

УДК 519.1 + 519.6  
ББК 22.176

## **ЗАДАЧА ДЕЛЕЖА ЗАТРАТ НА СОЗДАНИЕ ВЕБ-КОММУНИКАТОРА КАК КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА <sup>1</sup>**

**Мазалов В.В. <sup>2</sup>, Печников А.А. <sup>3</sup>, Чирков А.В. <sup>4</sup>,  
Чуйко Ю.В. <sup>5</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных  
математических исследований КарНЦ РАН, Петрозаводск)*

*Рассматривается задача дележа затрат на создание общего сайта-коммуникатора для заданного целевого множества сайтов. В качестве математической модели предложена кооперативная игра, в которой игроками являются владельцы сайтов целевого множества, объединяющиеся для создания сайта-коммуникатора с целью уменьшения среднего количества кликов, требуемых для перехода с одного сайта на другой.*

Ключевые слова: вебометрика, веб-граф, кооперативная игра, дележ.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-07-00023-а

<sup>2</sup> Владимир Викторович Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор, (vmazalov@krc.karelia.ru).

<sup>3</sup> Андрей Анатольевич Печников, кандидат физико-математических наук, доцент, (pechnikov@krc.karelia.ru).

<sup>4</sup> Александр Владимирович Чирков, инженер-программист, (avchirkov@krc.karelia.ru).

<sup>5</sup> Юлия Васильевна Чуйко, кандидат физико-математических наук, (julia@krc.karelia.ru).

## 1. Постановка задачи

Целевым множеством  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  называется множество сайтов, сформированное по некоторому заданному признаку. Примерами целевых множеств могут служить сайты классических университетов России или сайты учреждений РАН.

Фрагментом Веба на множестве  $T$  называется множество сайтов  $T$  и множество всех гиперссылок, существующих между сайтами из  $T$ . Схемой фрагмента Веба называется ориентированный граф  $G = (T, E)$  без петель и кратных дуг, где  $E$  – множество дуг, причем дуга  $e(i, j) \in E$  существует тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна гиперссылка с сайта, соответствующего вершине  $i$ , на сайт, соответствующий вершине  $j$ .

Дуги, то есть гиперссылки между сайтами, могут различаться по весу (или “длине”). Действительно, при переходе между сайтами по гиперссылкам имеют большое значение такие характеристики “доступности” ссылки, как: глубина вложенности страницы, с которой сделана ссылка, относительно начальной страницы; сделана ссылка из меню или из сплошного текста на странице и т.п. Чем ссылка сильнее “спрятана”, тем больше усилий нужно потратить на переход по ней, и тем большей считаем длину соответствующей ей дуги.

Одной из важных характеристик графа  $G = (T, E)$  является его связность. В работах [2, 3] показано, что важную роль в увеличении связности университетского и академического Веба играют веб-коммуникаторы, т.е. сайты, не входящие в целевое множество, но имеющие большое количество входящих ссылок с сайтов из  $T$  и/или исходящих ссылок на эти сайты. Как правило, веб-коммуникаторы возникают в Вебе “естественным образом”, они не учитывают (да и не должны учитывать) специфику взаимосвязей целевого множества.

Предположим, что владельцы сайтов целевого множества решили создать некий общий сайт, который в нашей терминологии называется веб-коммуникатором (например, ректоры универси-

тетов пришли к соглашению о создании сайта ассоциации университетов). Поскольку на создание и поддержку сайта требуются финансовые ресурсы, возникает вопрос о том, каким должен быть размер взноса каждого владельца сайта, входящего в  $T$ . Мы изначально исходим из того, что в данном случае не используется принцип уравнивания, когда все участники платят одинаково. На самом деле ценность создаваемого веб-коммуникатора различна для разных участников, поэтому и взносы должны быть неодинаковыми.

Может возникнуть ситуация, где создание коммуникатора не нужно ни одному из участников. Например, в сообществе официальных сайтов подразделений Карельского научного центра сайт Президиума КарНЦ РАН (<http://www.krc.karelia.ru>) имеет ссылки на все сайты институтов КарНЦ РАН, которые в свою очередь ссылаются на сайт Президиума. Здесь сайт Президиума уже фактически является таким коммуникатором, и создание дополнительного коммуникатора не уменьшит средний путь ни к одному из участников. Мы не будем рассматривать такие сообщества, считая, что создание коммуникатора выгодно хотя бы для одного из участников.

