

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ НА БАЗЕ ЛИНЕЙНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

Фуртат И.Б.<sup>2</sup>, Гущин П.А.<sup>3</sup>

Копысова Е.А.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург)

В статье исследуются нелинейные законы управления, полученные из линейного путем двух типов замен с использованием нечетных функций. Первая замена состоит в пропуске каждой компоненты вектора состояния через нелинейную функцию, вторая замена – в пропуске всего линейного закона управления через нелинейную функцию. Для исследования таких систем предлагается нелинейные функции представить в виде линейных с нелинейным угловым коэффициентом. Такое представление позволит использовать аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) для исследования устойчивости замкнутых систем. Найдены области устойчивости и области для начальных условий, полученные в результате многошаговой процедуры поиска решений с использованием ЛМН. Показано, что использование предложенных нелинейных законов управления позволяет уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейным. Приведены многочисленные моделирования, иллюстрирующие теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, нелинейный закон управления, линейные матричные неравенства.

## 1. Введение.

В теории автоматического управления существует практика использования различных нелинейных функций, замещающих или дополняющих существующие законы управления. Например, знаковые законы управления аппроксимируют сигмоидальными функциями [6, 5] для реализации на

---

<sup>1</sup> Результаты раздела 3 получены при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-08-01266-П).

<sup>2</sup> Игорь Борисович Фуртат, д.т.н., профессор (cainenash@mail.ru).

<sup>3</sup> Павел Александрович Гущи, к.т.н. (guschin.p@mail.ru).

<sup>4</sup> Копысова Есения Алексеевна (esyako@ya.ru).

практике, а также возможности избавиться от чаттеринга в окрестности плоскости скольжения и исследования замкнутой системы без разрывных нелинейностей. В [3, 2] ранее разработанный закон управления [4] пропускается через функцию гиперболического тангенса для уменьшения установившейся ошибки слежения по сравнению с [4]. Также в [6, 5, 3, 2] отмечается, что помимо повышения качества регулирования в установившемся режиме, использование сигмоидальных функций позволяет сформировать заранее ограниченный закон управления.

Однако ограниченный закон управления в условиях возмущений и неустойчивого объекта может повлечь рассмотрение ограничений на фазовое пространство для сохранения устойчивости замкнутой системы. В условиях же ограниченного фазового пространства можно рассматривать любые непрерывные функции, не только сигмоидальные.

В [6] показано, что аддитивная добавка, например, функции  $x^3$  к существующему закону управления повышает качество демпфирования внешних возмущений. В адаптивном управлении [1] суммирование сигмоидальных слагаемых к существующему адаптивному алгоритму повышает качество регулирования в установившемся режиме. В [9, 10] замена каждой компоненты вектора состояния  $x_i$  в линейном законе управления на соответствующие функции  $x_i^\gamma \text{sgn}\{x_i\}$ ,  $\gamma > 0$  позволяет увеличить скорость сходимости нормы вектора состояния замкнутой системы по сравнению с использованием линейного алгоритма.

Однако в [6, 5, 3, 2, 9, 10] использование нелинейных функций зачастую требует перерасчета настроечных коэффициентов для нового закона управления, что может усложнить процесс синтеза алгоритма. Проблема же введения нелинейных функций, не меняющих настроечных коэффициентов в существующих законах управления, но при этом улучшающих качество управления в установившемся режиме, в работах [6, 5, 3, 2, 9, 10] не рассматривалась. Поэтому в данной статье

на базе линейного закона управления рассмотрим построение новых нелинейных законов, не меняя настроечных параметров исходного линейного алгоритма. Также предложим новый метод исследования устойчивости таких систем, основанный на представлении нелинейной функции в линейной форме с нелинейным угловым коэффициентом. Такая форма позволит использовать аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) и упростить процедуру поиска множества устойчивости и множества начальных условий. Предложенная в статье многошаговая процедура поиска решений на базе ЛМН позволит расширить искомые области устойчивости и начальных условий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 задается линейный закон управления, стабилизирующий линейную систему. Не меняя настроечных коэффициентов в линейном законе, каждая компонента вектора состояния пропускается через нечетную функцию, либо весь линейный закон управления пропускается через нечетную функцию. В разделе 3 описываются предложенные методы решения и формулируются условия на свойства нелинейных функций, множества устойчивости и множества начальных условий при выполнении которых нелинейные законы управления будут стабилизировать объект управления. В разделе 4 показано, что предложенные нелинейные алгоритмы управления гарантируют выше точность в установившемся режиме, чем линейный закон управления. В разделе 5 приводятся результаты моделирования, подтверждающие теоретические выводы и иллюстрирующие эффективность используемого метода.

