

УДК 517.977.58
ББК 22.161.8

МЕТОД СЛАБОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ ¹

Батурин В.А. ² , Лемперт А.А. ³

(Учреждение Российской академии наук Институт динамики
систем и теории управления СО РАН, Иркутск)

Работа посвящена построению приближенных методов решения дискретных задач оптимального управления с сетевой структурой, использующих достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова.

Ключевые слова: дискретная управляемая система, сетевая структура, метод улучшения управления.

Введение

Объекты, описываемые математическими моделями в виде дискретной управляемой системы с сетевой структурой встречаются достаточно часто в прикладных задачах химического или экологического содержания. Для построения алгоритмов улучшения в таких задачах используется технология достаточных условий оптимальности [1]. Методы улучшения для классической задачи оптимального управления дискрет-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00156

² Владимир Александрович Батурин, доктор физико-математических наук, профессор, (rozen@icc.ru).

³ Анна Ананьевна Лемперт, кандидат физико-математических наук, (lempert@icc.ru).

ными системами построены в [2]. Предлагаемый в работе метод является обобщением одного из алгоритмов данного семейства применительно к задаче оптимального управления с сетевой структурой.

1. Постановка задачи

Пусть задан ориентированный граф (рис. 1) с вершинами $i = \overline{0, N+h}$. Обозначим:

A_i – множество номеров вершин j таких, что в заданном графе существует ребро ij , причем $j < i$, B_i – множество номеров вершин j таких, что в заданном графе существует ребро ij , причем $j > i$.

Пусть первые k вершин графа являются входными, а последние h вершин – выходными, т.е. $A_i = \emptyset$ при $i = \overline{0, k}$ и $B_i = \emptyset$ при $i = \overline{N+1, N+h}$.

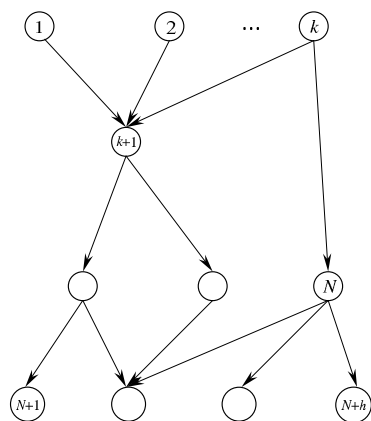


Рис. 1. Ориентированный граф

В каждой вершине графа состояние процесса описывается своей математической моделью в форме дискретной управляемой системы:

$$(1) \quad x^i(t^i + 1) = f^i(t^i, x^i(t^i), u^i(t^i)),$$

где $t_i \in \{t_0^i, t_0^i + 1, \dots, t_1^i\}$, $i = \overline{0, N}$, $j \in B_i$.

Далее индекс i у t будем опускать.

Начальные условия в каждой вершине определяются из следующих соотношений:

$$(2) \quad \begin{aligned} x^i(t_0^i) &= x_0^i, i = \overline{0, k}, \\ x^i(t_0^i) &= \kappa^i \left(x^{l_1}(t_1^{l_1}), \dots, x^{l_p}(t_1^{l_p}) \right), \\ l_1, \dots, l_p &\in A_i, i = \overline{k+1, N}. \end{aligned}$$

Функции $x^i(t)$ принимают значения в евклидовом пространстве $R^{n(i)}$; $u^i(t) \in U_i \subset R^{m(i)}$; κ^i - заданные функции.

Обозначим $x = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^{N+h}(t))'$,

$$u = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^{N+h}(t))'.$$

Множество троек (x, u, a) , удовлетворяющих перечисленным условиям, а также связям (1) и начальным условиям (2), будем называть множеством допустимых и обозначать D , предполагается, что $D \neq \emptyset$.

