

ПРИНЦИП МНОГОМОДЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Белых А.А.¹, Шайдулин Р.Ф.²

(Пермская государственная сельскохозяйственная академия им. Д.Н.Прянишникова, Пермь)

Гуреев К.А.³, Харитонов В.А.⁴, Алексеев А.О.⁵

(Пермский государственный технический университет, Пермь)

В статье обосновываются новые возможности исследования моделей предпочтений на основе сочетания линейных и нелинейных (матричных) методов комплексного оценивания: уменьшение размерности задач принятия решений и анализ динамики качественных изменений свертки.

Ключевые слова: принцип многомодельности, моделирование предпочтений, линейные и нелинейные (матричные) свертки.

¹ Андрей Алексеевич Белых, кандидат технических наук, доцент (psaa@perm-edu.ru).

² Роман Фаритович Шайдулин, ассистент (psaa@perm-edu.ru).

³ Кирилл Александрович Гуреев, аспирант (nedstf@pstu.ru).

⁴ Валерий Алексеевич Харитонов, доктор технических наук, профессор (nedstf@pstu.ru).

⁵ Александр Олегович Алексеев, заведующий лабораторией (nedstf@pstu.ru).

1. Введение

Актуальность проблемы поддержки принятия решений с учетом человеческого фактора на основе моделирования предпочтений лиц, играющих в этих процедурах ключевые роли, вызвало интерес к механизмам комплексного оценивания объектов с гетерогенными характеристиками, выступающих в качестве предметов выбора – вариантов решения. Задачи моделирования предпочтений на этапе перехода от high-tech технологий к high-hume технологиям возникают во многих областях исследования: организационных, экономических, образовательных и других систем.

Среди известных линейных и нелинейных [1,2] механизмов комплексного оценивания расширенными функциональными возможностями выделяются модели предпочтений на основе деревьев критериев и матриц свертки с топологической интерпретацией[3,4]. Однако они характеризуется и значительной структурной сложностью, что затрудняет их практическое использование. Исследование сложных систем принято проводить на основе принципа многомодельности, утверждающего целесообразность использования нескольких типов моделей с целью использования преимуществ каждой из них.

В статье обосновываются новые возможности исследования моделей предпочтений на основе сочетания линейных и нелинейных (матричных) методов комплексного оценивания, а именно: уменьшение размерности задач принятия решений и анализ динамики качественных изменений свертки.

2. Исследование свойств элементарных линейных сверток

Методически можно считать оправданным, начать с анализа метода взвешенных коэффициентов в его простейшем выражении.

Элементарная линейная свертка по методу взвешенных коэффициентов имеет вид функции двух переменных:

$$(1) \quad X = f_L(X_1, X_2) = k_1 X_1 + k_2 X_2,$$

где X_1, X_2 - частные критерии, сворачиваемые в комплексную оценку X , k_1, k_2 - весовые коэффициенты, устанавливающие доленое участие каждого из критериев в формировании свертки f_L .

На весовые коэффициенты накладываются ограничения, обеспечивающие одинаковую шкалу, например, $[1,4]$ для всех переменных:

$$(2) \quad k_1 + k_2 = 1, \quad k_1, k_2 \in [0,1].$$

Уравнение (1) геометрически интерпретируется как плоскость в трехмерном пространстве (X, X_1, X_2) , ограниченная поверхностью куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами, длина которых совпадает с интервалом принятой шкалы, и содержащая в себе пару противоположных вершин (A, C_1) и диагональ AC_1 их соединяющую (рис. 1).

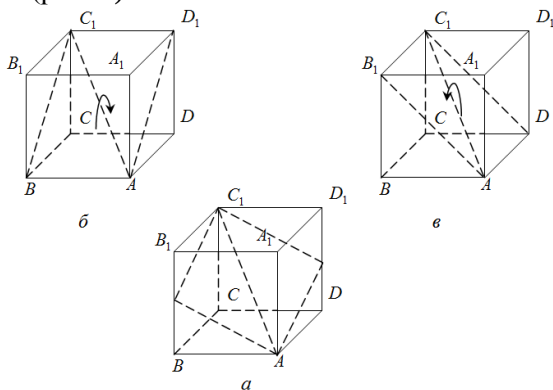


Рис.1. Геометрическая интерпретация механизмов элементарной линейной свертки: а) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$; б) $k_1 = 1, k_2 = 0$; в) $k_1 = 0, k_2 = 1$.