## 2. Постановка задачи.

Рассмотрим линейный объект

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df,$$

где  $x = \text{col}\{x_1, \dots, x_n\}$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}$  – сигнал управления,  $f \in \mathbb{R}^l$  – неизвестное возмущение такое, что  $|f| \leq$

$\bar{f}$ , матрицы  $A$ ,  $B$  и  $D$  известны и имеют соответствующие размерности, пара  $(A, B)$  управляема.

Известно [1], что существует матрица  $K = [k_1, \dots, k_n]$  такая, что закон управления

$$(2) \quad u = Kx = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$$

гарантирует выполнение предельного неравенства

$$(3) \quad \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} |x(t)| \leq \delta.$$

Здесь  $\delta > 0$  – точность регулирования в установившемся режиме.

В статье введем в рассмотрение нечетную функцию  $\varphi(\cdot)$ . С учетом данной функции и (2), построим два новых закона управления:

$$(4) \quad u = k_1\varphi(x_1) + \dots + k_n\varphi(x_n),$$

$$(5) \quad u = \varphi(k_1x_1 + \dots + k_nx_n).$$

Требуется определить условия на функцию  $\varphi(\cdot)$ , при которых при заданной матрице  $K$  в (2) законы управления (4) и (5) обеспечат выполнение предельного неравенства (3) с величиной  $\delta$  меньше, чем линейный закон управления (2).

Замечание 1. В качестве  $\varphi(\cdot)$  могут быть рассмотрены стандартные линейные, степенные и сигмоидальные функции, функция насыщения (см. рис. 1) и т.п. Другие специфические функции будут приведены далее.

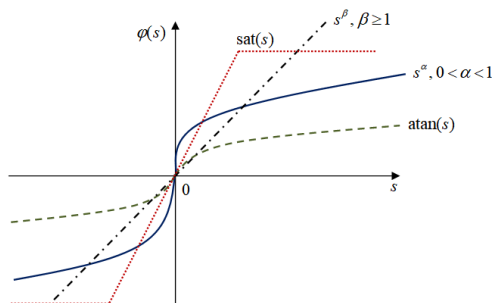


Рис. 1. Примеры функций  $\varphi(s)$ .

### 3. Метод решения.

Для исследования законов управления (4) и (5), рассмотрим представление нелинейной функции  $\varphi(s)$  в виде линейной  $\varphi(s) = \rho(s)s$  с нелинейным угловым коэффициентом  $\rho(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  (см. рис. 2). Такой подход позволит исследовать нелинейные законы управления (4), (5) наряду с линейным (2), а также привлечь аппарат линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы.

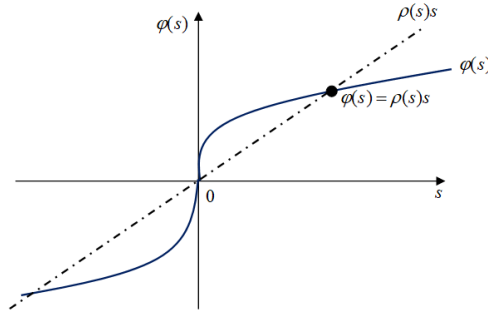


Рис. 2. Иллюстрация замены функции  $\varphi(s)$  на функцию линейного вида с переменным угловым коэффициентом  $\rho(s)$ .

#### 3.1. Анализ устойчивости замкнутой системы с законом управления (4).

Обозначим  $\Psi(x) = \text{diag}\{\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)\}$ . Подставив (4) в (1), запишем уравнение замкнутой системы

$$(6) \quad \dot{x} = (A + BK\Psi(x))x + Df.$$

Теорема 1. Пусть для заданных  $K$  в (2) и  $\tau_i > 0$  существуют  $0 \leq \underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$ ,  $\chi_i > 0$ ,  $\gamma_i > 0$  и  $P_i = P_i^T > 0$  такие, что выполнены следующие матричные неравенства

$$(7) \quad \begin{bmatrix} (A + BK\Psi_i)^T P_i + P_i (A + BK\Psi_i) + \tau P_i & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} < 0, \\ P_i > \gamma_i I$$

в вершинах  $\Psi_i = \text{diag}\{\{\rho_{i-1}, \rho_i\}, \dots, \{\rho_{i-1}, \rho_i\}\}$ ,  $i = 1, \dots, v$ . Тогда область устойчивости  $\mathcal{X}$ , множество допустимых началь-

ных условий  $\mathcal{X}_0$  и верхняя оценка времени  $T$  вхождения в инвариантную область  $|x(t)| < \varepsilon$  определяются в виде

$$(8) \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \leq |x_i| \leq \bar{x}, i = 1, \dots, n\},$$

$$(9) \quad \mathcal{X}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \bar{x}_0 := \sqrt{\frac{\tau \gamma \bar{x}^2 - 2 \bar{\chi} \bar{f}}{n^2 \tau \|P\|}} \right\},$$

$$(10) \quad T = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\tau |x(0)|^2 \|\bar{P}\| + \bar{\chi} \bar{f}}{\tau \gamma \varepsilon^2 - \bar{\chi} \bar{f}},$$