Определим функционал

$$(3) \quad I(x, u) = F \left(x^{N+1}(t_1^{N+1}), \dots, x^{N+h}(t_1^{N+h}) \right) \rightarrow \min.$$

2. Метод улучшения

Пусть $\varphi^i(t, x^i)$ - функции, непрерывно дифференцируемые по x^i , $t \in \{t_0^i, t_0^i + 1, \dots, t_1^i\}$, $i = \overline{1, N+h}$. Обозначим $x_0^i = x^i(t_0^i)$, $x_1^i = x^i(t_1^i)$ и введем следующие конструкции.

$$R^i(t, x^i, u^i) = \varphi^i(t+1, f^i(t, x^i, u^i)) - \varphi^i(t, x^i) + \frac{1-\alpha}{2} \|\Delta u^i\|^2,$$

$$G^i(x_0^i, x_1^i) = \varphi^i(t_1^i, x_1^i) - \varphi^i(t_0^i, x_0^i) + \frac{1-\alpha}{2} \|\Delta x_1^i\|^2.$$

Обозначим

$$\Gamma(x_0, x_1) = F(x_1^{N+1}, \dots, x_1^{N+h}) + \sum_{i=1}^{N+h} G^i(x_0^i, x_1^i),$$

$$L(x, u) = \Gamma(x_0, x_1) - \sum_{i=1}^{N+h} \sum_{t_0^i}^{t_1^i-1} R^i(t, x^i(t), u^i(t)) dt.$$

Относительно постановки задачи сделаем следующие предположения: $U_i = R^{m(i)}$.

Пусть заданы управления $u_I^i(t)$ и соответствующие состояния $x_I^i(t)$. Требуется найти $u_{II}^i(t), x_{II}^i(t)$, $i = \overline{1, N+h}$, такие, что

$$I(x_{II}, u_{II}) \leq I(x_I, u_I).$$

Пусть функции $f^i(t, x^i, u^i)$, дважды непрерывно дифференцируемы по x^i, u^i , функции F, κ^i , дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, $i = \overline{1, N+h}$.

Функции Кротова будем искать в классе линейно-квадратичных функций:

$$\varphi^i(t, x^i) = \psi^i(t) \Delta x^i + \frac{1}{2} \Delta x^i \sigma^i(t) \Delta x^i,$$

где $\psi^i(t) - n(i)$ – векторы; $\sigma^i(t) - (n(i) \times n(i))$ – симметрические матрицы; $\Delta x^i = x^i - x_I^i(t)$, $\Delta u^i = u^i - u_I^i(t)$.

Рассмотрим приращение функционала L .

$$\Delta L(x, u) = \Delta \Gamma(x_0, x_1) - \sum_{i=1}^{N+h} \sum_{t_0^i}^{t_1^i-1} \Delta R^i(t, x^i(t), u^i(t)) dt.$$

Приращение функций Γ и R^i разложим в ряд Тейлора до слагаемых 2-го порядка включительно.

Выпишем частные производные функции Γ , аргументы функций κ^i для краткости будем опускать.

При $i = \overline{1, N}$:

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)} = \psi^i(t_1^i) - \sum_{z \in B_i} \psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{x^i(t_1^i) x^i(t_1^i)} = & - \sum_{z \in B_i} \left(\left(\psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right)'_{x_1^i} + \kappa_{x_1^i}^{'z} \cdot \sigma^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right) + \\ & + \sigma^i(t_1^i) + (1 - \alpha) E^{n(i)}. \end{aligned}$$

При $i = \overline{N+1, N+h}$:

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)} = \alpha F_{x_1^i} + \psi^i(t_1^i),$$

$$\Gamma_{x^i(t_1^i) x^i(t_1^i)} = \alpha F_{x_1^i x_1^i} + \sigma^i(t_1^i) + (1 - \alpha) E^{n(i)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma = & \sum_{i=1}^N \left[\left(\psi^i(t_1^i) - \sum_{z \in B_i} \psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right)' \Delta x_1^i + \right. \\ & + \frac{1}{2} \Delta x_1^i \left(\sigma^i(t_1^i) - \sum_{z \in B_i} \left(\left(\psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right)'_{x_1^i} + \kappa_{x_1^i}^{'z} \cdot \sigma^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right) + \right. \\ & \left. \left. + (1 - \alpha) E^{n(i)} \right) \Delta x_1^i \right] + \sum_{i=N+1}^{N+h} \left[\left(\alpha F_{x_1^i} + \psi^i(t_1^i) \right)' \Delta x_1^i + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \Delta x_1^i \left(\alpha F_{x_1^i x_1^i} + \sigma^i(t_1^i) + (1 - \alpha) E^{n(i)} \right) \Delta x_1^i \right] + o(\|\Delta x_1\|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta R^i &= R_{x^i}^i \Delta x^i + R_{u^i}^i \Delta u^i + \frac{1}{2} \left(\Delta x'^i R_{x^i x^i}^i \Delta x^i + \right. \\ &+ \Delta u'^i R_{u^i u^i}^i \Delta u^i + \Delta x'^i R_{x^i u^i}^i \Delta u^i + \Delta u'^i R_{u^i x^i}^i \Delta x^i \left. \right) + \\ &+ o \left(\|\Delta x^i(t)\|^2, \|\Delta u^i(t)\|^2 \right).\end{aligned}$$

