

УДК 519.177

ББК 22.18

ПОЛНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПРОВОДИМОСТЯМИ

Кузнецов О.П.¹

(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Жилякова Л.Ю.²

(Педагогический институт ЮФУ, Ростов-на-Дону)

Ресурсная сеть – потоковая модель, представленная ориентированным взвешенным графом, в котором любые две вершины либо не смежны, либо соединены парой противоположно ориентированных ребер. Ресурс располагается в вершинах, веса ребер обозначают их проводимость (пропускную способность). В дискретные моменты времени вершины обмениваются ресурсами. Рассматриваются процессы динамического распределения ресурсов в полных сетях с произвольной проводимостью ребер и условия их стабилизации.

Ключевые слова: ресурсная сеть, проводимость, предельное состояние, аттрактор.

1. Введение

Ресурсная сеть, предложенная в [4], – это динамическая потоковая модель, в которой в дискретном времени происходит перераспределение ресурса в вершинах при сохранении суммарного ресурса. Сеть представлена двусторонним ориентированным графом: смежные вершины соединены парой противо-

¹ Олег Петрович Кузнецов, доктор технических наук, профессор (olkuznes@ipu.rssi.ru).

² Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук, (zhilyakov@aaanet.ru).

положно ориентированных ребер. Ребрам сети приписаны проводимости (пропускные способности). В отличие от классической потоковой модели Форда – Фалкерсона [5, 6] в которой ресурс течет от источников к стокам и находится в ребрах, в ресурсной сети ресурс содержится в вершинах, а направленность потока отсутствует. Потоковая сеть без источников и стоков предложена в [2], однако в ней за состояние принимается распределение ресурса по ребрам. В ресурсной сети состояние соответствует распределению ресурса в вершинах.

В работе [4] были исследованы полные однородные (с одинаковой проводимостью ребер) ресурсные сети без петель. В настоящей работе рассматриваются свойства полных ресурсных сетей с различной проводимостью ребер. Исследуются условия сходимости процесса перераспределения ресурса, а также предельные состояния при разных величинах суммарного ресурса.

2. Основные определения

1.1. *Ресурсной сетью* называется ориентированный граф, вершинам v_i которого приписаны неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени t и называемые *ресурсами*, а ребрам (v_i, v_j) – положительные числа r_{ij} , постоянные во времени и называемые *проводимостями*; n – число вершин.

1.2. *Состоянием сети* в момент t будем называть вектор $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

В каждый момент вершины передают по выходящим ребрам количество ресурса, зависящее от проводимостей ребер. Правила передачи удовлетворяют следующим условиям:

1) сеть замкнута: ресурсы извне не поступают и не расходуются;

2) ресурс, отдаваемый вершиной, вычитается из ее ресурса; ресурс, приходящий в вершину, прибавляется к ее ресурсу, т.е. выполнен закон *сохранения суммарного ресурса* W :

$$\forall t \sum_{i=1}^n q_i(t) = W.$$

1.3. Состояние $Q(t)$ называется *устойчивым*, если

$$Q(t) = Q(t+1) = Q(t+2) = Q(t+3) = \dots$$

Состояние $Q = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется *асимптотически достижимым* из состояния $Q(0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$.

Состояние сети называется *предельным*, если оно либо устойчиво, либо асимптотически достижимо.

1.4. Ресурсная сеть называется *однородной*, если все проводимости равны (обозначим их через r).

В правилах функционирования однородной сети, сформулированных в [4], уточним время выхода и прихода ресурса:

в момент t вершина v_i по каждому из своих m_i выходящих ребер отдает:

- r единиц ресурса, если $m_i r \leq q_i(t)$ (правило 1);
- $\frac{q_i(t)}{m_i}$ в противном случае (правило 2);

ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру (v_i, v_j) в момент t , приходит в вершину v_j в момент $t+1$.

Соответственно, будем считать, что этот ресурс на интервале $(t, t+1)$ находится на ребре (v_i, v_j) . Его величину назовем *выходным потоком* $s_{ij}(t)$.

Матрицей потока $S(t)$ назовем матрицу $\|s_{ij}(t)\|_{n \times n}$.

$$\sum_{j=1}^n s_{ij}(t) = s_i^{out}(t) - \text{выходной поток из вершины } v_i \text{ в момент } t$$

(сумма элементов i -й строки матрицы $S(t)$); $s_i^{out}(t) \leq r_i^{out}$.

Входным потоком $s_j^{in}(t+1)$ в вершину v_j в момент $t+1$ назовем сумму элементов j -го столбца $S(t)$:

$$s_j^{in}(t+1) = \sum_{i=1}^n s_{ij}(t); \text{ кроме того, положим } s_j^{in}(0) = 0.$$

1.5. Пару ребер $\langle (v_i, v_j), (v_j, v_i) \rangle$ назовем *двусторонней парой*. Сеть, вершины которой соединены только двусторонними парами, назовем *двусторонней сетью*.

