УДК 519/8
ББК 2.22

СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ В ЖИВОТНОВОДЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ АПК.»

Киселев В.Г. .[1]
(Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва)

В работе приводится сетевая модель, описывающая динамику стада домашних животных. Показано, что такие модели целесообразно использовать в оперативном управлении при сложившихся различных ситуациях с кормами

Ключевые слова: сетевая модель, оперативное управление, оптимизация, животноводство.

1. Введение

Как и в любом производстве, функционирующем под воздействием случайных факторов, в аграрно – промышленном комплексе (АПК) возникает потребность в оперативном управлении. Наиболее сложной в смысле проведения оперативного управления является животноводческая отрасль АПК. Дело заключается в том, что в силу специфики этой отрасли оперативные решения, принятые в текущий момент, влияют на состояние системы в течение нескольких лет. Основным случайным воздействием, влияющем на состояние системы, является наличие кормовой базы. Если кормовая база стационарна, то,

---

[1] *Валерий Георгиевич Киселев, кандидат физико-математических наук, доцент (vgkiselev@yandex.ru).*

исходя из поставленных целей по производству животноводческой продукции, можно определить оптимальную структуру и численность стада животных и соответствующие нормы их кормления. Однако это нереальный случай и если в результате сложившихся погодных условий кормов произведено меньше или больше, чем запланировано, то приходится решать задачу оперативного управления. Существуют следующие возможности. Во-первых, не меняя численности и структуры стада, сохранив его на последующие годы, уменьшить интенсивность кормления, однако это приведет к уменьшению производства продукции в текущем году. Возможно также решение с уменьшением численности стада или отдельных его групп с одновременным перераспределением имеющихся кормов. Ясно, что имеется множество альтернатив и для принятия оперативного решения необходимо решать некоторую оптимизационную задачу. Ясно также, что эта задача должна быть динамической, охватывая по крайней мере несколько лет. При решении динамических задач, размерность которых пропорциональна количеству рассматриваемых лет, важно чтобы размерность модели, описывающей происходящие в стаде процессы в данный момент времени, была минимальной.

Опыт работы с такими задачами показал, что динамику стада животных целесообразно описывать сетевыми моделями, которые естественным образом отображают происходящие в нем преобразования и имеют минимальную размерность.

Далее будет описана сетевая модель динамики стада домашних животных. Эта модель справедлива для любого вида животных – крупного рогатого скота (КРС), свиней и так далее и даже птицы.

Вопросам моделирования животноводства посвящено довольно много публикаций. У нас в стране пионером работ по моделированию сельскохозяйственного производства и, в частности, животноводства является, по-видимому, Р.Г.Кравченко. Основные его работы собраны в монографии [1].

В данной работе будет приведено изложение сетевой модели динамики стада домашних животных. На эту тему уже было несколько публикаций автора, последняя из них – [2]. Здесь же будет приведено более полное изложение сетевой модели и, кроме того, будут обсуждаться некоторые вопросы использования сетевой модели в оперативном управлении животноводческой отраслью.

2. Сетевая модель динамики стада домашних животных

Стадо домашних животных состоит из трех главных групп: основного стада, в котором содержатся взрослые особи (в стаде КРС – это стадо дойных коров), репродуктивного стада молодняка и откормочного стада – основного поставщика мясной продукции. В некоторых случаях отдельные группы животных могут отсутствовать, например, может отсутствовать откорм животных, когда откормочный молодняк стада продается в силу специализации хозяйства. Возможны и другие ситуации. Каждая из перечисленных основных групп в свою очередь состоит из других групп, назначение которых будет пояснено ниже.

Все связи между отдельными группами стада животных можно представить в виде ориентированного взвешенного графа. Каждая вершина этого графа характеризуется весом – численностью соответствующей группы животных, а дуги с приписанными к ним весами характеризуют интенсивность переходов между этими группами. Предполагается, что возможны различные технологии, характеризующиеся различными уровня кормления и, соответственно, различной продуктивностью. Пример графа, задающего половозрастную структуру стада, связи в стаде между группами и различные технологии кормления, представлен на Рис. 1.

