачи (1), (3) – (6) единственно по переменным y_i , $i=1, \dots, n$.

Доказательство.

Предположим, что у задачи (1), (3) – (6) существует два оптимальных решения $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ и $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$. Значения целевой

функции в этих точках совпадают: $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \tilde{y}_i)$. Если значение целевой функции равно нулю, то $\tilde{y} = \hat{y}$ поскольку оба вектора равны $\bar{y}$. Поэтому рассмотрим случай, когда режим является дефицитным, т.е. $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i) > 0$.

Зафиксируем заданное значение $\tilde{y}$, найдем значения переменных z из решения следующей задачи:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} \rightarrow \min ,$$

при условиях

$$(8) \quad x_i - \tilde{y}_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(9) \quad 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(10) \quad 0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Задача (7) – (10) имеет единственное решение $(\tilde{x}^*, \tilde{z}^*)$, поскольку целевая функция непрерывна и строго вогнута, а множество допустимых решений выпукло. Для $\hat{y}$ аналогичным способом найдем $(\tilde{x}^*, \tilde{z}^*)$. Решения $(\tilde{y}, \tilde{x}^*, \tilde{z}^*)$, $(\hat{y}, \hat{x}^*, \hat{z}^*)$ являются оптимальными в задаче (1), (3) – (6).

Если выполняется равенство $\tilde{z}^* = \hat{z}^*$, то очевидно, что $\tilde{y} = \hat{y}$. Предположим, что $\tilde{z}^* \neq \hat{z}^*$, т.е. существуют связи между узлами сети, потоки мощности по которым отличаются. Если потоки различаются только между недефицитными узлами, то $\tilde{y} = \hat{y}$. Поэтому будем считать, что существует дефицитный узел h и узел l , для которых $\tilde{z}_{lh}^* \neq \hat{z}_{lh}^*$. Поскольку узел h является дефицитным, то

$$(11) \quad \tilde{x}_h^* - \tilde{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \tilde{z}_{jh}^*) \tilde{z}_{jh}^* + \tilde{z}_{lh}^* - \alpha_{lh} (\tilde{z}_{lh}^*)^2 = 0,$$

$$(12) \quad \hat{x}_h^* - \hat{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \hat{z}_{jh}^*) \hat{z}_{jh}^* + \hat{z}_{lh}^* - \alpha_{lh} (\hat{z}_{lh}^*)^2 = 0,$$

причем $\tilde{x}_h^* = \hat{x}_h^*$ и $\sum_{j=1}^n \tilde{z}_{hj}^* = \sum_{j=1}^n \hat{z}_{hj}^* = 0$ в силу дефицитности узла h и минимальности суммарных потерь мощности в сети.

Возьмем выпуклую комбинацию оптимальных решений $(\tilde{y}, \tilde{x}^*, \tilde{z}^*), (\hat{y}, \hat{x}^*, \hat{z}^*)$. Например,

$$(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}) = (0,5(\tilde{y} + \hat{y}), 0,5(\tilde{x}^* + \hat{x}^*), 0,5(\tilde{z}^* + \hat{z}^*)).$$

Причем $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \tilde{y}_i)$, т.к. $\hat{y}$ принадлежит множеству оптимальных значений переменной y .

Покажем, что значение целевой функции $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)$ можно улучшить. Для этого рассмотрим баланс мощности в узле h

$$\begin{aligned} \hat{x}_h - \hat{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \hat{z}_{jh}) \hat{z}_{jh} + (1 - \alpha_{lh} \hat{z}_{lh}) \hat{z}_{lh} = & 0,5(\tilde{x}_h^* - \tilde{y}_h + \tilde{z}_{lh}^* + \\ & + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \tilde{z}_{jh}^*) \tilde{z}_{jh}^*) + 0,5 \left(\hat{x}_h^* - \hat{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \hat{z}_{jh}^*) \hat{z}_{jh}^* + \hat{z}_{lh}^* \right) - \\ & - 0,25\alpha_{lh} \left((\tilde{z}_{lh}^*)^2 + (\hat{z}_{lh}^*)^2 \right) - 0,5\alpha_{lh} \tilde{z}_{lh}^* \hat{z}_{lh}^*. \end{aligned}$$