1.6. Двусторонняя сеть называется *полной*, если любые две вершины соединены двусторонней парой, и *симметричной*, если в каждой двусторонней паре проводимости одинаковы.

1.7. Матрицей проводимости сети будем называть матрицу $R = \|r_{ij}\|_{n \times n}$.

Из определения ресурсной сети вытекают следующие свойства матрицы R :

1. R – неотрицательная матрица: $\forall i, j \ r_{ij} \geq 0$

2. $\forall i \ r_{ii} > 0$

3. $\forall i, j \ (r_{ij} > 0 \Leftrightarrow r_{ji} > 0)$

Для полной ресурсной сети матрица R положительна.

1.8. Суммарной проводимостью сети r_{sum} назовем сумму проводимостей всех ее ребер: $r_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}$.

1.9. Суммарную проводимость входных ребер вершины v_i будем называть ее *входной проводимостью* и обозначать через

$r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$; суммарную проводимость выходных ребер, соответственно, назовем *выходной проводимостью* и обозначим

через $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$. Проводимость петли входит в обе суммы.

3. Однородные двусторонние полные сети с петлями

В [4] показано, что однородные сети обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Если для некоторого $t \ q_i(t) = q_j(t)$, то для всех $t' > t \ q_i(t') = q_j(t')$.

Свойство 2. Если для некоторого $t \ q_i(t) \leq r(n-1)$, то для всех $t' > t \ q_i(t') \leq r(n-1)$.

Свойство 3. Если для всех $i \ q_i(t) \geq r(n-1)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.

Будем считать, что вершины пронумерованы так, что

- (1) $q_1(0) \geq \dots \geq q_k(0) > q_{k+1}(0) \geq \dots \geq q_n(0)$,
 где $q_k(0) > rn$, а $q_{k+1}(0) \leq rn$.

Назовем множество вершин, для которых $q_i(t) > rn$, зоной $Z^+(t)$, множество вершин, для которых $q_i(t) \leq rn$, – зоной $Z^-(t)$. Зона $Z^+(0)$ – первые k вершин, зона $Z^-(0)$ – остальные вершины.

Отрезок вектора $Q(t)$, содержащий только состояния вершин из $Z^+(t)$, обозначим $Q^+(t)$; отрезок $Q(t)$, соответствующий $Z^-(t)$, обозначим $Q^-(t)$.

Представим эти отрезки в следующем виде:

- (2) $Q^+(t) = (rn + c_1(t), \dots, rn + c_k(t))$,
 $Q^-(t) = (rn - d_{k+1}(t), \dots, rn - d_n(t))$,
 где все $c_i > 0$, $d_i \geq 0$.

Введем обозначения¹: $C(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t)$; $D(t) = \sum_{i=k+1}^n d_i(t)$. Так как

$D(t)$ – это ресурс, которого зоне Z^- не хватает до $rn(n - k)$. Назовем $D(t)$ *дефицитом* зоны $Z^-(t)$, $C(t)$ – *профицитом* зоны $Z^+(t)$.

Просуммировав компоненты $Q(0)$, получим:

- (3) $\sum_{i=1}^n q_i(0) = W = rn^2 + C(0) - D(0)$,

откуда заключаем, что

- (4) $C(t) - D(t) = \text{const} = p$ и $W = rn^2 + p$.

Пример: $n = 5$, $r = 2$, $rn = 10$, $W = 60$. $Q(0) = (20, 17, 9, 8, 6)$. Тогда $k = 2$, зона $Z^+(0)$ – первые две вершины; $c_1(0) = 10$, $c_2(0) = 7$, $C(0) = 17$, $d_3(0) = 1$, $d_4(0) = 2$, $d_5(0) = 4$, $D(0) = 7$, $p = 10$

¹ В общем случае k – величина переменная, так как мощность $Z^+(t)$ может меняться (в дальнейшем увидим, что она может только убывать). Поэтому под обозначением k будем подразумевать $k(t)$, но писать $k(t)$ не будем, чтобы не загромождать обозначений.

$$S^{out}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1,8 & 1,8 & 1,8 & 1,8 & 1,8 \\ 1,6 & 1,6 & 1,6 & 1,6 & 1,6 \\ 1,2 & 1,2 & 1,2 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix}; S^{in}(0) = 0.$$

Однородные сети с петлями в отличие от однородных сетей без петель обладают еще одним важным свойством:

Свойство 4: Для любых t , $s_i^{in}(t) = s_j^{in}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Это следует из того, что каждая вершина по всем выходящим ребрам отдает одинаковый ресурс. Поэтому для любого t все столбцы матрицы потока одинаковы, что видно из примера.

