

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.¹

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Рассмотрена задача о существовании статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных управляемых и наблюдаемых объектов в общем случае и дано ее решение. Очевидным преимуществом управления статической обратной связью по выходу по сравнению с управлением по состоянию является то, что для ее реализации не требуется измерять все переменные состояния. Не менее значимое преимущество перед управлением в форме линейного динамического регулятора состоит в том, что размерности замкнутого и исходного объектов равны. Показано, что с помощью приведения матриц входа и выхода к блочно-однородному виду, исходное билинейное неравенство относительно матрицы квадратичной функции Ляпунова и матрицы регулятора можно представить в виде единой блочной симметрической матрицы. Благодаря этому удастся сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов по выходу. В соответствии с представленной теоремой, сделан вывод о том, что если матрицу объекта можно разбить на блоки таким образом, что хотя бы один из ее диагональных блоков был гурвицевым, то статический регулятор существует. Если это условие выполняется, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал регулятор по состоянию для неустойчивого диагонального блока матрицы объекта. Полученные результаты дают четкие критерии, по которым можно делать выводы относительно возможности статической стабилизации заданного линейного объекта. Представлены примеры, на которых продемонстрировано применение полученных результатов.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, теорема Ляпунова, лемма Шура.

1. Введение

Одним из наиболее востребованных способов стабилизации линейных объектов, по ряду вполне понятных причин, является статическая обратная связь по выходу. В общем случае, синтез таких регуляторов сводится либо к решению билинейного матричного неравенства относительно двух переменных, либо к

¹ Алексей Валерьевич Мухин, аспирант (muhin-aleksei@yandex.ru).

поиску двух взаимно-обратных положительно определенных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств. В обоих случаях задача представляется невыпуклой. Решению этой задачи посвящено большое количество публикаций. Не претендуя на полноту, укажем лишь некоторую часть из них (например, [7-10, 12,13]). Предложено большое количество различных алгоритмов, которые в ряде случаев оказываются успешными и могут применяться для решения самых разных практических задач. В частности, в статье [1] предложен алгоритм поиска двух взаимнообратных матриц и доказана его сходимость. Обзорная работа [13], а также работы [10-12] содержат описание различных подходов и средств, применяемых для решения билинейных матричных неравенств. Рассмотрены также различные частные случаи, для которых задача синтеза статических регуляторов по выходу может быть сведена к решению линейных матричных неравенств [5, 13]. Вместе с тем, насколько нам известно, в общем случае, задача синтеза статических регуляторов по выходу является не решенной в смысле существования необходимых и достаточных условий, выражаемых в форме линейных матричных неравенств. Кроме того, в общем случае, не существует четких критериев относительно размерностей входа и выхода, по которым можно делать выводы о существовании статических регуляторов по выходу (см. например, [6]). Именно отсутствие таких критериев, серьезно затрудняет решение задачи синтеза.

В статье представлено решение задачи о существовании статических регуляторов по выходу. Показано, что если в матрицу объекта A можно представить в блочном виде с двумя диагональными квадратными блоками таким образом, что, по крайней мере, один из блоков будет гурвицевым, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал статический регулятор по состоянию для неустойчивого блока матрицы A .

Статья организована следующим образом. Первая глава представляет собой введение. Вторая глава содержит постановку задачи. В третьей главе представлено решение задачи на основе теоремы о существовании статического регулятора по выходу. Здесь также вводится понятие блочно-однородных матриц

входа и выхода, играющих важную роль для основных результатов работы. Четвертая глава содержит применение полученных результатов для статической стабилизации нескольких линейных объектов. Завершает основную часть статьи заключение.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу стабилизации линейного управляемого и наблюдаемого стационарного объекта с помощью статического регулятора по выходу. Дан неустойчивый объект вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx \end{aligned}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта;

$y \in R^p$ – измеряемый выход;

$u \in R^m$ – вход;

$A \in R^{n \times n}$ – матрица объекта;

$B \in R^{n \times m}$ – матрица входа;

$C \in R^{p \times n}$ – матрица выхода.