Каждая реализация модели описывает свертку с фиксированными весовыми коэффициентами, имеющими смысл частных производных, постоянных в каждой точки области определения $ABCD$:

$$(3) \quad k_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad k_2 = \frac{\partial x}{\partial x_2}$$

Множество моделей элементарной линейной свертки соответствует множеству допустимых пар (k_1, k_2) весовых коэффициентов и перечисляется поворотом плоскости ABC_1D_1 из положения (рис.1б) в положение (рис.1в) вокруг диагонали AC_1 на 90° по направлению часовой стрелки либо в обратном направлении через промежуточное - рис.1а.

Поворот на больший угол приводит к нарушению ограничения (2) и уменьшению области определения.

Интерпретация различных вариантов линейной свертки обеспечивается введением «института» изопрайс (линий одинаковой цены), описываемых линейными уравнениями вида

$$(4) \quad X_C = k_1^* X_1 + k_2^* X_2, \quad X_C \in [X_{\min}, X_{\max}],$$

где X_C – количественная характеристика изопрайсы,

k_1^*, k_2^* – фиксированные значения весовых коэффициентов,

X_1, X_2 – соответственно, функция или аргумент.

Введение интервала дискретности ΔX устанавливает мощность семейства изопрайс, которое предоставляет более наглядную топологическую интерпретацию инструментов свертки. В результате этого геометрическая интерпретация элементарной линейной свертки (рис.1а-1в) может быть дополнена топологической интерпретацией, представленной на рисунке 2а-2в.

При всей простоте и наглядности линейной свертки она способна моделировать лишь достаточно тривиальные предпочтения, сохраняющие свойства во всей области определения. Этот недостаток объясняется ограничениями (2) накладываемыми на

уравнение (1) с целью обеспечения универсальности шкалы для всех участвующих в свертке переменных.

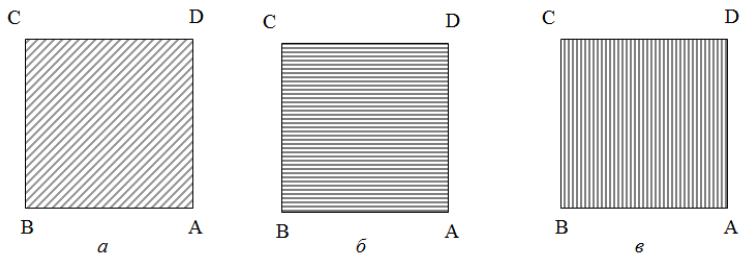


Рис 2. Топологическая интерпретация вариантов линейной свертки, приведенных на рис.1

Сложные предпочтения характеризуются богатой динамикой комплексирования частных критериев в формируемой ими области определения. Такому классу предпочтений в большей степени соответствуют модели комплексного оценивания построенные на основе деревьев критериев и матрицах свертки [3].

3. Исследование элементарных матричных свертков с топологической интерпретацией

Топологическая интерпретация матриц свертки строится авторами на следующих положениях.

Шкала переменных в механизмах комплексного оценивания укладывается в общепринятом интервале $[1, 4]$.

Процедура нечеткой свертки f строится в соответствии с принципом обобщения по схеме, предложенной Д.А. Новиковым:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \sup_{\{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = x\}} \min \{ \mu_{\tilde{X}_1}(x_1), \mu_{\tilde{X}_2}(x_2) \},$$

где $\mu(x)$ – функция принадлежности.

Дефазификация (построение четких аналогов нечетких чисел) переменных осуществляется по наиболее распространенному методу Центра тяжести:

$$\hat{X} = ЦТ(\tilde{X}) = \varphi(\mu_1, \mu_2) = \sum x\mu / \sum \mu ,$$

Согласно принятой модели нечеткого числа $\tilde{X}$ как двух-элементного нечеткого множества

$$\tilde{X} = 1/\mu(1) + 2/\mu(2), \quad \mu(1) + \mu(2) = 1$$

аргументы процедуры нечеткой свертки в базовой подобласти $[1, 2] \times [1, 2]$ определения записываются в виде выражений

$$\tilde{X}_1 = 1 / (1 - \mu_1) + 2 / \mu_1, \quad \tilde{X}_2 = 1 / (1 - \mu_2) + 2 / \mu_2.$$