Найдем $\max_{\Delta u^i} (dR^i + \frac{1}{2} d^2 R^i)$, приравнявая к нулю произ-

водные по Δu^i , получим

$$(4) \quad \Delta u^i = - (R_{u^i u^i}^i)^{-1} (R_{u^i}^i + R_{u^i x^i}^i \Delta x^i), \quad i = \overline{1, N+h}.$$

Здесь производные функций R^i подсчитываются вдоль начального приближения.

Подставим (4) в приращение функций ΔR^i , получим:

$$\begin{aligned}& \left(R_{x^i}^i - R_{u^i}^i (R_{u^i u^i}^i)^{-1} R_{u^i x^i}^i \right) \Delta x^i + \\ & + \frac{1}{2} \Delta x'^i \left(R_{x^i x^i}^i - R_{x^i u^i}^i (R_{u^i u^i}^i)^{-1} R_{u^i x^i}^i \right) \Delta x^i - \\ & - \frac{1}{2} R_{u^i}^i (R_{u^i u^i}^i)^{-1} R_{u^i}^i + o \left(\|\Delta x^i(t)\|^2, \|\Delta u^i(t)\|^2 \right).\end{aligned}$$

Коэффициенты функций $\varphi^i(t, x^i)$ зададим так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\max_{\Delta u^i} \left(dR^i + \frac{1}{2} d^2 R^i \right) = c(t),$$

$$d\Gamma + \frac{1}{2} d^2 \Gamma = 0.$$

Для выполнения данных соотношений при любых Δx^i достаточно, чтобы

$$R_{x^i}^i - R_{u^i}^i (R_{u^i u^i}^i)^{-1} R_{u^i x^i}^i = 0;$$

$$R_{x^i x^i}^i - R_{x^i u^i}^i (R_{u^i u^i}^i)^{-1} R_{u^i x^i}^i = 0;$$

при $i = \overline{1, N}$:

$$(5) \quad \psi^i(t_1^i) = \sum_{z \in B_i} \psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z;$$

$$(6) \quad \sigma^i(t_1^i) = \sum_{z \in B_i} \left(\left(\psi^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right)'_{x_1^i} + \kappa_{x_1^i}^{'z} \cdot \sigma^z(t_0^z) \cdot \kappa_{x_1^i}^z \right) + (1 - \alpha) E^{n(i)};$$

при $i = \overline{N+1, N+h}$:

$$(7) \quad \psi^i(t_1^i) = -\alpha F_{x_1^i}^i;$$

$$(8) \quad \sigma^i(t_1^i) = -\alpha F_{x_1^i x_1^i}^i - (1 - \alpha) E^{n(i)}.$$

Обозначим $H^i(t, x^i, \psi^i, u^i) = \psi^i(t+1) f^i(t, x^i, u^i), i = \overline{1, N+h}$.

Выпишем производные от функций R^i через производные от функций H^i, f^i , получим

$$R_{x^i}^i = H_{x^i}^i - \psi^i(t), \quad R_{u^i}^i = H_{u^i}^i,$$

$$R_{x^i x^i}^i = H_{x^i x^i}^i + f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{x^i}^i - \sigma^i(t),$$

$$R_{u^i u^i}^i = H_{u^i u^i}^i + f_{u^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i - (1 - \alpha) E^{m(i)},$$

$$R_{x^i u^i}^i = H_{x^i u^i}^i + f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i.$$

Производные функций $H^i(t, x^i, \psi^i, u^i)$ подсчитываются вдоль $(t, x_I^i(t), \psi^i(t+1), u_I^i(t))$.