Дадим некоторые пояснения. Группы с номерами $i = 1, \ldots, 6$ – это основное стадо, причем первые три группы – это молодые коровы, только готовые к рождению телят. Предусмотрены три технологии кормления (группы 1-4, 2-5, 3-6) и , соответственно, три различные продуктивности. Группы с номерами i = 7, …, 10 – это ремонтное стадо, причем возможны

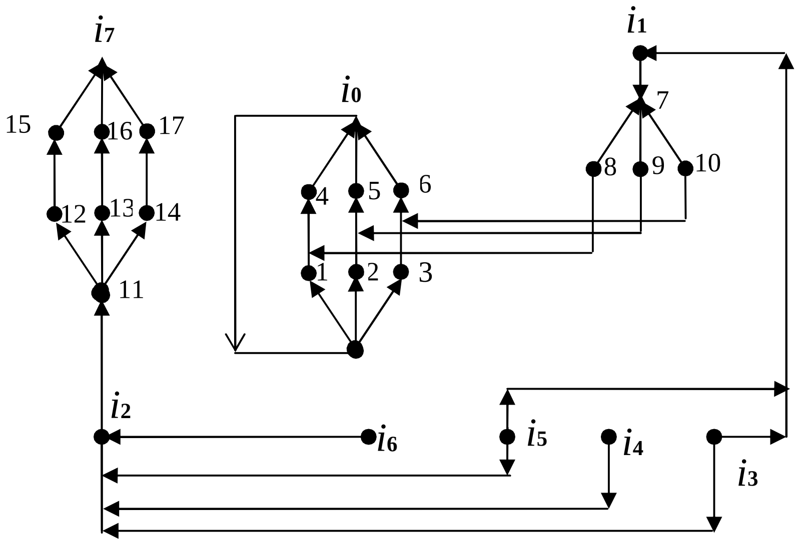

Рис.1

только переходы (8-4), (9-5), (10-6). Группы с номерами i = 11, …, 17 – это откормочное стадо. Здесь также предполагается три программы откорма, характеризующиеся как интенсивностью кормления, так и временем откорма.

Для удобства и единообразия описания всех переходов, происходящих в стаде животных, для любого графа введем дополнительно фиксированные вершины $i_0, i_1, \ldots, i_7$ и дуги, соединяющие эти вершины между собой и с вершинами основного графа.

Для описания модели введем следующие обозначения. Пусть

t – дискретное время (день),

i .– номер группы (вершины графа),

G – множество всех вершин графа,

G_i^+, G_i^- – вершины графа, которые связаны входящими (исходящими) дугами с вершиной i,

r_i – время пребывания животных в группе i,

$x_i(t)$ – численность i-й группы в день t,

$u_{ij}(t)$ – количество животных, переходящих из i - й в j - ю группу в день t,

$d_i(t), b_i(t)$ – смертность и плановая (среднестатистическая) выбраковка в i - й группе,

$v_i(t)$ – убой животных в i - й группе, превосходящий плановую выбраковку.

Внутри i - й группы происходят следующие изменения, которые отображены на Рис.2.

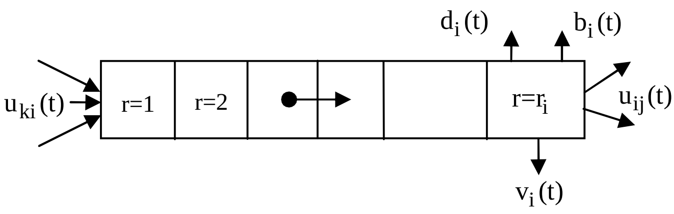

Рис.2.

Количество животных $\sum\limits_{k \in G_i^+} u_{ki}(t)$, поступивших в группу i в день t, находится в этой группе без изменения численности до последнего дня пребывания, равного r_i и лишь в последний день происходит выбраковка и плановый убой животных.