Значения параметров μ_1, μ_2 определяются из отношений

$\hat{X}_1 = 1 + \mu_1, \quad \hat{X}_2 = 1 + \mu_2$, что обеспечивает взаимооднозначность процедур: $\tilde{X} \leftrightarrow \hat{X}$, а также простоту формы представления экспертной информации об исходных данных $\hat{X}_1, \hat{X}_2$, например,

$$\hat{X}_1 = 1,73, \mu_1 = 0,73, \quad \tilde{X}_1 = 1/0,27 + 2/0,73.$$

Множество матриц свертки, рекомендованных к использованию, сокращается до канонического, когда приращение значений свертки на каждом дискретном шаге изменения аргументов не превышает по горизонтали (вертикали) и по диагонали 1 и 2 соответственно. Для канонических матриц обнаруживается ровно шесть типов $i \in \overline{0, 5}$ стандартных функций свертки, отличающихся в области определения нечеткой свертки $[1, 4]$ смещением $C \in \overline{0, 2} \times \overline{0, 2}$.

Процедура нечеткой свертки в базовой подобласти определения для наиболее востребованной на практике максиминной стратегии описывается отношением:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = & f(1, 1) / \min((1 - \mu_1), (1 - \mu_2)) + \\ & + f(1, 2) / \min((1 - \mu_1), \mu_2) + f(2, 1) / \min(\mu_1, (1 - \mu_2)) + \\ & + f(2, 2) / \min(\mu_1, \mu_2). \end{aligned}$$

Значения функций нечеткой свертки вычисляются согласно пункта 3, а описываются уравнениями кусочно-гладких (в силу нелинейности выражения см. пункт 6) проекций изопрайс - линий одинаковой цены $\widehat{X}_C$ на базовую подобласть:

$$\widehat{X}_C = \varphi(\mu_1, \mu_2) = f_i(\widehat{X}_1, \widehat{X}_2), \quad i \in \overline{0, 5}.$$

Сопряжение входа $\widetilde{X}_{j_2}$ последующей матрицы свертки с предыдущим $\widetilde{X}_{j_1}$ достигается соглашением:

$$\widetilde{X}_{j_1} \xrightarrow{(\text{пункт } 3)} \widehat{X}_{j_1} \xrightarrow{(\text{пункт } 4)} \widetilde{X}_{j_1}, \quad \widetilde{X}_{j_2} = \widetilde{X}_{j_1}.$$

Поддерживаемая программно (рис.3) топологизация матриц свертки существенно расширяет возможности конструирования и использования механизмов комплексного оценивания. Следует заметить, что обнаруживаемая в ходе вычислительного эксперимента локальная немонотонность проекций изопрайс имеет антропогенное происхождение и связана с выбранным типом стратегии.

Для наполнения матриц свертки размерности 4×4 (черные цифры на белом фоне) достаточно построить матрицу размерности 3×3 с топологической интерпретацией стандартных функций свертки (белые цифры на черном фоне), их взаимодозначность очевидна.

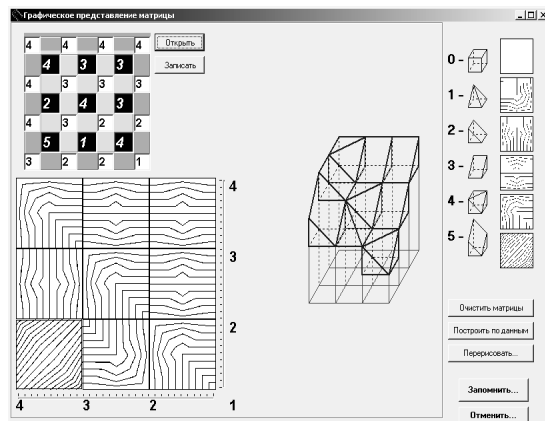


Рис. 3. Графическое представление матрицы свертки

С этой целью представление экспертов о характере рассматриваемой свертки на топологическом поле 3×3 отображается тремя линиями изопрайс – по одной из трех «пучков», характеризующих малым $[1,2]$, средним $[2,3]$ и большим $[3,4]$ уровнями значений свертки (рис.4). Полученный результат программным сервисом легко переводится в искомую форму представления матрицы свертки (рис. 3). Существенную поддержку в вопросах конструирования матриц свертки может оказать убедительная интерпретация стандартных функций свертки: f_0 - игнорирование развития, f_1 - поощрение равномерного развития обоих критериев, f_2 - поощрение развития критерия x_1 , f_3 - поощрение развития критерия x_2 , f_4 - поощрение равномерного развития, либо одного любого критерия в случае «прорыва» в этом направлении, f_5 - предпочтение ускоренному равномерному развитию обоих критериев (допускается развитие одного критерия, но с меньшим конечным результатом).