Окончательно получим следующие соотношения ($i = \overline{1, N+h}$):

$$(9) \quad \psi^i(t) = H_{x^i}^i - \left(H_{x^i u^i}^i + f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i \right) \left(H_{u^i u^i}^i + f_{u^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i - (1-\alpha) E^{m(i)} \right)^{-1} H_{u^i}^i;$$

$$(10) \quad \sigma^i(t) = f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{x^i}^i - \left(f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i + H_{x^i u^i}^i \right) \times \\ \times \left(H_{u^i u^i}^i + f_{u^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i - (1-\alpha) E^{m(i)} \right)^{-1} \times \\ \times \left(f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i + H_{x^i u^i}^i \right)' + H_{x^i x^i}^i;$$

$$(11) \quad \Delta u^i = - \left(H_{u^i u^i}^i + f_{u^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i - (1-\alpha) E^{m(i)} \right)^{-1} \times \\ \times \left[H_{u^i}^i + \left(H_{x^i u^i}^i + f_{x^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i \right) \Delta x^i \right].$$

Полученные соотношения определяют алгоритм улучшения 2-го порядка:

1. В каждой вершине графа задаются начальные управления $u_I^i(t)$, из уравнений (1) и начальных условий (2) определяются $x_I^i(t)$.
2. Задается параметр $\alpha \in (0, 1]$ так, чтобы выполнялись неравенства:

$$H_{u^i u^i}^i + f_{u^i}^{'i} \sigma^i(t+1) f_{u^i}^i - (1-\alpha) E^{m(i)} < 0,$$

и из уравнений (9), (10) с учетом (5) – (8) находятся $\psi^i(t), \sigma^i(t), i = \overline{1, N+h}$.

3. Решаются системы $x^i(t^i+1) = f^i(t, x^i, u_I^i + \Delta u^i)$, где Δu^i задаются формулой (11), тем самым получается u_{II}^i и x_{II}^i .
4. Сравниваются значения функционалов $I(x_I, u_I)$ и $I(x_{II}, u_{II})$. Если улучшения не произошло, то параметр α уменьшается и процесс повторяется начиная с шага 2.

3. Модельный пример

На рисунке 2 представлена структурная схема задачи.

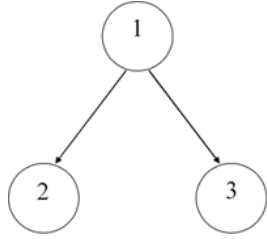


Рис. 2. Ориентированный граф задачи

Процессы в вершинах графа описываются следующими уравнениями.

$$\begin{aligned}
 x^1(t+1) &= x^1(t) + u^1(t), \quad x^1(0) = 1, \quad t \in \{0, 1, 2\}; \\
 x^2(t+1) &= 2x^2(t) + u^2(t), \quad x^2(0) = x^1(2) + 1, \quad t \in \{0, 1\}; \\
 x^3(t+1) &= (x^3(t))^2, \quad x^3(0) = x^1(2), \quad t \in \{0, 1\};
 \end{aligned}$$

$$I = x^2(1) + x^3(1) \rightarrow \min.$$

Проведем одну итерацию метода улучшения.

1. Зададим начальные управления $u_I^1(t) = 1$ и $u_I^2(t) = 1$, тогда в силу системы

$$\begin{aligned}
 x_I^1(0) &= 1, x_I^1(1) = 2, x_I^1(2) = 3; \\
 x_I^2(0) &= 4, x_I^2(1) = 9; \\
 x_I^3(0) &= 3, x_I^3(1) = 9;
 \end{aligned}$$