$\underline{x} > 0$  и  $\bar{x} > 0$  находятся как  $s \in [-\bar{x}; -\underline{x}] \cup [\underline{x}; \bar{x}]$  из решения неравенств  $\varphi(s) - \underline{\rho}s \geq 0$  и  $\varphi(s) - \bar{\rho}s \leq 0$ ,  $\underline{\tau} = \min_{i=1, \dots, v} \{\tau_i\}$ ,  $\underline{\gamma} = \min_{i=1, \dots, v} \{\gamma_i\}$ ,  $\bar{\chi} = \max_{i=1, \dots, v} \{\chi_i\}$  и  $\|\bar{P}\| = \max_{i=1, \dots, v} \{\|P_i\|\}$ .

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы выберем функции Ляпунова

$$(11) \quad V_i = x^T P_i x, \quad i = 1, \dots, v$$

и потребуем выполнение условий

$$(12) \quad \dot{V}_i + \tau_i V_i - \chi_i f^T f < 0, \quad i = 1, \dots, v.$$

Подставляя (6) и (11) в (12), получим

$$(13) \quad x^T [(A + BK\Psi_i(x))^T P_i + P_i(A + BK\Psi_i(x))] x + 2x^T P_i D f + \tau_i x^T P_i x - \chi_i f^T f < 0, \quad i = 1, \dots, v.$$

Введя новый вектор  $z = \text{col}\{x, f\}$ , перепишем (13) как

$$(14) \quad z^T \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} z < 0, \\ i = 1, \dots, v,$$

где  $\Psi(x)_{11,i} = A + BK\Psi_i(x))^T P_i + P_i(A + BK\Psi_i(x)) + \tau P$

Неравенство (14) будет выполнено, если будет выполнено условие

$$(15) \quad \begin{bmatrix} \Psi(x)_{11,i} & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} < 0, \\ i = 1, \dots, v.$$

Элементы диагональной матрицы  $\Psi_i(x)$  принадлежат отрезку  $[\rho_{i-1}; \rho_i]$ . Значит, ЛМН (15) содержит полнотопную неопределенность. Согласно лемме [8], такое неравенство будет выполнено, если оно будет выполнено в вершинах полнотопы  $[\rho_{i-1}; \rho_i]$ . Значит, замкнутая система (6) устойчива.

Пусть для любых  $\underline{x} > 0$  и  $\bar{x} > 0$  выполнены неравенства  $\varphi(s) - \underline{\rho}s \geq 0$  и  $\varphi(s) - \bar{\rho}s \leq 0$ . Тогда  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$  являются нижней и верхней оценками множества устойчивости, записанного в виде (8).

Запишем решение неравенства (12) в виде

$$(16) \quad \underline{\gamma}|x|^2 < x^T P_i x < \frac{\bar{x}\bar{f}}{\underline{\tau}} + \left( \|\bar{P}\|\bar{x}_0^2 + \frac{\bar{x}\bar{f}}{\underline{\tau}} \right) e^{-\underline{\tau}t}, \quad i = 1, \dots, v.$$

Учитывая (8) и (16) и приняв  $\underline{\gamma}n^2\bar{x}^2 = \frac{2\bar{x}\bar{f}}{\underline{\tau}} + \|\bar{P}\|\bar{x}_0^2$ , получим результат (9).

Верхняя оценка времени  $T$  при котором  $|x(t)|$  попадут в заданную область  $|x(t)| < \varepsilon$  и больше ее не покинут, определяется в виде (10) из (16).

**Замечание 2.** В формулировке теоремы разрешимость (7) ищется во внутренних точках  $\underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$  интервала, а не сразу на границах  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$  согласно лемме [8]. Это связано с тем, что применив лемму [8] для поиска  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$  при которых ЛМН (7) будет разрешимо, можно получить более грубые решения, чем при использовании следующей многошаговой процедуры. Согласно данной процедуре предлагается сначала определить интервал  $(\underline{\rho}, \rho_1)$ , в вершинах которого ЛМН (7) имеет решение, воспользовавшись леммой [8]. Затем, ищется следующий интервал  $(\rho_1, \rho_2)$ , в вершинах которого ЛМН (7) имеет решение. Данная процедура продлевается до тех пор, пока не находится предельное значение  $\rho_k = \bar{\rho}$  такое, что в вершинах  $(\rho_{k-1}, \rho_k)$  ЛМН (7) еще сохраняется решение. В результате применения многошаговой процедуры длина интервала  $(\underline{\rho}; \bar{\rho})$  может быть больше, чем при использовании только леммы [8].