Отсюда следует, что справедливо следующее соотношение:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t) - \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \tag{1}$$

$$-b_i(t) - d_i(t) - v_i(t), \quad t = 0,1,...$$

Учитывая традиционный способ задания смертности и выбраковки соответствующими коэффициентами ε_i^d и ε_i^b, можно записать следующие соотношения:

$$b_i(t) = \varepsilon_i^b \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i) \tag{2}$$

$$d_i(t) = \varepsilon_i^d \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i)$$

В каждой вершине сохраняется баланс потоков

$$\sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) = \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t) \tag{3}$$

Кроме того, имеются ограничения неотрицательности переменных

$$v_i(t) \geq 0,\ u_{ij}(t) \geq 0,\ x_i(t) \geq 0\ . \tag{4}$$

В этих соотношениях $u_{ki}(-r_i),...,u_{ki}(-1)$ должны быть заданы.

Используя равенства (3), переменные $v_i(t)$ можно исключить. Тогда ограничения (1) будут иметь вид

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k \in G_i^+} \left[u_{ki}(t) - u_{ki}(t - r_i)\right] - \tag{5}$$

$$-b_i(t) - d_i(t),$$

а условие $v_i(t) \geq 0$ запишется в виде

(6) $$\sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i) - \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - b_i(t) - d_i(t) \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что количество животных в группе до выбраковки и смерти в соответствии с принятой гипотезой осуществления этих событий равно

(7) $$x_i'(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{s=1}^{r_i} u_{kr}(t - r_i + s),$$

а после –

(8) $$x_i(t) = x_i'(t) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t) = \\ = x_i'(t) + \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i).$$

Это выражение и является решением системы разностных уравнений (1) и (5). Понятен тот факт, что в текущий момент времени количество животных в группе, если животные содержатся в ней r_i дней, определяется только поступлениями в эту группу животных из других групп за r_i предыдущих дней и выбытием из нее в момент t.

Условие неотрицательности переменных $x_i(t) \geq 0$ запишется в виде

(9) $$\sum_{k \in G_i^+} \sum_{s=1}^{r_i} u_{ki}(t - r_i + s) + \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \\ - \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_{i) \geq 0}.$$

Таким образом, мы привели разные модели описания динамики стада животных. В зависимости от поставленной задачи можно рассматривать модели с разным набором переменных. Мы будем рассматривать модель, в которой присутствуют только потоки $u_{ij}(t)$ и ограничения (6) и (9), в которых $b_i(t)$ и $d_i(t)$ заменены по формулам (2), а необходимые значения $x_i(t)$ вычисляются по формулам (8). Такую модель, в которой переменными являются только потоки в сети, назовем потоковой моделью.

Для удобства и единообразия описания потоков в сети были введены дополнительные вершины $i_{0,}i_1,...,i_7$ и необходимые дополнительные дуги , как это показано на Рис.1.

В вершинах $i_{0,}i_{1,}i_2$ следует записать уравнения сохранения потоков в момент времени t:

(10) $$\sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t) = 0,\ i = i_{0,}i_{1,}i_2 .$$

Вершины $i_{3,}i_{4,}i_{5,}i_6$ являются источниками в рассматриваемой сети. Мощность этих источников равна количеству бычков, рождающихся в основном и ремонтном стадах (вершины $i_{6,}i_4$) и, соответственно, телочек (вершины $i_{5,}\ i_3$). Мощность этих источников равна

(11) $$p_i(t) = \sum_{k\in\Omega_i}\ \sum_{j\in G_k^-} u_{ki}(t)\,\beta_k,$$
$$i = i_3, i_4, i_5, i_6\ ,$$

где Ω_i – множество групп животных, которые производят потомство и поставляют его в группу i, β_k – коэффициент рождаемости бычков или телочек в k - й группе.

Для этих вершин, являющихся источниками, запишем уравнение баланса:

(12) $p_i(t) = \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t)$.

Для поглощающей вершины i_7 никаких уравнений не записывается – она введена для единообразия описания и используется для подсчета получаемой мясной продукции.

Будем считать, что каждая группа животных кормится по жесткому рациону, потребляя в день t на каждую голову корма вида h.в количестве $\omega_h^i(t), \quad h = 1,...,H$. Тогда в день t для всех животных требуется корма вида h в количестве

(13) $\sum_{i \in G} \omega_h^i(t) x_i'(t)$.