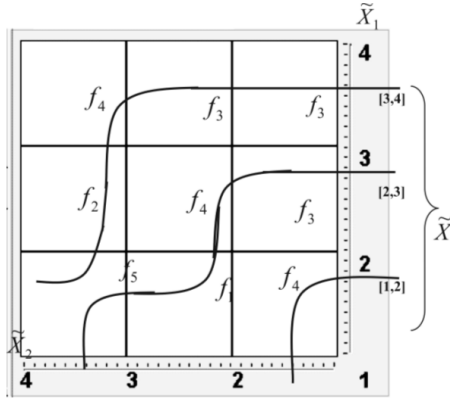


Рис. 4. Представление эксперта о характере конструируемой матрицы свертки, изображенной на рисунке 3

Элементарная матрица свертки (рис.3) имеет более сложную топологию, чем линейная свертка благодаря нелинейности составляющих её изопрайс. Это означает, что каждая отдельно взятая изопрайса сможет быть приближенно представлена в кусочно-линейной форме как композиция линейных изопрайс. Таким образом, произвольная локальная область матричной свертки может иметь приближенное линейное описание согласно выражения

$$(5) \quad \begin{aligned} X &= f_M(X_1, X_2) \approx k_1(X_1^*, X_2^*)X_1 + k_2(X_1^*, X_2^*)X_2, \\ X_1, X_2 &\in 0(X_1^*, X_2^*) \end{aligned}$$

где $f_M(X_1, X_2)$ – матричная функция свертки, весовые коэффициенты имеют смысл частных производных в некоторой точке (X_1^*, X_2^*) , принадлежащей локальной области 0:

$$(6) \quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial f_M(X_1, X_2 | X_1 = X_1^*, X_2 = X_2^*)}{\partial X_1}, \\ k_2 &= \frac{\partial f_M(X_1, X_2 | X_1 = X_1^*, X_2 = X_2^*)}{\partial X_2}, \end{aligned}$$

Альтернативное описание матричной свертки с помощью семейства линейных сверток, отличающихся значениями весовых коэффициентов в каждой локальной области, дает новый инструмент исследования моделей предпочтений в вопросах адекватности и динамических свойств.

4. Анализ линейных и матричных сверток с позиции принципа многомодельности

Для функций свертки большей размерности линейный подход начинает испытывать серьезные трудности в отношении обоснования весовых коэффициентов, а матричные – в обосновании структуры дерева критериев и заполнения матриц свертки.

Отличительной чертой сложившейся ситуации является простота построения необходимого семейства линейных сверток в любой непрерывной подобласти исследуемой матричной свертки, не имеющей разрывов.

Действительно, гиперплоскость, касательная к гиперповерхности функции комплексного оценивания в заданной значении компонент вектора $\vec{X}_i^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)_i$ точке в ее непрерывной подобласти, и окрестность вокруг этой точки близки:

$$(7) \quad X = f_L(X_1, \dots, X_n) \approx \sum_{j=1}^n k_j^i X_j,$$

где

$$(8) \quad k_j^i = \frac{\partial f_M(X_1, \dots, X_n | \vec{X}_i^*)}{\partial X_j},$$

По сравнению с многомерной линейной сверткой, являющейся расширением выражения (1), ввиду локальной области определения функции (7) появляется возможность снятия ограничений вида (2), что в полной мере удовлетворяет динамическим свойствам модели предпочтений.

Следует отметить, что выражения (7), (8) являются композицией выражений (5), (6), которая задается деревом критериев. В связи с этим частная производная (8) многомерной функции свертки (7) равна произведению частных производных (6) всех бинарных сверток (5) лежащих на пути графа от вершины X_j к корню дерева X .

Дополнительные возможности в исследовании модели предпочтений, появляющиеся в случае использования рассмотренных походок заключается в следующем:

локальное уменьшение размерности задач принятия решений;

анализ динамики качественных изменений в процедуре свертки при переходе из одной локальной области в другую на основе сопоставления приоритетов частных критериев;

декомпозиция общей проблемы адекватности модели на множество задач локальной адекватности меньшей размерности.

Проиллюстрируем перечисленные возможности вычислительным экспериментом.