**Замечание 3.** Для применения многошаговой процедуры (см. замечание 2) можно воспользоваться следующими рекомендациями для поиска  $\bar{\rho}$ . Если  $\left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \rho(0) < \infty$ , то  $\bar{\rho} \leq \rho(0)$  (см. рис. 3 слева). Если  $\left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \infty$ , то  $\bar{\rho}$  увеличивается до тех пор, пока ЛМН (7) еще будет иметь решение на интервале  $(\rho_{v-1}; \rho_v)$  (см. рис. 3 справа). В некоторых случаях

возможно  $\bar{\rho} = \infty$ , что соответствует обратной связи с большим коэффициентом усиления.

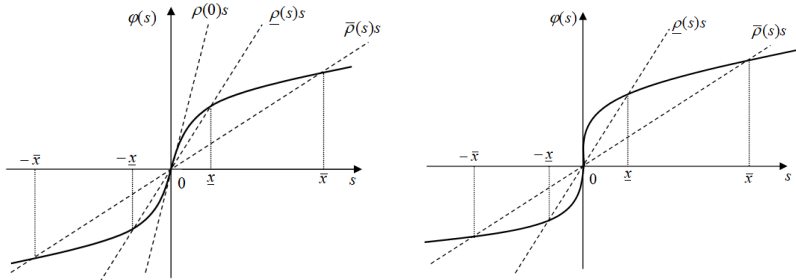


Рис. 3. Поиск  $\bar{\rho}$  при  $\rho(0) < \infty$  (слева) и при  $\rho(0) = \infty$  (справа).

**Замечание 4.** Результаты секции 2 можно обобщить на закон управления вида  $u = k_1\varphi_1(x_1) + \dots + k_n\varphi_n(x_n)$ .

### 3.2. Анализ устойчивости замкнутой системы с законом управления (5).

Переписав  $\varphi(KX)$  в виде  $\varphi(Kx) = \rho(Kx)Kx$  и подставив (5) в (1), получим

$$(17) \quad \dot{x} = (A + BK\rho(Kx))x + Df.$$

**Теорема 2.** Пусть для заданных  $K$  и  $\tau_i > 0$  существуют  $0 \leq \underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$ ,  $\chi_i > 0$ ,  $\gamma_i > 0$  и  $P_i = P_i^T > 0$  такие, что выполнены матричные неравенства (7) в вершинах  $\Psi_i = \{\rho_{i-1}, \rho_i\}$ ,  $i = 1, \dots, v$ . Тогда область устойчивости  $\mathcal{X}$ , множество допустимых начальных условий  $\mathcal{X}_0$  и верхняя оценка времени переходного процесса  $T$  в область  $|x(t)| < \varepsilon$  определяются в виде (8), (9), (10), где  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$  находятся как  $s \in [\underline{x}, \bar{x}]$ :  $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \underline{\rho} s \sum_{i=1}^n k_i \geq 0$  и  $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \bar{\rho} s \sum_{i=1}^n k_i \leq 0$ .

**Доказательство.** Ради простоты положим  $x_1 = \dots = x_n = s$ . Пусть для любого  $s \in [\underline{x}, \bar{x}]$  выполнены неравенства  $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \underline{\rho} s \sum_{i=1}^n k_i \geq 0$  и  $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \bar{\rho} s \sum_{i=1}^n k_i \leq 0$ . Тогда  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$  являются нижней и верхней оценками множества устойчивости, записанного в виде (8).

Поскольку структура (17) подобна структуре (6), то дальнейшее доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

#### 4. Анализ значения $\delta$ в (3) для линейного и нелинейных регуляторов и примеры функций $\varphi(s)$ .

Покажем, что алгоритмы (4) и (5) обеспечивают лучше предельную ошибку, по сравнению с алгоритмом (2). Для этого необходимо рассмотреть решение любой оптимизационной задачи. Например, рассмотрим оптимизационную задачу из [7], которая в нашем случае будет сформулирована в следующем виде. Для заданных  $K$  и  $\tau$  требуется найти  $P$  и  $\gamma$ , удовлетворяющие следующей оптимизационной задаче:

$$(18) \quad \begin{aligned} & \text{maximize } \gamma \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} (A + BK\Theta)^T P + P(A + BK\Theta) + \tau P & PD \\ * & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \\ & \text{and } P - \gamma I > 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$(19) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \delta := \sqrt{\frac{\bar{f}}{\gamma}}.$$

Для нелинейного регулятора (2) оптимизационная задача решается при  $\Theta = I$ , для нелинейного при  $\Theta = \bar{\rho}I$  в установившемся режиме. Поскольку для нелинейного регулятора  $\|\Theta\| > 1$  (см. рис. 4, где для каждого фиксированного значения  $\hat{x}_i$ :  $|\hat{x}_i| < |\varphi(\hat{x}_i)|$ ), значит,  $\gamma$  для (2) будет меньше, чем для (4) и (5). Другими словами, при  $\|\Theta\| > 1$  происходит увеличение коэффициента в обратной связи, что делает матрицу  $A + BK\Theta$  «более» устойчивой. Для «более» устойчивой матрицы требуется «больше» матрица  $P$  (а, значит, и больше  $\gamma$ ), что соответствует «меньшему» притягивающему эллипсоиду в установившемся режиме.