Дальнейшие рассуждения справедливы при условии, что граф  $G = (T, E)$  – сильно связный, то есть существует путь конечной длины, соединяющий любую пару вершин. Пусть  $d(i, t)$  – длина кратчайшего пути из вершины  $i$  в вершину  $t$  в графе  $G$ , где  $i, t \in T$ . Тогда критерием доступности сайта  $t$  на множестве  $T$  может быть средняя длина пути в заданную вершину  $t \in T$  из любой вершины  $i \in T$ ,  $i \neq t$ , которая задается следующим образом:

$$midd(t) = \frac{\sum_{i \in T, i \neq t} d(i, t)}{n - 1}.$$

Предположим, что игроки договорились создать веб-коммуникатор  $h$ , с которого обязательно будут сделаны гиперссылки весом 1 на все сайты из  $T$ , и с каждого сайта из  $T$  будет сделана гиперссылка на  $h$ , также имеющая единичный вес. Тогда

средняя длина пути в вершину  $t$  находится как

$$midd^h(t) = \frac{\sum_{i \in T, i \neq t} d^h(i, t)}{n - 1}.$$

В этом случае, с учетом путей, содержащих добавленную вершину  $h$ , для  $i \in T$  верно неравенство  $midd^h(i) \leq 2$  (на сайт  $i$  существуют ссылки с некоторых сайтов из  $T$  и длина пути равна 1, либо кратчайший путь проходит через сайт-коммуникатор  $h$  и длина пути равна 2). Тогда выигрыш  $i$ -го участника равен  $v(i) = midd(i) - midd^h(i)$ .

Обозначим  $Z$  стоимость разработки и поддержки сайта  $h$ , а взнос каждого игрока –  $z_i$ , причем  $Z = \sum_{i \in T} z_i$ . Требуется ответить на вопрос, каковы должны быть значения  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , справедливые (в некотором смысле) для каждого игрока-владельца сайта целевого множества.

## 2. Эгоистичный подход

Один из простых подходов к разделению платы за создание коммуникатора – пропорциональный раздел. Считаем, что каждый участник действует исключительно в собственных интересах, принимая во внимание только ту выгоду, которую получит от участия в создании коммуникатора. Тогда соответствующим вариантом разделения будет назначение вклада каждого участника пропорционально выигрышу, который он получит.

Пример 1. Рассмотрим сообщество четырех сайтов, связанных между собой, как на рис. 1. Считаем, что дуга  $(0, 1)$  имеет длину 10, а все остальные – длину 1. Сайт 0 находится в самом выигрышном положении – на него с любого из сайтов сообщества можно попасть не более чем за два перехода длиной 1, в то время, как он сам ставит ссылку только на сайт 1 и с очень большим весом, значительно увеличивая другим сайтам средние длины путей до них. Выигрыши участников от создания коммуникатора равны

соответственно  $\{0, 9, 6\frac{1}{3}, 3\}$ . Формально от создания коммуникатора сайт 0 ничего не выигрывает, следовательно, при данном подходе к разделению не должен вкладываться в создание нового сайта. Однако, это выглядит не совсем справедливым, учитывая, что сайт 0 ведет себя некорректно по отношению к остальным. •

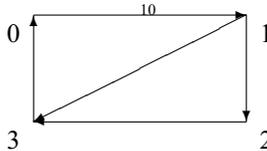


Рис. 1. Простое сообщество сайтов.

Как видно из примера 1, при таком варианте разделения участники, которым создание коммуникатора формально не приносит никакой дополнительной выгоды, ничего не платят за создание коммуникатора.

### 3. Кооперативный подход

Рассматриваемая задача может быть также сформулирована с использованием методов кооперативной теории игр. Такой подход представляется более справедливым, так как разделение платы за создание коммуникатора выполняется уже с учетом поведения и ценности каждого из участников по отношению к коалиции. Пусть  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество игроков (владельцев сайтов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ), коалицией называется всякое подмножество  $S \in I$ . Мы считаем коалицией множество игроков, участвующих в создании коммуникатора, причем коммуникатор будет ссылаться только на участников коалиции, и только они будут ссылаться на коммуникатор. Обозначим  $v(S)$  выигрыш коалиции  $S$ , где  $v$  – характеристическая функция, которую требуется построить для изложенной выше содержательной постановки.

Выигрыш коалиции  $S$  равен  $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$ , где  $v(i) = midd(i) - midd_S^h(i)$  рассчитывается с учетом, того что коммуникатор создается только для членов коалиции  $S$ . Очевидно, что

для всех участников  $v(\{i\}) = 0$ , так как создание коммуникатора “только для себя” не изменяет длины ни одного из путей в веб-графе. Выигрыш гранд-коалиции – это суммарный выигрыш всех участников, когда коммуникатор создается для всех. Мы считаем, что в сообществе может создаваться только один коммуникатор, то есть участники разделяются на тех, кто в коалиции и участвует в создании коммуникатора, и тех, кто не участвует.