3. Агрегирование модели

Ясно, что приведенная выше модель с шагом в один день для проведения расчетов на длительную перспективу непригодна из-за большой размерности задачи. Проведем ее агрегирование по времени.

Разобьем каждый год на N интервалов, которые будем называть сезонами. Введем новое время $\tau = 0,...,N\tilde{T}$, которое является сквозной нумерацией сезонов от 0 до $\tilde{T}$ лет. Пусть T_τ – длительность временного интервала номера τ, а t_τ^0, t_τ^k – его начало и конец на оси времен t. Обозначим также

$$\Delta_\tau = \left\{ t : t_\tau^0 \le t \le t_\tau^k \right\}.$$

Введем новые переменные $U_{ij}(\tau)$, такие что на интервале τ

(14) $u_{ij}(t) = U_{ij}(\tau) / T_\tau$.

$U_{ij}(\tau)$ означает количество перешедших животных из i – й группы в j – ю за интервал номера τ. Аналогично вводятся величины $V_i(\tau),\ B_i(\tau),\ D_i(\tau)$.

С учетом сказанного для $t \in \Delta_\tau$ из (7) и (14) следует:

$$(15)\quad x_i'(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t)} a_{im}(\tau,t) U_{ki}(\tau - m),$$

где

$$(16)\quad \begin{aligned} & a_{im}(\tau,t) = \delta_{im}(\tau,t) / T_{\tau-m}, \\ & \delta_{im}(\tau,t) = \left[\min(t, t_{\tau-m}^k) - \max(t - r_i, t_{\tau-m}^0) \right]_+ \\ & l_i(t) : t - r_i \in \Delta_{\tau - l_i(t)}, \\ & z_+ = \max(0, z). \end{aligned}$$

Из (16) ясно, что $a_{im}(\tau,t)$ – периодическая функция своих аргументов: по τ – с периодом N, а по t – с периодом в один год.

Условие неотрицательности переменных $x_i(t) \ge 0$ – условие (9) мы будем записывать для конца интервала τ. В виде

$$(17)\quad \begin{aligned} & \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t_\tau^k)} a_{im}(\tau, t_\tau^k) U_{ki}(\tau - m) + \\ & + \sum_{j \in G_i^-} \frac{U_{ij}(\tau)}{T_\tau} - \sum_{k \in G_i^+} \frac{U_{ki}(\tau - l_i(t_\tau^k))}{T_{\tau - l_i(t_\tau^k)}} \ge 0. \end{aligned}$$

Условие неотрицательности переменных $V_i(\tau) \ge 0$ получим, суммируя по $t \in \Delta_\tau$ ограничение (6) с учетом выражений (2). Предварительно вычислим сумму

$$\sum_{t=t_\tau^0}^{t_\tau^k} u_{ki}(t-r_i) = \sum_{m=0}^{l_i} e_{im}(\tau) U_{ki}(\tau - m),$$

где

$$l_i \ (\tau) : t_\tau^0 - r_i \in \Delta_{\tau - l_i(\tau)},$$

$$e_{im(\tau)} = \frac{1}{T_{\tau-m}} \begin{bmatrix} \min(t_{\tau-m}^k, t_\tau^k - r_i) - \\ -\max(t_{\tau-m}^0, t_\tau^0 - r_i) \end{bmatrix}_+$$

Принимая все это во внимание, соответствующее ограничение запишем в виде

(18) $$\sum_{k \in G_i^+} (1 - \varepsilon_i^b - \varepsilon_i^d) \sum_{m=0}^{l_i(\tau)} e_{im}(\tau) U_{ki}(\tau - m) - \\ - \sum_{j \in G_i^-} U_{ij}(\tau) \geq 0 .$$

Запишем, наконец, агрегированные ограничения по кормам. Для этого вычислим предварительно следующую сумму

(19) $$X_i(\tau) = \sum_{t=t_\tau^0}^{t_\tau^k} x_i(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(\tau)} c_{im} U_{ki}(\tau - m),$$