Приведем некоторые примеры функций, для которых справедливы полученные результаты:

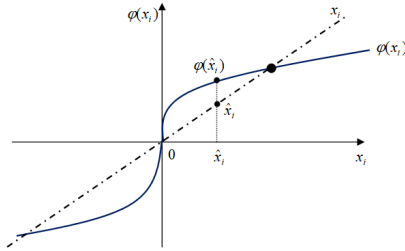


Рис. 4. Сравнение линейного и нелинейного регуляторов.

- (1)  $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s)$ ,  $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s)$ ,  $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s}}{1+e^{-0.5\sigma s}}$  и т.п. Достоинство таких функций состоит в том, что они гарантируют ограниченность закона управления. Однако для них всегда существует  $\bar{x} < \infty$ .
- (2)  $\varphi(s) = s^\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $\varphi(s) = s^{\psi(s)}$  с четной, ограниченной, положительной функцией  $\psi(s)$  такой, что  $\psi(0) < 1$  и  $\psi(\pm\infty) < \infty$  (например,  $\psi(s) = \mu \frac{s^2 + \mu^{-2}}{s^2 + 1}$ ,  $\mu > 0$ ),  $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$  и т.п. Достоинство таких функций состоит в том, что они гарантируют ускоренную сходимость. Однако для них может существовать  $\underline{x} < \infty$  и всегда существует  $\bar{x} < \infty$ .
- (3)  $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s) + \vartheta s$ ,  $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s) + \vartheta s$ ,  $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s}}{1+e^{-0.5\sigma s}} + \vartheta s$  и т.п. По сравнению с (1) данные функции неограниченные. Однако за счет соответствующего выбора  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\vartheta$  можно обеспечить  $\underline{x} = 0$  и  $\bar{x} = \infty$ .

## 5. Примеры моделирования.

Рассмотрим систему (1) со следующими параметрами:

$$(20) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = 0.15[1 + \sin(t) + \text{sat}\{d(t)\}].$$

Здесь  $\text{sat}\{\cdot\}$  — функция насыщения,  $d(t)$  — белый шум, моделируемый в Матлаб со следующими параметрами: мощность шума 0.1 и время выборки 0.1.

Выберем матрицу  $K = [k_1 \ k_2] = [-2 \ -4]$  в линейном законе управления (2), стабилизирующую объект (1). Рассмотрим следующие нелинейные функции:

$$(21) \quad \varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s), \varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s), \varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s}}{1+e^{-0.5\sigma s}};$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi(s) &= s^\lambda, \quad \varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s^\lambda), \\ \varphi(s) &= \mu \arctg(\sigma s^\lambda), \quad \varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s^\lambda}}{1+e^{-0.5\sigma s^\lambda}}, 0 < \lambda < 1; \end{aligned}$$

$$(23) \quad \varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}, 0 < \lambda < 1, \quad \varphi(s) = s^{\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}}, \vartheta > 1.$$

Для функций (21) существует  $\rho(0)$ , для функций (22) и (23)  $\rho(0)$  не существует.

### 5.1. Использование закона управления (4).

Для заданных (20),  $\tau = 0.01$  и  $K = [-2 \ -4]$  ЛМН (7) разрешимо при  $\underline{\rho} = \rho_0 = 0.6$ ,  $\rho_1 = 0.8$ ,  $\rho_2 = 2$ ,  $\rho_3 = 13$ ,  $\rho_4 = 110$ ,  $\rho_5 = 967$ ,  $\rho_6 = 967$ ,  $\rho_7 = 8542$ ,  $\rho_8 = 37362$ . Решения существуют и при итерациях, больше 8. Однако примем  $\bar{\rho} = \rho_8 = 37362$ .

Функции (21). Положим  $\mu = 1$  и  $\sigma = 30$ . В таблице 1 приведены результаты расчетов и моделирования, а на рис. 5 приведены результаты переходных процессов по  $|x(t)|$  при  $x(0) = [0.2 \ 0.2]^T$ . В таблице 1 при расчете  $\delta$  из (19) бралось малое значение  $\bar{f} = 10^{-8}$  из-за грубости оценок. Результаты моделирования приведены для  $f(t)$  из (20).