Предлагаемый подход основан на разделении платы за создание веб-коммуникатора пропорционально компонентам вектора Шепли, строящемуся с учетом среднего вклада каждого участника в образование выигрыша гранд-коалиции. Плата за создание сайта делится между членам сообщества  $T$  пропорционально величинам

$$\Phi_i = \sum_{S \subseteq T} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

равным долям каждого участника в общем выигрыше гранд-коалиции  $T$ .

Пример 2. Рассмотрим сообщество, описанное в примере 1. В результате кооперативного разделения игроки несут затраты на создание коммуникатора, пропорциональные компонентам вектора Шепли  $\{5\frac{1}{2}, 5\frac{2}{3}, 4\frac{1}{9}, 3\frac{1}{18}\}$ . Здесь значительную часть стоимости платит не только сайт, на который ведет самый “плохой” путь, но и сайт, который этот путь обеспечил. •

#### **4. Кооперативный подход с поощрениями**

Подход, использованный в предыдущем примере, обеспечивает значительное финансовое участие в создании коммуникатора тех игроков, которые изначально создали плохие условия для остальных участников сообщества. Однако, необходим способ стимуляции вступления таких игроков в коалицию, создающую коммуникатор. Предлагается следующая схема введения поощрений. Для каждого из игроков считается дополнительный

выигрыш, который он, вступая в коалиции, приносит игрокам, не участвующим в коалиции:

$$\Psi_i = \sum_{S \subseteq T: i \in S} \sum_{t \in T \setminus S} \left( midd_{S \setminus \{i\}}^h(t) - midd_S^h(t) \right).$$

Найдем отклонения данной суммы от среднего значения:  $\Delta_i = \Psi_i - \sum_{i \in T} \Psi_i / n$ , которые мы и будем использовать в качестве поощрений, отнимая их от значений компонент вектора Шепли. Тогда участники сообщества  $T$  будут платить за создание сайта суммы, пропорциональные величинам  $\Phi_i - \Delta_i$ .

*Пример 3.* Рассмотрим сообщество, в котором 3 сайта, 0 связан с 1 дугой длины 10, 1 связан с 2 и 2 связан с 0 дугами длины 1. При эгоистичном подходе плата за сайт-коммуникатор пропорциональна компонентам вектора  $\{0, 8.5, 4.5\}$ . При кооперативном получаем вектор  $\{4\frac{11}{12}, 4\frac{11}{12}, 3\frac{1}{6}\}$ . При кооперативном разделении с поощрениями  $\{3\frac{7}{12}, 3\frac{7}{12}, 5\frac{5}{6}\}$ . •

## 5. Перспективы исследования

Для автоматизации проведения исследования и визуализации результатов было разработано приложение на языке Java 2 SDK, позволяющее для задаваемого сильно связанного веб-графа сообщества находить варианты разделения платы за создание коммуникатора как с использованием эгоистичного, так и кооперативного подхода. Процедура расчета значений характеристических функций основана на модификации алгоритма Флойда [1] поиска путей в ориентированном графе. Для визуализации представления веб-графов использована Java-библиотека Jung2 2.0 (<http://jung.sourceforge.net/>).

Данное приложение позволяет работать с множествами большой размерности и будет использовано для исследования таких целевых множеств, как российские научные сайты, университетские сайты и т.п.

## Литература

1. КРИСТОФИДЕС Н. *Теория графов: алгоритмический подход*. - М.: Мир, 1978. - 429 с.
2. ПЕЧНИКОВ А.А. *О некоторых результатах вебометрических исследований университетского Веба // IV Международная научно-практическая конференция “Современные информационные технологии и ИТ-образование”*. Сборник избранных трудов. - М.: ИНТУИТ.РУ. – 2009. - С. 530-537.
3. ЧУЙКО Ю.В., ПЕЧНИКОВ А.А. *Исследование связности российского научного Веба // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC’2009)*. - Труды Международной конференции (17-19 ноября 2009 г., Москва). - С.283-286.

## WEB-COMMUNICATOR CREATING COSTS SHARING PROBLEM AS A COOPERATIVE GAME

**Vladimir Mazalov**, Institute of Applied Mathematical Research of KarRC RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).

**Andrey Pechnikov**, Institute of Applied Mathematical Research of KarRC RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc., assistant professor (pechnikov@krc.karelia.ru).

**Alexandr Chirkov**, Institute of Applied Mathematical Research of KarRC RAS, Petrozavodsk, engineer (avchirkov@krc.karelia.ru).

**Julia Chuyko**, Institute of Applied Mathematical Research of KarRC RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru).

*Abstract: We consider a problem of web-communicator creating costs sharing for some given target set of sites. We offer a cooperative model, where agents are site owners, which create a communicator site in purpose to reduce an average click amount for surfing between sites.*

Keywords: webometrics, web-graph, cooperative game, utility allocation.