Из уравнений (11), (12) получим

$$\begin{aligned} 0,5\alpha_{lh} (\tilde{z}_{lh}^*)^2 &= 0,5 \left(\tilde{x}_h^* - \tilde{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \tilde{z}_{jh}^*) \tilde{z}_{jh}^* + \tilde{z}_{lh}^* \right), \\ 0,5\alpha_{lh} (\hat{z}_{lh}^*)^2 &= 0,5 \left(\hat{x}_h^* - \hat{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \hat{z}_{jh}^*) \hat{z}_{jh}^* + \hat{z}_{lh}^* \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\hat{x}_h - \hat{y}_h + \sum_{j=1, j \neq l}^n (1 - \alpha_{jh} \hat{z}_{jh}) \hat{z}_{jh} + (1 - \alpha_{lh} \hat{z}_{lh}) \hat{z}_{lh} =$$

$$\begin{aligned}
&= 0,25\alpha_{lh} \left((\tilde{z}_{lh}^*)^2 + (\hat{z}_{lh}^*)^2 \right) - 0,5\alpha_{lh} \tilde{z}_{lh}^* \hat{z}_{lh}^* = \\
&= 0,25\alpha_{lh} (\tilde{z}_{lh}^* - \hat{z}_{lh}^*)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, величину потребления $\hat{y}_h$ в узле h можно увеличить на $0,25\alpha_{lh} (\tilde{z}_{lh}^* - \hat{z}_{lh}^*)^2$, и тем самым снизить суммарный дефицит в системе. Значит, предположение о существовании различных оптимальных значений переменных y_i , $i = 1, \dots, n$ не верно. Теорема доказана.

3. Замечания по реализации модели оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в сети

Для сокращения количества неизвестных при реализации модели, потоки мощности между узлами i и j можно представить в виде одной переменной. Ограничения (5), (6) примут следующий вид

$$(13) \quad \underline{z}_j \leq z_j \leq \bar{z}_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(14) \quad x_i - y_i + \sum_{j=1}^m t_{ij} z_j - \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_{ij} (z_j) (z_j)^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь m – число связей между узлами, t_{ij} – элементы матрицы связей размера $n \times m$,

$$t_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ связаны, и } i \text{ — источник, } j \text{ — нагрузка;} \\ 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ связаны, и } i \text{ — нагрузка, } j \text{ — источник;} \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ не связаны.} \end{cases}$$

Функции $\tilde{\alpha}_{ij}(z_j)$ определяются следующим образом

$$\tilde{\alpha}_{ij}(z_j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } t_{ij} z_j > 0, \\ 0, & \text{если } t_{ij} z_j \leq 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Величина $\underline{z}_j = -\bar{z}_j$ для всех j .

При нахождении минимального суммарного дефицита мощности возможна ситуация, когда в результате решения задачи (1), (3), (4), (13), (14) получено отрицательное значение потока мощности между узлами, т.е. $z_j < 0$. Это означает, что поток мощности по j -ой связи направлен в обратную, относительно заданного направления, сторону.

Некоторые узлы i могут не обладать генерирующими мощностями ($\bar{x}_i = 0$). Обозначим через L множество номеров узлов с нулевой располагаемой мощностью. Далее рассматривается только случай, когда во всех узлах $\bar{y}_i > 0$ и у всех связей $\bar{z}_j > 0, \underline{z}_j < 0$.

Для решения задачи (1), (3), (4), (13), (14) используется алгоритм метода внутренних точек, основывающийся на методе линеаризации [4]. На каждой итерации $k = 1, 2, \dots$, в точке линеаризации x^k, y^k, z^k нелинейные ограничения-равенства заменяются на их линейную аппроксимацию. На приращение $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ векторов x, y, z в данной точке накладывается ограничение путем добавления к целевой функции квадрата евклидовой нормы векторов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Для уменьшения погрешностей линеаризации при решении нелинейных задач оптимизации можно учитывать квадратичные составляющие разложения функций-ограничений в ряд Тейлора. А именно можно при поиске направления улучшения решения включать в целевую функцию вспомогательной задачи квадратичные составляющие аппроксимаций функций-ограничений исходной задачи с весами, равными оценкам множителей Лагранжа этих ограничений. Такие идеи высказывались ранее применительно к разным алгоритмам оптимизации, в частности, Б.Н. Пшеничным для разрабатываемого им метода линеаризации [6]. Проведенные ранее экспериментальные исследования для задач с нелинейными ограничениями [7] показали, что метод внутренних точек, использующий квадратичные аппрок-

симации, работает быстрее, чем метод внутренних точек, базирующийся только на линеаризации.