где

$$c_{im}(\tau) = \sum_{t=t_\tau^0}^{t_\tau^k} a_{im}(\tau, t) .$$

Коэффициенты $c_{im}(\tau)$ можно представить в следующем виде:

$$c_{im}(\tau)=\Big[\min(\beta_i^k,t_{\tau-m}^0)-\min(t_{\tau-m}^0,\beta_i^0)+$$

$$+\frac{1}{2T_{\tau-m}}\Big[\alpha_i^0(1+\alpha_i^0)-\alpha_i^k(1+\alpha_i^k)\Big]\Big]\times \tag{20}$$

$$\times\operatorname{sgn}(m)+\frac{1}{T_\tau}\Big[\frac{\gamma_i(1+\gamma_i)}{2}+r_i(T_\tau-r_i)_+\Big]\times$$

$$\times(1-\operatorname{sgn}(m)),$$

где

$$\beta_i^o=t_\tau^0-r_i\ ,\ \beta_i^k=t_\tau^k-r_i\ ,\gamma_i=\min(r_i,T_\tau),$$

$$\alpha_i^0=\min(T_{\tau-m},(t_{\tau-m}^k-\beta_i^o)),$$

$$\alpha_i^k=\max(0,\ t_{\tau-m}^k-\beta_i^k)\ .$$

Если обозначить D_T – множество номеров временных интервалов τ, принадлежащих году T, то агрегированные ограничения по кормам можно представить в виде следующих неравенств, которые необходимо записать для каждого вида корма h и каждого года T.

$$\sum_{\tau\in D_T}\sum_{i\in G}\omega_h^i(\tau)\,X_i(\tau)\le\xi_h(T)\,. \tag{21}$$

Здесь $\xi_h(T)$ – годовой запас корма вида h.

Последнее замечание. В ограничениях (10)-(12) переменные $u_{ij}(t)$ надо заменить на агрегированные переменные $U_{ij}(\tau)$.

4. Сетевые модели и оперативное управление

Как было сказано во введении, кормовая база подвержена влиянию случайных погодных и других неопределенных факторов. К этим неопределенным факторам можно отнести , например, количество или цену закупаемых кормов. В данном случае мы можем лишь рассматривать некоторые возможные прогнозные варианты.

В текущий год, когда уже известно количество произведенных кормов, необходимо принимать оперативное решение по дальнейшему состоянию стада животных Простейшим способом оперативного управления является способ, иногда называемый скользящим управлением, когда на ряд лет вперед задается прогноз неопределенных факторов и текущее управление принимается из условия достижения максимума некоторого функционала. Не вдаваясь в подробности, будем считать, что критерием задачи является доход хозяйства за ряд лет. Естественно, что для вычисления дохода необходимо знать прогнозные значения различных цен на перспективу и прогнозные значения других неопределенных факторов.

И критерий и другие возможные дополнительные ограничения несложно записать, используя полученные здесь соотношения, описывающие динамику различных групп стада. Ясно, что они будут линейными. Далее, при необходимости несложно также ограничения на производственные мощности и другие традиционные для моделирования экономических процессов вещи.

Наконец, последнее замечание. Если в хозяйстве имеется нескольких отраслей животноводства, то для оперативного управления требуется рассматривать многоотраслевую модель животноводства, которая состоит из независимых, но единообразных моделей отдельных отраслей, объединенных только общими ограничениями по кормам.

Литература

1. КРАВЧЕНКО Р.Г. *Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве* .-М. : Колос, 1978. – 423с.

2. КИСЕЛЕВ В.Г. *Управление процессом функционирования одного класса популяций.* // Труды института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем», М. : ЛКИ, 2008, том 32.2, С.40-47.

NETWORK MODELS OF CONTROL IN STOCK BREEDING BRANCH OF AGRARIAN AND INDUSTRIAL COMPLEX

Valeriy Kiselev, A. A. Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vgkiselev@yandex.ru).

In the article the netnwork model describing dynamic of home stock. It is shown, that such models are suitable for using in operative control under stochastic forages.

Keywords: network model, operative control, optimization, stock breeding.