Лемма 1. Если в момент t вершины $v_{i1}, \dots, v_{im}$ ($m \leq n$) находятся в зоне Z^- , то

$$q_{i1}(t+1) = \dots = q_{im}(t+1).$$

Поскольку все вершины зоны Z^- момент t отдают весь свой ресурс, то их ресурс в момент $t+1$ равен поступающему к ним входному потоку. Тогда лемма верна в силу свойства 4. $\square$

Введем теперь следующие величины:

$$s_+^{out}(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n s_{ij}(t) - \text{суммарный выходной поток из } Z^+(t).$$

$$s_-^{out}(t) = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(t) - \text{суммарный выходной поток из } Z^-(t).$$

$$s^{out}(t) = s_+^{out}(t) + s_-^{out}(t) - \text{общий выходной поток.}$$

Соответствующие входные потоки обозначим $s_+^{in}(t+1)$, $s_-^{in}(t+1)$, $s^{in}(t+1)$.

Из модифицированного правила функционирования следует, что $s^{out}(t) = s^{in}(t+1)$.

Имеем:

$s_+^{out}(t) = rkn$ (для всех вершин из $Z^+(t)$ выходной поток равен rn).

$s_-^{out}(t) = rn(n - k) - D(t)$ (все вершины из $Z^-(t)$ отдают весь свой ресурс).

$$s_-^{out}(t) = rkn + rn(n - k) - D(t) = rn^2 - D(t).$$

В силу свойства 4 общий входной поток делится между всеми вершинами поровну. Поэтому

$$s_+^{in}(t + 1) = \frac{k}{n} s_-^{out}(t) = \frac{k}{n} (rn^2 - D(t)) = rkn - \frac{k}{n} D(t).$$

$$s_-^{in}(t + 1) = \frac{n - k}{n} s_-^{out}(t) = \frac{n - k}{n} (rn^2 - D(t)).$$

Для $Z^+(t + 1)$ назовем дивергенцией величину $\text{Div } Z^+(t + 1) = s_+^{in}(t + 1) - s_+^{out}(t)$. Получим:

$$\text{Div } Z^+(t + 1) = rkn - \frac{k}{n} D(t) - rkn = - \frac{k}{n} D(t).$$

$$\text{Соответственно, } \text{Div } Z^-(t + 1) = \frac{k}{n} D(t).$$

Это означает, что в течение интервала $(t, t + 1)$ из Z^+ в Z^- перетекает ресурс $\frac{k}{n} D(t)$.

Если в момент $t + 1$ Z^+ не меняется, то

$$Q^+(t + 1) = (rn + c_1(t) - \frac{D(t)}{n}, \dots, rn + c_k(t) - \frac{D(t)}{n}),$$

$$Q^-(t + 1) = (\frac{s_+^{in}(t + 1)}{n}, \dots, \frac{s_+^{in}(t + 1)}{n}) = (rn - \frac{D(t)}{n}, \dots, rn - \frac{D(t)}{n}),$$

откуда

$$(5) \quad D(t + 1) = \frac{n - k}{n} D(t) = D(t)(1 - \frac{k}{n}) = D(0)(1 - \frac{k}{n})^t,$$

$$s_+^{out}(t + 1) = rkn;$$

$$s_-^{out}(t + 1) = rn(n - k) - \frac{n - k}{n} D(t).$$

$$s_-^{out}(t + 1) = rn^2 - \frac{n - k}{n} D(t).$$

Тогда приращение потока:

$$\Delta s^{out}(t+1) = s^{out}(t+1) - s^{out}(t) = \frac{k}{n} D(t) = \text{Div } Z(t+1).$$

Сформулируем аналог теоремы 3 в [4]:

Теорема 1. Для однородной двусторонней полной сети с петлями с числом вершин $n > 2$:

1) если суммарный ресурс W сети не превосходит $T = rn^2$, то при любом начальном состоянии сети ее предельным состоянием является вектор $(\frac{W}{n}, \frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n})$;

2) если $W > rn^2$, то при любом начальном состоянии сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание не происходит.

Рассмотрим 4 случая.

1. Зона $Z^+(0)$ пуста.
2. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W < rn^2$.
3. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W = rn^2$.
4. $W > rn^2$.

Случай, когда зона $Z(0)$ пуста, не рассматривается: в этом случае все потоки равны и начальное состояние устойчиво.

Случай 1: Зона $Z^+(0)$ пуста. Тогда в силу леммы 1 выравнивание происходит за один такт.

Случай 2. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W < rn^2$.