Для стабилизации (1) применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид

$$(2) \quad u = Ky$$

где $K \in R^{m \times p}$ – матрица регулятора.

Уравнение объекта (1) с учетом (2) примет замкнутый вид

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + BKCx$$

Запишем матрицу замкнутого объекта

$$(4) \quad A_c = A + BKC$$

Без потери общности, ограничим размерность выхода p следующим образом

$$(5) \quad m \leq p < n$$

Введенные ограничения не являются принципиальными, а напротив, вполне естественными и в большинстве практических задач выполняются. Если все же $m > p$, то выкладки будут аналогичными. Тогда, задача заключается в том, чтобы определить необходимые и достаточные условия относительно размерностей входа m и выхода p , при которых статический регулятор по

выходу, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутого объекта с матрицей (4), существует.

3. Решение задачи

Прежде чем переходить к решению задачи, приведем некоторые вспомогательные результаты, которые понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим произвольную действительную матрицу линейного объекта

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Представим ее в блочном виде с квадратными диагональными блоками

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Докажем лемму:

Лемма 1. Любую гурвицеву матрицу можно представить в блочном виде таким образом, что, по крайней мере, один из двух ее диагональных блоков будет гурвицевым, т.е.

$$(8) \quad \exists i \in \{1 \leq i \leq 2\} \rightarrow \lambda_{\max}(A_{ii} \in \mathbb{R}^{k \times k}) < 0$$

где $\lambda_{\max}(A_{ii}) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\operatorname{Re} \lambda_i(A_{ii})\}$.

Доказательство. Пусть матрица A вида (7) гурвицева. Значит, в соответствии с теоремой Ляпунова существует такая матрица

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} > 0, \text{ что выполняется следующее неравенство}$$

$$(9) \quad \Psi = AY + YA^T = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0$$

Блоки матрицы Ψ определяются следующим образом:

$$(10) \quad \Psi_{11} = A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^T + A_{12}Y_{12}^T + Y_{12}A_{12}^T$$

$$(11) \quad \Psi_{12} = A_{11}Y_{12} + A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T + Y_{12}A_{22}^T$$

$$(12) \quad \Psi_{22} = A_{21}Y_{12} + Y_{12}^T A_{21}^T + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T$$

Предположим обратное, что ни один из блоков матрицы A не является гурвицевым. Для разрешимости неравенства (9) необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$(13) \quad A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^T + A_{12}Y_{12}^T + Y_{12}A_{12}^T < 0$$

$$(14) \quad A_{21}Y_{12} + Y_{12}^T A_{21}^T + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T < 0$$

где $Y_{ii} > 0$.

Поскольку матрица Y_{12} входит в оба неравенства, то обеспечить разрешимость обоих неравенств одновременно невозможно. Если, например, разрешимо неравенство (13), то разрешимость (14) будет определяться только матрицей Y_{22} . Но т.к. A_{22} не гурвицева, то обеспечить разрешимость (14) только одной матрицей Y_{22} невозможно. Следовательно, хотя бы один из диагональных блоков гурвицевой матрицы A должен быть гурвицевым. Лемма доказана.

Отметим, что если в матрице A выполняется условие (8), то это не гарантирует того, что матрица гурвицева, т.е. обратное утверждение не верно.

Рассмотрим второй вспомогательный результат, который в дальнейшем будет играть ключевую роль. Введем в рассмотрение блочно-однородные матрицы входа и выхода. Именно, матрицы B и C являются блочно-однородными, если они удовлетворяют следующим условиям

$$(15) \quad B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}$$

$$(16) \quad C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n_x-p)} & C_p \end{pmatrix}$$

где B_m и C_p – квадратные матрицы полного ранга.