Таблица 1. Результаты расчетов и моделирования для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с  $\varphi(s)$  из (21) при  $\mu = 1$  и  $\sigma = 30$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                              | $\rho(0)$   | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 5 при $f(t)$ из (20) |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (2): $\varphi(s) = s$                                                 | 1           | $[0; \infty)$              | $\infty$    | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $2.6 \cdot 10^{-2}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s)$                          | $\mu\sigma$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $2 \cdot 10^{-3}$                     |
| (4): $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s)$                              | $\mu\sigma$ | $[0; 1.9]$                 | 0.65        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $2 \cdot 10^{-3}$                     |
| (4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s}}{1+e^{-0.5\sigma s}}$ | $\mu\sigma$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $1.2 \cdot 10^{-2}$                   |

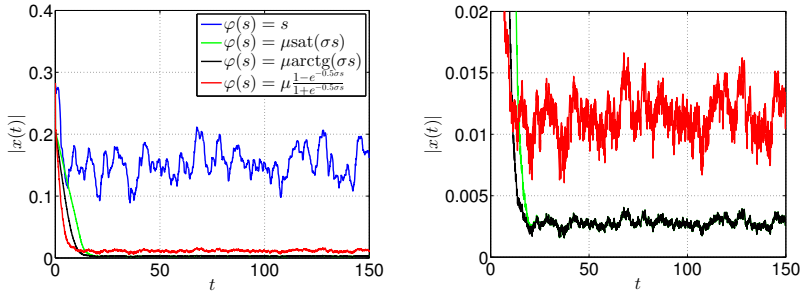


Рис. 5. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с  $\varphi(s)$  из (21) при  $\mu = 1$  и  $\sigma = 30$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

Функции (22). Примем  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 30$  и  $\lambda = 5/7$ . В таблице 2 приведены результаты расчетов при  $\bar{f} = 10^{-8}$  и моделирования для  $f(t)$  из (20). На рис. 6 приведены результаты переходных процессов по  $|x(t)|$  при  $f(t)$  из (20) и  $x(0) = [0.1 \ 0.1]^T$ .

Таблица 2. Результаты расчетов для нелинейностей  $\varphi(s)$  из (22) при  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 30$  и  $\lambda = 5/7$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                                                  | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 6 при $f(t)$ из (20) |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (4): $\varphi(s) = s^\lambda$                                                             | $[0; 1.4]$                 | 0.45        | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $3.6 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \operatorname{sat}(\sigma s^\lambda)$                              | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \operatorname{arctg}(\sigma s^\lambda)$                            | $[0; 1.86]$                | 0.64        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \frac{1 - e^{-0.5\sigma s^\lambda}}{1 + e^{-0.5\sigma s^\lambda}}$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $2.5 \cdot 10^{-4}$                      | $2.2 \cdot 10^{-4}$                   |

Функции (23). Примем  $\lambda = 5/7$  и  $\vartheta = 3$ . В таблице 3 приведены результаты расчетов при  $\bar{f} = 10^{-8}$  и моделирования для  $f(t)$  из (20). На рис. 7 приведены результаты переходных процессов при  $f(t)$  из (20) и  $x(0) = [0.1 \ 0.1]^T$ .

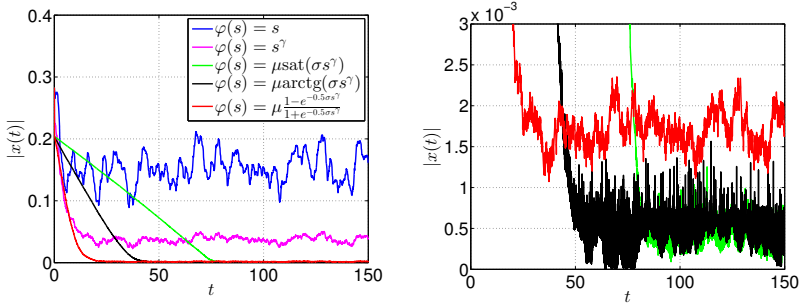


Рис. 6. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с  $\varphi(s)$  из (22) при  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 30$  и  $\gamma = 5/7$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

Таблица 3. Результаты расчетов для нелинейностей  $\varphi(s)$  из (23) при  $\lambda = 5/7$  и  $\vartheta = 3$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                              | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 7 при $f(t)$ из (20) |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (4): $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$                         | $[0; 1.4]$                 | 0.45        | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $3.6 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = s^{\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}}$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                   |

## 5.2. Использование закона управления (5).

Для заданных (20),  $\tau = 0.01$  и  $K = [-2 \ -4]$  ЛМН (7) разрешимо при  $\underline{\rho} = \rho_0 = 0.53$ ,  $\rho_1 = 0.6$ ,  $\rho_2 = 8$ ,  $\rho_3 = 105526$ . Решения существуют и при итерациях, больше 3. Однако пусть  $\bar{\rho} = \rho_3 = 105526$ .

Ниже в таблицах 4–6 и на рис. 8–10 используются те же функции  $\varphi(s)$  с теми же параметрами, что и в предыдущей подсекции.