Вычислительный процесс метода внутренних точек проходит таким образом, что ограничения задачи выполняются в строгой форме. Поэтому для упрощения процедуры выбора стартовой внутренней точки предлагается для узлов $i \in L$ ввести фиктивную переменную $x_i > 0$. Тогда задача нахождения минимального суммарного дефицита мощности примет вид:

$$(15) \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - y_i) + N \sum_{i \in L} x_i \rightarrow \min_{y, x},$$

учитывая ограничения (3), (4), (13), (14) и условие

$$(16) x_i \geq 0, \quad i \in L,$$

где N – число, большее единицы. В расчетах использовалось N равное двум.

Опишем процедуру выбора стартовой точки. Будем считать, что изначально потоков мощности в сети нет, т.е. $z_j^0 = 0$, $j = 1, \dots, m$. Для всех узлов i в качестве стартовых значений переменных x_i , y_i возьмем такие x_i^0 , y_i^0 , удовлетворяющие ограничениям (3), (4), (13), записанным в строгой форме, чтобы x_i^0 было больше y_i^0 . Т.о. на первой итерации неравенства (14) также будут выполняться в строгой форме.

4. Алгоритм метода внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации

Далее представлено описание алгоритма внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации, для задачи нахождения минимального суммарного дефицита мощности, записанной в общем виде.

Рассмотрим задачу минимизации линейной функции при выпуклых квадратичных ограничениях

$$(17) c^T x \rightarrow \min,$$

$$(18) x^T A_i x + d_i^T x \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(19) \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}.$$

Переменные x образуют вектор из R^n . Заданными являются матрицы A_i размера $n \times n$, $i=1, \dots, m$, векторы $c \in R^n$, $d \in R^n$, $\bar{x} \in R^n$, $\underline{x} \in R^n$. Предполагается, что матрицы A_i симметрические неотрицательно-определенные, что обуславливает выпуклость функций $x^T A_i x + d_i^T x$, $i=1, \dots, m$.

Предполагаем известным начальное приближение $x^0 \in R^n$, удовлетворяющее условиям (18), (19) в строгой форме

$$(x^0)^T A_i x^0 + d_i^T x^0 < 0, \quad i=1, \dots, m,$$

$$\underline{x} < x^0 < \bar{x}.$$

На итерации k , $k=1, 2, \dots$, сначала вычисляется направление корректировки $\Delta x^k \in R^n$, являющийся решением следующей задачи

$$(20) \quad c^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_1^k \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_2^k \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_3^k \Delta x \rightarrow \min,$$

где

$$D_1^k = \text{diag} \left(\min \{ \bar{x}_j - x_j^k, x_j^k - \underline{x}_j \} \right)^{-2},$$

$$D_2^k = \sum_{i=1}^m v_i^{k-1} A_i,$$

$$D_3^k = \sum_{i=1}^m \frac{(A_i x^k + d)(A_i x^k + d)^T}{((x^k)^T A_i x^k + d^T x^k)^2},$$

$$v_i^{k-1} = \max \{ 0, u_i^{k-1} \},$$

u_i^{k-1} — множители Лагранжа ограничений (18), вычисленные на $(k-1)$ -ой итерации. При $k=1$ положим $v_i^0 = 1$, $i=1, \dots, m$.

Слагаемые $\frac{1}{2} \Delta x^T D_1^k \Delta x$, $\frac{1}{2} \Delta x^T D_3^k \Delta x$, добавляемые в целевую функцию вспомогательной задачи, можно интерпретировать, как штрафы за приближение к границам допустимой области.

Матрица $D_2^k = \sum_{i=1}^m v_i^{k-1} A_i$ представляет собой сумму квадратичных составляющих функций-ограничений с весами, равными приближениям к множителям Лагранжа этих ограничений. В методе внутренних точек, базирующемся на линеаризации, вместо матрицы D_2^k используется единичная матрица того же размера.

Вспомогательная задача (20) сводится к решению системы линейных уравнений с симметрической положительно-определенной матрицей:

$$(D_1^k + D_2^k + D_3^k) \Delta x = -c.$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом квадратного корня.