Благодаря такому представлению, произведение матриц BKC в (4) можно представить в виде блочной матрицы, все блоки которой, за исключением одного, равного $\hat{K} = B_m K C_p$, будут нулевыми. Понятно, что в общем случае, матрицы входа и выхода являются произвольными и не являются блочно-однородными. Покажем, что с помощью линейных преобразований исходного объекта, матрицы входа и выхода всегда могут быть получены в соответствии с (15) и (16). Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 2. *В пространстве состояния объекта с матрицей A всегда можно выбрать такой базис, в котором матрицы входа и выхода будут иметь блочно-однородный вид.*

Доказательство. Будем считать, что относительно матриц входа и выхода возможны два наиболее часто встречающихся на

практике случая. В первом случае в управлении и измерении задействованы разные переменные состояния, т.е. $R^m \cap R^p = \emptyset$. Произведение матриц выхода и входа в таком случае всегда будет удовлетворять условию

$$(17) \quad CB = 0_{p \times m}$$

Это условие будет также выполняться когда

$$(18) \quad B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_m \end{pmatrix} \text{ и } C = (C_p \ 0_{p \times (n-p)}),$$

либо

$$(19) \quad B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix} \text{ и } C = (0_{p \times (n-p)} \ C_p)$$

Во втором случае переменные, задействованные в управлении и измерении, частично или полностью совпадают. Произведение матриц выхода и входа в таком случае будет ненулевым. Так как $p \geq m$, то получим

$$(20) \quad CB = \begin{pmatrix} L_p \\ 0_{(p-m) \times p} \end{pmatrix}$$

Это условие будет также выполняться если

$$(21) \quad B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_m \end{pmatrix} \text{ и } C = (0_{p \times (n-p)} \ C_p),$$

а также, если

$$(22) \quad B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix} \text{ и } C = (C_p \ 0_{p \times (n-p)})$$

Для определенности докажем условие леммы для первого случая, т.е. когда в управлении и измерении задействованы разные переменные состояния. Для второго случая доказательство будет аналогичным. Пусть размерность объекта является нечетным числом, т.е. $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ и пусть $p = k + 1$ и $m = n - p$. Положим, что в измерении задействованы переменные, например, с нечетными индексами, т.е. если вектор состояния $x^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, то измеряемыми будут $x_1, x_3, \dots, x_n$. Выполним преобразование вектора x так, чтобы матрицы B и C удовлетворяли, например, (18). Для этого, введем новый вектор состояния

$$(23) \quad \hat{x}^T = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_n)$$

Определим переменные вектора $\hat{x}$ через переменные x следующим образом

$$(24) \quad \hat{x}^T = (x_1, x_3, \dots, x_{2k+1}, \dots, x_n, x_2, x_4, \dots, x_{2l}, \dots, x_{n-1})$$

Тогда, матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ в новом базисе будут удовлетворять виду (18). Выбранному базису соответствует линейное преобразование матрицы объекта вида $\hat{A} = PAP^T$. Матрица $P \in R^{n \times n} \{0,1\}$ обеспечивает перестановку строк в соответствии с новым вектором $\hat{x}$. Причем, для такой матрицы справедливо равенство $P^T = P^{-1}$. В результате, получим матрицу $\hat{A}$ с переставленными строками и столбцами. Отметим, что, так как матрицы $\hat{A}$ и A являются подобными, то их спектры совпадают. Запишем исходный объект в новом базисе

$$(25) \quad \hat{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x}$$

где $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_m \end{pmatrix}$;

$$\hat{C} = (C_p \quad 0_{p \times (n-p)}).$$

Таким образом, если в управлении и измерении используются разные переменные состояния, то всегда можно выбрать такой базис, в котором матрицы входа и выхода будут блочно-однородными. Для второго случая, когда $R^m \cap R^p \neq \emptyset$, также можно выбрать линейное преобразование матрицы объекта таким образом, что матрицы B и C в новом базисе будут блочно-однородными в соответствии с (21) или (22). Лемма доказана.