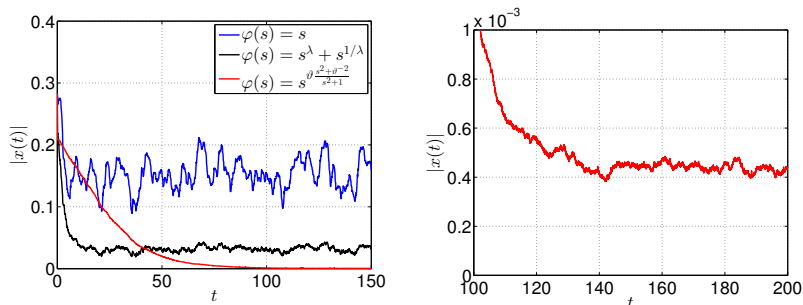


Рис. 7. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с  $\varphi(s)$  из (23) при  $\lambda = 5/7$  и  $\vartheta = 3$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

Таблица 4. Результаты расчетов и моделирования для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с  $\varphi(s)$  из (21) при  $\mu = 1$  и  $\sigma = 100$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                              | $\rho(0)$   | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 8 при $f(t)$ из (20) |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (2): $\varphi(s) = s$                                                 | 1           | $[0; \infty)$              | $\infty$    | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $4.2 \cdot 10^{-2}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \text{ sat}(\sigma s)$                         | $\mu\sigma$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $2.5 \cdot 10^{-3}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \text{ arctg}(\sigma s)$                       | $\mu\sigma$ | $[0; 1.9]$                 | 0.65        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $5 \cdot 10^{-3}$                     |
| (4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s}}{1+e^{-0.5\sigma s}}$ | $\mu\sigma$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $2.5 \cdot 10^{-3}$                   |

Таблица 5. Результаты расчетов для нелинейностей  $\varphi(s)$  из (22) при  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 100$  и  $\lambda = 5/7$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                                              | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 9 при $f(t)$ из (20) |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (4): $\varphi(s) = s^\lambda$                                                         | $[0; 1.4]$                 | 0.45        | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $3.6 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \text{ sat}(\sigma s^\lambda)$                                 | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \text{ arctg}(\sigma s^\lambda)$                               | $[0; 1.86]$                | 0.64        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                   |
| (4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0.5\sigma s^\lambda}}{1+e^{-0.5\sigma s^\lambda}}$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $2.5 \cdot 10^{-4}$                      | $2.2 \cdot 10^{-4}$                   |

## 6. Заключение

В работе разработаны нелинейные законы управления, полученные из линейного путем двух типов замен с использо-

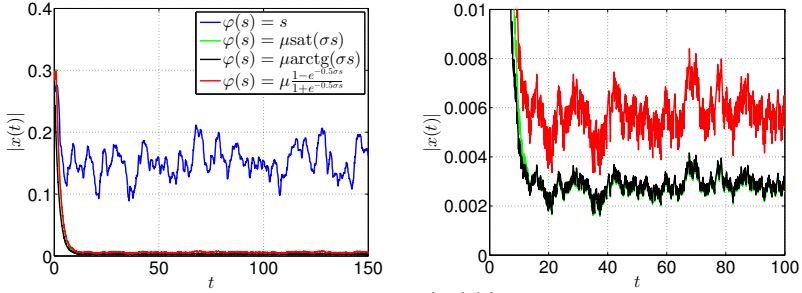


Рис. 8. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с  $\varphi(s)$  из (21) при  $\mu = 1$  и  $\sigma = 100$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

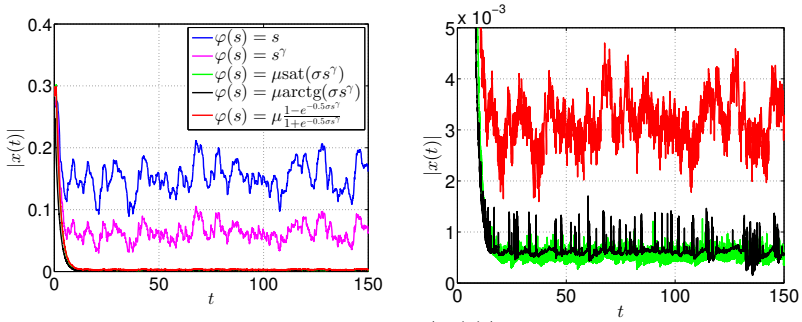


Рис. 9. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с  $\varphi(s)$  из (22) при  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 100$  и  $\lambda = 5/7$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

Таблица 6. Результаты расчетов для нелинейностей  $\varphi(s)$  из (23) при  $\lambda = 5/7$  и  $\vartheta = 3$ .