Пусть задан механизм комплексного оценивания (рис 5.), выполняющий нелинейную свертку критериев $X_1 - X_7$. Выберем произвольные точки V1-V5 в построенной модели по данным таблицы 1.

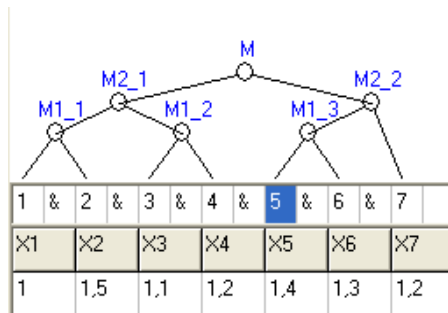


Рис. 5. Дерево комплексного оценивания

Таблица 1 Исходные данные вычислительного эксперимента

	V1	V2	V3	V4	V5
X1	1	1,5	2	2,5	3
X2	1,5	2	2,5	3	3,9
X3	1,1	1,7	2,1	2,6	3,1
X4	1,2	1,8	2,4	2,7	3,5
X5	1,4	1,6	2,1	2,9	3,8
X6	1,3	1,9	2,2	3	3,1
X7	1,2	1,7	2,3	2,8	3,3
X	1,33	1,67	2,3	3	3,78

Построение линейных моделей для вариантов, предусмотренных таблицей 1, производится методом последовательных поочередных приращений в соответствии с процедурой, оформленной для варианта V1 в виде таблицы 2.

Таблица 2 Вычисление весовых коэффициентов линейной модели для варианта V1

	V1	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
X1	1	1,1	1	1	1	1	1	1
X2	1,5	1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
X3	1,1	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
X4	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2
X5	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4
X6	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,3
X7	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3
X	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,38	1,4	1,33
	0	0	0	0	0,05	0,07	0	

В соответствии с данными таблицы 1 вычислены весовые коэффициенты всех уравнений для выделенных точек локальных областей (таблица 3) и на этой основе построено семейство линейных моделей:

$$\begin{aligned}
 &V1; X = 0,5X_5 + 0,7X_6, \quad V4; X = 1,6X_6, \\
 (9) \quad &V2; X = 0,3X_5 + 0,7X_7, \quad V5; X = -0,2X_3 + 0,8X_5 - 0,3X_7, \\
 &V3; X = 0,1X_3 + X_7,
 \end{aligned}$$

Таблица 3 Сводные данные по линеаризации матричной модели

№	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	N
1	0	0	0	0	0,5	0,7	0	3
2	0	0	0	0	0,3	0	0,7	3
3	0	0	0,1	0	0	0	1	3
4	0	0	0	0	0	1,6	0	2
5	0	0	-0,2	0	0,8	0	-0,3	4

Полученная систем линейных уравнений свидетельствует о локальном уменьшении размерности нелинейной модели (см. мерность пространства – N в таблице 3), о существенной динамике качественных изменений в процедуре свертки при переходе из одной локальной области в другую (чередуются переменные с наибольшим весовым коэффициентом, что соответствует изменению приоритетов частных критериев, их число и состав). Достаточно наглядно описанную динамику иллюстрирует рисунок 6.

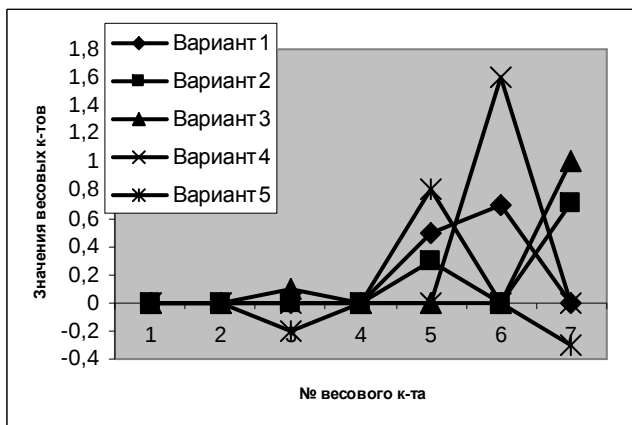
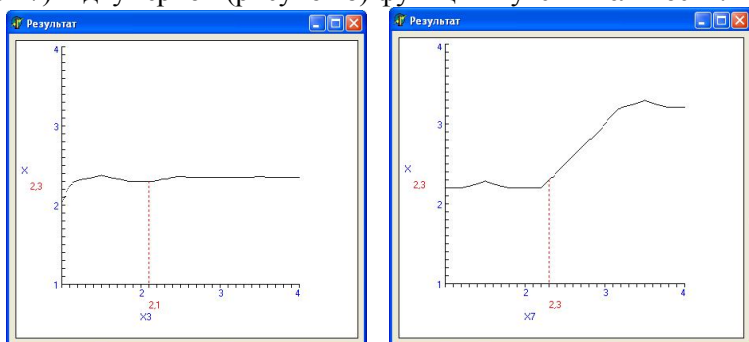