2. Выпишем основные конструкции алгоритма:

$$\begin{aligned}
 H^1(t, x^1, \psi^1, u^1) &= \psi^1(t+1) (x^1(t) + u^1(t)); \\
 H^2(t, x^2, \psi^2, u^2) &= \psi^2(t+1) (2x^2(t) + u^2(t)); \\
 H^3(t, x^3, \psi^3, u^3) &= \psi^3(t+1) (x^3(t))^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^1(t) &= \psi^1(t+1) \left(1 - \sigma^1(t+1) (\sigma^1(t+1) - (1-\alpha))^{-1} \right); \\ \sigma^1(t) &= \sigma^1(t+1) \left(1 - 2\sigma^1(t+1) (\sigma^1(t+1) - (1-\alpha))^{-1} \right); \\ \psi^1(2) &= \psi^2(0) + \psi^3(0); \\ \sigma^1(2) &= \sigma^2(0) + \sigma^3(0) + 2(1-\alpha).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\psi^2(t) &= 2\psi^2(t+1) \left(1 - \sigma^2(t+1) (\sigma^2(t+1) - (1-\alpha))^{-1} \right); \\ \sigma^2(t) &= 2\sigma^2(t+1) \left(1 - 2\sigma^2(t+1) (\sigma^2(t+1) - (1-\alpha))^{-1} \right); \\ \psi^2(1) &= -\alpha; \\ \sigma^2(1) &= -1 + \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^3(t) &= 2\psi^2(t+1)x^3(t); \\ \sigma^3(t) &= 2\psi^2(t+1) + 4\sigma^3(t+1) (x^3(t))^2; \\ \psi^3(1) &= -\alpha; \\ \sigma^3(1) &= -1 + \alpha.\end{aligned}$$

Зададим параметр $\alpha = 0.5$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi^3(1) &= -0.5; \sigma^3(1) = -0.5; \psi^3(0) = -3; \sigma^3(0) = -19; \\ \psi^2(1) &= -0.5; \sigma^2(1) = -0.5; \psi^2(0) = -0.5; \sigma^2(0) = 0; \\ \psi^1(2) &= -3.5; \sigma^1(2) = -18; \psi^1(1) \approx -0.014; \sigma^1(1) \approx -0.49.\end{aligned}$$

3. Определим

$$\begin{aligned}\Delta u^1(0) &\approx 0.4 - 0.49x^1(0); \\ \Delta u^1(1) &\approx 1.76 - 0.97x^1(1); \\ \Delta u^2(0) &\approx 3.5 - x^2(0).\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} u_{II}^1(0) &\approx 0.9; \quad x_{II}^1(0) = 1; \\ u_{II}^1(1) &\approx 0.9; \quad x_{II}^1(1) \approx 1.9; \\ x_{II}^1(2) &\approx 2.8; \\ u_{II}^2(0) &\approx 0.7; \quad x_{II}^2(0) \approx 3.8; \\ x_{II}^2(1) &\approx 8.3; \\ x_{II}^3(0) &\approx 2.8; \quad x_{II}^3(1) \approx 7.84. \end{aligned}$$

4. Подсчитаем значение функционала $I(x_I, u_I) = 18$, $I(x_{II}, u_{II}) \approx 16.14$. Новое значение меньше предыдущего, таким образом, итерация закончена.

Заключение

В работе предложено обобщение метода слабого улучшения второго порядка на случай, когда дискретная управляемая система имеет сложную сетевую структуру, построен пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

Литература

1. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 446 с.
2. БАТУРИН В.А., УРБАНОВИЧ Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. — Новосибирск: Наука, 1997. — 175 с.
3. БАТУРИН В.А., ЛЕМПЕРТ А.А. Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на сети операторов // Тр. Междунар. конф. "Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании". Павлодар, 2006. — Т. 2. — С. 76-87.

WEAK IMPROVING METHOD FOR THE DISCRETE CONTROL SYSTEM WITH NET STRUCTURE

Vladimir Baturin, Institute for System Dynamics and Control
Theory of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor
(rozen@icc.ru).

Anna Lempert, Institute for System Dynamics and Control
Theory of SB RAS, Irkutsk, Cand.Sc. (lempert@icc.ru).

Abstract: The paper is devoted to design of approximate methods
for discrete optimal control problem with net structure based on
Krotov sufficient conditions of optimality.

Keywords: discrete control system, net structure, improving
method.