Если же матрицы входа и выхода совершенно произвольные, то и в этом случае также можно выбрать соответствующий базис и привести их к виду, например, (22). Матрица объекта в новом базисе будет равна $\hat{A} = PAP^{-1}$. Отметим, что обратное преобразование к исходному базису всегда существует. Принимая во внимание результаты второй леммы, докажем теорему, представляющую основной результат статьи:

Теорема (о существовании статического регулятора по выходу). *Статический регулятор по выходу для неустойчивого объекта с матрицей A существует тогда и только тогда, когда ее можно представить в блочном виде таким образом, что хотя бы один из двух диагональных блоков этой матрицы будет гурвицевым.*

Доказательство. Рассмотрим неустойчивую (не гурвицеву) матрицу A вида (7). Пусть один из блоков этой матрицы является гурвицевым. Для определенности будем считать, что таковым является блок $A_{22} \in R^{k \times k}$ ($k < n$). Будем считать, что в управлении и измерении задействованы частично одинаковые переменные и потребуем, чтобы матрицы B и C удовлетворяли условиям

$$(26) \quad B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}$$

$$(27) \quad C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix}$$

Получим произведение $BKC = \begin{pmatrix} \hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как матрицы B_m и C_p невырожденные, то уравнение $\hat{K} = B_m K C_p$ всегда разрешимо относительно K . Поэтому, будем считать, что $\hat{K} = K$. Согласуем размерности блоков матрицы BKC с размерностью боков матрицы A . Пусть $p = n - k$. В силу того, что $m \leq p$, то справедливо равенство $m + r = p$. Откуда имеем $n - m = k + r$. Получим следующую матрицу

$$(28) \quad BKC = \begin{pmatrix} K_0 & 0_{p \times k} \\ 0_{k \times p} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

где $K_0 = \begin{pmatrix} K \\ 0_{r \times p} \end{pmatrix} \in R^{p \times p}$.

Матрица замкнутой системы, с учетом (28) будет равна

$$(29) \quad A_c = \begin{pmatrix} A_{11} + K_0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Применим теорему Ляпунова об устойчивости для матрицы A_c и представим получившееся билинейное неравенство в виде блочной матрицы

$$(30) \quad A_c Y + Y A_c^T = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0$$

где $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} > 0$.

Блоки матрицы Ψ определяются следующим образом

$$(31) \quad \Psi_{11} = A_{11} Y_{11} + Y_{11} A_{11}^T + A_{12} Y_{12}^T + Y_{12} A_{12}^T + K_0 Y_{11} + Y_{11} K_0^T$$

$$(32) \quad \Psi_{12} = A_{11} Y_{12} + A_{12} Y_{22} + Y_{11} A_{21}^T + Y_{12} A_{22}^T + K_0 Y_{12}$$

$$(33) \quad \Psi_{22} = A_{21}Y_{12} + Y_{12}^T A_{21}^T + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T$$

где $Y_{ii} > 0$.

Для разрешимости (30) необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$(34) \quad \Psi_{ii} < 0, \quad i = 1, 2$$

Так как A_{22} гурвицева, то $\Psi_{22} < 0$ при любой Y_{12} . Положим, что $Y_{12} = 0_{p \times k}$. Неравенство $\Psi_{11} < 0$ в таком случае будет выполняться тогда и только тогда, когда матрица замкнутой системы $A_c^{11} = A_{11} + K_0$ является гурвицевой. С учетом того, что $B^T = (I \quad 0)$ перепишем матрицу A_c^{11} в виде

$$(35) \quad A_c^{11} = A_{11} + BK$$

Откуда следует, что для выполнения неравенства $\Psi_{11} < 0$ необходимо и достаточно, чтобы для матрицы A_c существовал статический регулятор по состоянию. Известно (см. например, [3], стр. 265), что для этого должно выполняться ранговое условие вида

$$(36) \quad \text{rank}(B \ A_{11}B \ \dots \ A_{11}^{n-1}B) = n$$

Если (36) выполняется, то пара (A_{11}, B) управляема. Считаем, что пара (A_{11}, B) управляема, и получаем, что оба необходимых условий разрешимости неравенства (30) выполняются. Тогда, для разрешимости последнего необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство

$$(37) \quad \Psi_{11}[Y_{11}, K_0] < \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T[Y_{11}, Y_{22}, K_0]$$