После нахождения направления корректировки вычисляется шаг корректировки по следующему правилу

$$(21) \lambda_k = \gamma \min \{ \lambda_k^1, \lambda_k^2 \}, \text{ при заданном } \gamma \in (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k^1 &= \max \{ \lambda : (x^k + \lambda \Delta x^k)^T A_i (x^k + \lambda \Delta x^k) + \\ &+ d^T (x^k + \lambda \Delta x^k) \leq 0, i = 1, \dots, m \}, \\ \lambda_k^2 &= \max \{ \lambda : \underline{x} \leq x^k + \lambda \Delta x^k \leq \bar{x} \} \end{aligned}$$

Итеративный переход осуществляется по формуле

$$(22) x^{k+1} = x^k + \lambda_k \Delta x^k, \text{ для всех } k = 1, 2, \dots$$

Основываясь на необходимых и достаточных условиях оптимальности Куна-Таккера, в качестве критерия останова можно использовать выполнение следующих неравенств

$$(23) \left\| c + \sum_{i=1}^m v_i^k (A_i x^k + d) + \eta^k - \zeta^k \right\| \leq \varepsilon_1,$$

$$v_i^k (-(x^k)^T A_i x^k - d^T x^k) \leq \varepsilon_2, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(24) \eta_j^k (\bar{x}_j - x_j^k) \leq \varepsilon_2,$$

$$\zeta_j^k (x_j^k - \underline{x}_j) \leq \varepsilon_2, \quad j = 1, \dots, n,$$

при заданных малых положительных числах $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Здесь $\eta^k, \zeta^k \in R^n$ – векторы приближений к множителям Лагранжа ограничений (19).

Для вырабатываемых алгоритмом приближений к оптимальному решению ограничения (18), (19) на каждой итерации выполняются в строгой форме

$$(x^k)^T A_i x^k + d_i^T x^k < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\underline{x} < x^k < \bar{x}.$$

Это следует из допустимости стартовой точки и правил вычисления шага.

Если вектор x^k не удовлетворяет условиям (23), (24), то из выполнения неравенства

$$-c^T \Delta x^k > 0$$

и правил определения шага корректировки (21) следует, что значение целевой функции уменьшится:

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k.$$

Если неравенства (23), (24) в точке x^k выполняются, то вычислительный процесс останавливается.

5. Результаты экспериментальных расчетов

Экспериментальные исследования проводились на серии из 50 режимов, сформированных при помощи датчика случайных чисел, для заданной схемы ЭЭС [2], представленной на рис.1.

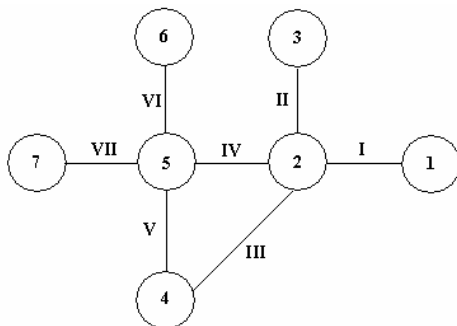


Рис. 1. Тестовая расчетная схема ЭЭС

В табл. 1 и табл. 2 приведены основные характеристики узлов и связей одного из тестовых режимов.

Таблица 1. Характеристика узлов расчетного режима тестовой схемы ЭЭС

Номер узла, i	Располагаемая мощность $\bar{x}_i$, МВт	Максимальная нагрузка $\bar{y}_i$, МВт	Баланс в i узле $\bar{x}_i - \bar{y}_i$, МВт
1	2458	2734	-276
2	1600	1760	-160
3	383	528	-145
4	1350	170	1180
5	409	1647	-1238
6	921	514	407
7	0	200	-200
Итого	7121	7553	-432

Таблица 2. Характеристика связей расчетного режима тестовой схемы ЭЭС

Номер связи,	Максимально возможные потоки по связи j , МВт	Коэффициент потерь мощно-
--------------	---	---------------------------

j	$\underline{z}_j$	$\bar{z}_j$	сти в связи, α_j
I	-360	360	0,000078
II	-150	150	0,000050
III	-200	200	0,000046
IV	-800	800	0,000017
V	-1200	1200	0,000009
VI	-300	300	0,000008
VII	-150	150	0,000009

Тестовая схема по заданным режимам рассчитывалась двумя алгоритмами: методом внутренних точек, использующим квадратичные аппроксимации, и методом внутренних точек, базирующимся на линеаризации. В табл. 3 и табл. 4 указано минимальное, максимальное и среднее число итераций, потребовавшееся для решения всех тестовых задач при заданных ε_1 , ε_2 . В условиях (23), (24) использовались разные ε_1 , ε_2 .