Рис.6. Динамика качественных изменений в процедуре свертки по результатам локальной линеаризации исходной модели

Несовпадение результатов вычислений комплексной оценки с данными наблюдений, принадлежащими определенной локальной области, как факт неадекватности модели можно подвергнуть узконаправленному анализу, благодаря наличию линейной модели меньшей размерности. Так, для варианта V3 факт неадекватности означает необходимость уточнения степени долевого участия только частных критериев X_3, X_7 и возможность использования для этого транзитивных одномерных (рисунок 7) и двумерной (рисунок 8) функции чувствительности.



*Рис.7. Функции чувствительности а) по критерию X_3 ;
б) по критерию X_7*

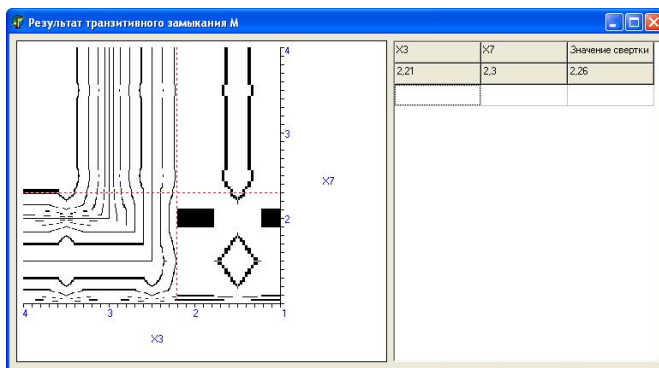


Рис.8. Функция чувствительности по критериям X_3, X_7

5. Заключение

С помощью функций чувствительности для конкретной локальной области можно устранить или уменьшить неадекватность модели данным наблюдением, корректируя параметры матриц свертки, касающихся существенных переменных, либо функции приведения этих переменных к стандартной шкале.

Таким образом, использование принципа многомодельности расширяет возможности исследования матричных моделей предпочтений сложной структуры и тем самым существенно повышает эффективность поддержки принятия решений в *high-tech* технологиях.

Литература

1. ВАРЖАПЕТЯН А.Г. *Квалиметрия: учебное пособие* / СПбГУ АП. СПб., 2005. 176с.
2. МАЗУР И.И., ШАПИРО В.Д., ОЛЬДЕРОГГЕ Н.Г. *Управление проектами: Учебное пособие*/ Под.общ. ред И.И.Мазура. – М.:Омега–Л, 2004. – 664с.

3. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента. Инновационно-образовательный проект* / Под научн. ред. В.А. Харитонова. – Пермь.: ПГТУ, 2007. – 187 с.
4. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А., ВИНОКУР И.Р. *Функциональные возможности механизмов комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц свертки* // Управление большими системами. Сб.тр.Вып. 18. М.:ИПУ РАН, 2007. – с. 129-140

PRINCIPLE OF MULTIMODELLING IN PROBLEMS CONCERNING SIMULATION OF INDIVIDUAL PREFERENCES

Andrey Belyh, Pryanishnikov Perm state agricultural academy, Perm, candidate of technical sciences, assistant of professor (psaa@perm-edu.ru).

Roman Shaydulin Pryanishnikov Perm state agricultural academy, Perm, assistant (psaa@perm-edu.ru)

Kirill Gureev, Perm state technical university, Perm, postgraduate student (nedstf@pstu.ru)

Valeriy Kharitonov, Perm state technical university, Perm, doctor of technical sciences, professor (nedstf@pstu.ru)

Alexander Alekseev, Perm state technical university, Perm, the head of laboratory (nedstf@pstu.ru)

In the article new capabilities of individual preferences research are substantiated. They are based on the combination of linear and non-linear (matrix) methods of complex estimation: the dimension downsizing of decision-making task, and the impact analysis of qualitative change of convolution.

Keywords: Principle of multimodelling, preferences modelling, linear and non-linear (matrix) convolutions.