| Закон упр.: $\varphi(s)$                                            | $[\underline{x}; \bar{x}]$ | $\bar{x}_0$ | $\delta$ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$ | $\delta$ из рис. 10 при $f(t)$ из (20) |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| (4): $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$                       | $[0; 1.4]$                 | 0.45        | $3.9 \cdot 10^{-4}$                      | $3.6 \cdot 10^{-4}$                    |
| (4): $\varphi(s) = s^\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}$ | $[0; 1.25]$                | 0.38        | $3.6 \cdot 10^{-4}$                      | $3.1 \cdot 10^{-4}$                    |

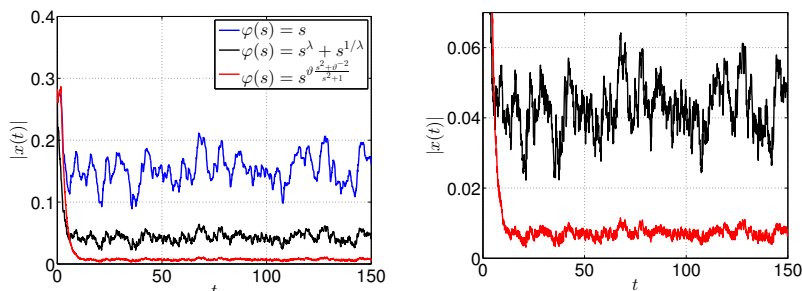


Рис. 10. Переходные процесс по  $|x(t)|$  для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с  $\varphi(s)$  из (23) при  $\lambda = 5/7$  и  $\vartheta = 3$  (справа рисунок в увеличенном масштабе).

ванием нечетных функций. Первая замена состоит в пропуске каждой компоненты вектора состояния через нелинейную функцию, вторая замена – в пропуске всего линейного закона управления через нелинейную функцию. Предложено нелинейные функции представить в виде линейных с нелинейным угловым коэффициентом для анализа устойчивости замкнутой системы. Такое представление позволяет использовать аппарат ЛМН для исследования устойчивости замкнутых систем. Найдены области устойчивости и области для начальных условий, полученные в результате многошаговой процедуры поиска решений с использованием ЛМН. Показано, что использование предложенных нелинейных законов управления позволяет уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейным.

## Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб.: Наука, 2000.
2. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения Большие откло-

- нения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика.
3. КРАСНОВА С.А., АНТИПОВ А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. – 2016. – № 4. – С. 10–21.
4. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006.
5. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. – 2015. – № 5. – С. 27–36.
6. ХАЛИЛ Х.К. Нелинейные системы. – М-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
7. BOYD S., GHAOUI L.E., FERON E., BALAKRISHNAN V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
8. FRIDMAN E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. – Springer, International Publishing, 2014.
9. NEKHOROSHIKH A.N., EFIMOV D., POLYAKOV A., PERRUQUETTI W., FURTAT I.B., FRIDMAN E. On output-based accelerated stabilization of a chain of integrators: Implicit Lyapunov-Krasovskii functional approach // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, no. 2. – P. 5982–5987.
10. NEKHOROSHIKH, A.N., EFIMOV, D., POLYAKOV, A., PERRUQUETTI, W., FURTAT, I.B. On finite-time stabilization of a class of nonlinear time-delay systems: Implicit Lyapunov-Razumikhin approach // Proc. IEEE Conference on Decision and Control, 2020. – P. 1975–1980.

## NONLINEAR CONTROL LAWS BASED ON LINEAR ONES USING ODD FUNCTIONS

Igor Furtat, Institute for Problems in Mechanical Engineering of  
RAS, St. Petersburg, Doctor of Sc., professor  
(cainenash@mail.ru).

Pavel Gushchin, Institute for Problems in Mechanical  
Engineering of RAS, St. Petersburg, Candidate of Science  
(gushchin.p@mail.ru).

Esenia Kopisova, Institute for Problems in Mechanical  
Engineering of RAS, St. Petersburg, Candidate of Science  
(esyako@ya.ru).

**Abstract:** The paper investigates nonlinear control laws obtained from linear one by two types of coordinate change by using odd functions. The first coordinate change consists in passing each component of the state vector through a nonlinear function, the second coordinate change is in passing the entire linear control law through a nonlinear function. To study such systems, it is proposed to represent nonlinear functions as linear ones with a nonlinear slope. Such a representation will allow using the methods of linear matrix inequalities (LMI) to study the stability of the closed-loop systems. The stability domains and the domains for the initial conditions are found, obtained as a result of a multi-step solution search procedure using LMI. It is shown that the use of the proposed nonlinear control laws makes it possible to reduce the steady-state error compared to the linear one. The simulations illustrate the theoretical conclusions.

**Keywords:** dynamical system, nonlinear control law, linear matrix inequalities.

УДК 519.7  
ББК Ж 50

Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...

Дата опубликования ...