Таблица 3. Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,05$, $\varepsilon_2 = 0,05$	14	49	19,62
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,05$, $\varepsilon_2 = 0,05$	14	83	24,22

Таблица 4. Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$	16	74	23,20
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$	16	147	40,22

Результаты расчета показали, что методом внутренних точек, использующим квадратичные аппроксимации, решение получается в среднем за 1,2 – 2 раза меньшее количество итераций, чем методом, базирующимся на линеаризации. Причем, с уменьшением значений ε_1 , ε_2 различие в скорости вычислений увеличилось. Сопоставление работы двух алгоритмов по количеству итераций справедливо, поскольку на каждой итерации в сравниваемых методах требуется примерно один и тот же объем вычислений и основные затраты времени связаны с необходимостью решать систему с симметрической положительно определенной матрицей.

6. Заключение

1. Для модели оценки дефицита мощности ЭЭС с квадратичными потерями мощности в ЛЭП предложен способ представления модели в виде задачи выпуклого программирования

путем замены балансовых ограничений-равенств на ограничения, записанные в форме неравенств.

2. Доказано, что дефицит мощности в данной модели однозначно распределяется по узлам электроэнергетической системы.

3. Результаты экспериментальных исследований подтвердили работоспособность метода внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации, и показали пригодность для решения задачи нахождения минимального суммарного дефицита мощности с учетом ее квадратичных потерь в сетях. Значимость применения данного алгоритма для решения задачи (1), (3), (4), (13), (14) состоит в том, что благодаря учету активных ограничений задачи и эффективной минимизации погрешностей линеаризации увеличивается скорость работы алгоритма, по сравнению с исходным методом, основанном на линеаризации.

4. Для решения задачи поиска минимального суммарного дефицита мощности требуется найти значения $2n+t$ переменных, где t – число связей, n – количество узлов. В предлагаемом методе на каждой итерации решается система линейных уравнений с симметрической положительно определенной матрицей размера $t \times t$. Тем самым находятся значения t переменных, через которые выражаются остальные. Такой подход позволяет сократить время вычислений.

Литература

1. РУДЕНКО Ю.Н., ЧЕЛЬЦОВ М.Б.. *Надежность и резервирование в электроэнергетических системах*. – Новосибирск: Наука, 1974. – 263 с.
2. КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Комплекс моделей оптимизации режимов расчетных состояний при оценке надежности электроэнергетических систем* / Препринт. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. С. 32–39.
3. КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Модель оценки надежности электроэнергетических систем при долгосрочном пла-*

нировании их работы // Электричество. 2000. № 11. С. 17-24.

4. ДИКИН И.И., ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Итеративное решение задач для математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек)*. – Новосибирск: Наука, 1980. – 143 с.
5. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем* / Препринт. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. С. 17–22.
6. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Метод линеаризации*. – Москва: Наука, 1983. – 135 с.
7. ПЕРЖАБИНСКИЙ С.М. *Алгоритм внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации* // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование / Иркутский государственный университет путей сообщения – 2008 – №3(19) – С. 97-101.

ARTICLE TITLE (THE MODEL OF OPTIMIZATION OF POWER SHORTAGE OF ELECTRIC SYSTEM)

Valery Zorkaltsev, Melentiev Energy System Institute of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (*Irkutsk, Lermontov st., 130, (3952) 42-78-50*).

Sergey Perzhabinsky, Melentiev Energy System Institute of SB RAS, Irkutsk, engineer (*sergey_per85@mail.ru*).

Abstract: The model of minimization of power shortage in electrical power system is analyzed. Nonlinear power losses in power lines are took into account in the model. The model is intended for solving problem of evaluation of electric power system reliability. The method for solving problem of power shortage minimization is offered. This method is realized as solving convex problem by interior point algorithm with quadratic approximations. The compare results of solving test problems are presented.

Keywords: electrical power system, reliability, power shortage, interior point method, quadratic approximation.