Видим, что разрешимость (37) определяется только матрицей Y_{22} . В силу гурвицевости A_{22} неравенство $A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T < 0$ будет иметь множество решений. Поэтому, выбором матрицы Y_{22} всегда можно обеспечить разрешимость неравенства (37), а значит и исходного неравенства (30), что эквивалентно существованию статического регулятора по выходу. Пусть теперь ни один из блоков A не является гурвицевым. Разрешимость $\Psi_{22} < 0$ можно теперь обеспечить только за счет пары матриц Y_{12} и Y_{22} . Для выполнимости $\Psi_{11} < 0$ при фиксированной матрице Y_{12} необходимо также, чтобы пара (A_{11}, B) была управляемой. Считаем, что условие (36) выполняется. Тогда, для разрешимости (30) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(38) \quad \Psi_{11}[Y_{11}, Y_{12}, K_0] < \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T [Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}, K_0]$$

Разрешимость неравенства (38) при фиксированных в неравенствах $\Psi_{ii} < 0$ матрицах Y_{11} , Y_{12} и K_0 определяется только матрицей Y_{22} , расположенной в правой части. Но так как A_{22} не является гурвицевой, то изменяя только Y_{22} обеспечить разрешимость этого неравенства принципиально невозможно. Следовательно, по крайней мере, один из двух диагональных блоков должен быть гурвицевым. Теорема доказана. ■

Отметим, что размерности пространства измерения m для матриц A и A_{11} , вообще говоря, могут не совпадать. Поэтому, размерность входа m в (36) должна соответствовать матрице A_{11} . Минимальное значение размерности выхода при этом равно размерности неустойчивого блока матрицы A . Это условие также можно записать в виде рангового соотношения

$$(39) \quad \min\{\text{rank}(C)\} = n - k$$

На основании теоремы, сформулируем следствие:

Следствие. Если матрицу объекта можно представить в блочном виде таким образом, что хотя бы один из двух диагональных блоков этой матрицы будет гурвицевым, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал статический регулятор по состоянию для неустойчивого блока матрицы объекта.

Если $k = 0$, т.е. ни один из диагональных блоков не является гурвицевым, то $p = n$. Следовательно, стабилизация такой матрицы возможна только регулятором по состоянию.

4. Примеры

Рассмотрим три неустойчивых линейных объекта: электромагнитный подвес, ротор в электромагнитных подшипниках, а также двухзвенный перевернутый маятник. Применим полученные результаты для решения задачи статической стабилизации по выходу указанных объектов.

Матрица A , описывающая систему уравнений электромагнитного подвеса, имеет вид [2]

$$(40) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Поскольку нижний блок $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -7.5 \end{pmatrix}$ является гурвицевым, то максимальная размерность устойчивого диагонального блока $k = 2$. Следовательно, минимальная размерность выхода $p = n - k = 1$. Это означает, что при правильном выборе матриц входа и выхода, замкнутый объект должен быть асимптотически устойчивым. Действительно, если задать матрицы B и C в виде

$$(41) \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(42) \quad C = B^T$$

то, матрица замкнутой системы может быть гурвицевой. Представим ее в виде

$$(43) \quad A_c = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix}$$

При $k > 7.5$ получаем гурвицеву матрицу A_c . Если матрица B имеет отличный от (41) вид, то значение p будет не меньше, чем $p = 1$. Если $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, то задача решается при $p = 2$.

Рассмотрим второй объект, описывающий вращение вертикального жесткого ротора в электромагнитных подшипниках. Матрицу объекта можно представить в блочном виде [5]

$$(44) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in R^{12 \times 12}$$

Нижний диагональный блок $A_{22} \in R^{4 \times 4}$ является отрицательно определенным, и, поэтому, гурвицевым. Значит, размерность неустойчивого диагонального блока A_{11} равна 8. Следовательно, минимальная размерность выхода должна быть равной $p = 8$. Значение входа, при котором пара (A_{11}, B) является наблюдаемой равно $m = 4$. Отметим, что для матрицы A это значение составляет $m = 1$. Применяв аппарат линейных матричных неравенств для решения матричного неравенства в форме (30), убеждаемся, что при выборе матриц входа и выхода, например, в виде $B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix}$ замкнутый объект оказывается асимптотически устойчивым.

Рассмотрим последний объект – двухзвенный перевернутый маятник. Матрица объекта равна [3, стр. 49]

$$(45) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что устойчивое подпространство для такой матрицы не существует, т.е. $k = 0$. Следовательно, $p = n = 4$. Это означает, что статическая стабилизация по выходу такого объекта не возможна. Для стабилизации такого объекта можно вычислить статический регулятор только по состоянию.

5. Заключение

На основании полученных результатов можно заключить, что критерием существования статического регулятора по выходу для линейного управляемого и наблюдаемого объекта является существование устойчивого диагонального блока матрицы объекта. Если матрицу объекта удастся разбить на блоки таким образом, что хотя бы одни из двух диагональных блоков является гурвицевым, что статический регулятор по выходу существует. Минимальная размерность выхода в этом случае будет равна размерности неустойчивого подпространства. Размерность входа определяется из рангового условия управляемости неустойчивого матричного блока. Приведенные результаты представляют новизну и позволяют существенно облегчить поиск статических регуляторов по выходу, т.к. дают четкие значения размерностей входа и выхода, при которых задача будет разрешимой.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д.В. Баландина за обсуждение результатов, а также за ценные и полезные замечания.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц* // *АиТ.* – 2005. № 1. – С. 82–99.

2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения* // Изв. РАН. ТиСУ. – 2017. № 3. – С. 12–24.
3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007. – 281 с.
4. МУХИН А.В. *Синтез статических регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств* // Управление большими системами. Выпуск 92. М.: ИПУ РАН. 2021. С. 38-42.
5. МУХИН А.В. *Математическое моделирование процесса стабилизации жесткого ротора, вращающего в электромагнитных подшипниках* // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2021. № 2. – С. 36-48.
6. ШУМАФОВ М.М. *Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор* // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. Т. 6 (64). Вып.4. – С. 564-591.
7. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
8. ASTOLFI A., COLANERI P. *An algebraic characterization for the static output feedback stabilization problem* // American Control Conference, Arlington, VA, 2001. –P. 1408–1413.
9. CAO Y.-Y., LAM J., SUN Y.-X. *Static output feedback stabilization: an ILMI approach* // Automatica. – 1998. –Vol. 34. – P. 1641–1645.
10. EL GHAOU L., OUSTRY F., AITRAMI M. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. –Vol. 42. – P. 1171–1176.
11. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc. of American Control Conference. – 1999. –Vol. 2. –P. 1385–1389.
12. HENRION D., LOEFBERG J., KOCVARA M., STINGL M. *Solving polynomial static output feedback problems with*

PENBMI // Proc. joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf., Sevilla, Spain, 2005.

13. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. – Vol. 42. – P. 11–26.

ABOUT STATIC OUTPUT CONTROLLER EXISTING

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of the existence of static output controllers for linear continuous stationary controlled and observed objects in the general case is considered and its solution is given. The obvious advantage of static output feedback control over state control is that it does not require measuring all state variables to implement it. An equally significant advantage over the control in the form of a linear dynamic controller is that the dimensions of the closed and initial objects are equal. It is shown that by reducing the input and output matrices to a block-homogeneous form, the initial bilinear inequality with respect to the matrix of the Lyapunov quadratic function and the regulator matrix can be represented as a single block symmetric matrix. Thanks to this, it is possible to formulate the necessary and sufficient conditions for the existence of static output controllers. In accordance with the presented theorem, it is concluded that if the matrix of an object can be divided into blocks in such a way that at least one of its diagonal blocks was Hurwitz, then a static regulator exists. If this condition is met, then for the existence of a static output controller, it is necessary and sufficient that there is a state controller for an unstable diagonal block of the object matrix. The obtained results allow us to formulate criteria by which conclusions can be drawn regarding the possibility of static stabilization of a given linear object. Examples are presented, which demonstrate the application of the results obtained.

Keywords: static output controller, Hurwitz's matrix, Lyapunov's theorem, Schur's lemma.

УДК 517.977

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...