Из (5) следует, что при неизменном k $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$. Но при

$W < T$ из (3) и (4) видно, что $p < 0$, и $D(t) = 0$ не достигается. Поскольку в силу (4) с уменьшением $D(t)$ уменьшается и $C(t)$, то наступит такой момент t' , где впервые $C(t')$ настолько мало, что хотя бы одна вершина из $Z^+(t')$ перейдет в $Z^-(t')$ и по лемме 1 в момент $t' + 1$ выровняет свой ресурс со всеми остальными вершинами Z^- . Дальше пойдет тот же процесс с изменившимся k . Поскольку при $W < rn^2$ $C(t) < D(t)$, то наступит момент t'' , когда $C(t'') = 0$, все вершины перейдут в Z^- , в момент $t'' + 1$ произойдет выравнивание и предельное состояние будет достигнуто.

Случай 3. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W = rn^2$. В этом случае $p = 0$, $D(t)$ и $C(t)$ одновременно стремятся к нулю и, как видно из (2),

$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (rn, \dots, rn)$. Но при этом в любой конечный момент времени $D(t) \neq 0$, следовательно, $C(t) \neq 0$; поэтому по крайней мере одна вершина будет оставаться в Z^+ и предельное состояние будет достигнуто асимптотически.

Случай 4. $W > rn^2$. В силу свойства 2 вершины, попавшие в зону Z , выйти из нее не могут. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (rn, \dots, rn)$, $W - rn^2 = p$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = p$. Величина p распределится между вершинами из Z^+ , в каждой из которых ресурс будет оставаться больше, чем rn , на конечную величину, т.е. выравнивания не произойдет. $\square$

Конкретная характеристика предельных состояний для случая 4 описывается теоремой 2, которая является аналогом теоремы 4 в [4].

Теорема 2. Если $W > rn^2$, то предельным состоянием сети является вектор

$$(6) \quad Q^* = (q_1(0) - w^*, \dots, q_l(0) - w^*, rn, \dots, rn),$$

где

$$(7) \quad l = k \text{ и } w^* = \frac{D(0)}{k}, \text{ если } c_k(0) \geq \frac{D(0)}{k};$$

в противном случае $l < k$ – наибольшее целое число, такое, что

$$(8) \quad c_l(0) \geq w^*,$$

$$(9) \quad w^* = \frac{C_l(0) - p}{l},$$

$$\text{где } C_l(0) = \sum_{i=1}^l c_i(0).$$

Как показано выше, в каждый момент t ресурс каждой вершины зоны $Z^+(t)$ уменьшается на одинаковую величину. Поэтому для всех вершин v_i из $Z^+(t)$ величина $w(t) = q_i(0) - q_i(t)$ одинакова. Отсюда, в частности, имеем

$$(10) \quad q_k(t) = q_k(0) - w(t) = rn + c_k(0) - w(t).$$

Рассмотрим два случая, указанные в теореме.

Случай 1. $c_k(0) \geq \frac{D(0)}{k}$. В доказательстве случая 4 теоремы

1 было отмечено, что $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (rn, \dots, rn)$. Поэтому суммарный ресурс зоны $Z(t)$ в пределе возрастет на величину $D(0)$, и по закону сохранения на эту же величину уменьшится суммарный ресурс зоны $Z^+(t)$. Так как $c_k(0) \geq \frac{D(0)}{k}$, то из каждой вершины

Z^+ в пределе будет вычтена величина $w^* = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{D(0)}{k}$ и

при этом наименьшая из величин c_k останется положительной, а, значит, мощность Z^+ не изменится, т.е. $l = k$.

Случай 2. $c_k(0) < \frac{D(0)}{k}$. Тогда в некоторый момент t выпол-

нится условие $c_k(0) - w(t) \leq 0$, вершина v_k (и, может быть, некоторые другие вершины из Z^+) перейдет в зону Z^- , и начнется процесс уменьшения мощности $Z^+(t)$, который в некоторый момент t' закончится возникновением заключительной зоны Z_l^+ .

Состояние $Q(t')$ сети можно рассматривать как новое начальное состояние сети с зонами Z_l^+ , Z_l^- и с начальным дефицитом $D_l(t')$. Так как l с момента t' не уменьшается, то выполняются условия случая 1 с заменой k на l . Поэтому равенство (6) выполняется. Величины l и w^* определяются следующим образом. Просуммировав в (6) компоненты Q^* , по закону сохранения получим $W = rn^2 + C_l(0) - w^*l$. Используя (4), получим уравнение $rn^2 + p = rn^2 + C_l(0) - w^*l$, откуда получим (9). Условие (8) необходимо для того, чтобы c_l осталась в зоне Z_l^+ . □

4. Несимметричные двусторонние полные сети

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Из 1.6 следует, что матрица проводимости симметричной сети тоже является симметричной. В симметричной сети имеет место равенство:

$$(11) \quad r_i^{in} = r_i^{out}.$$

Однако для выполнения (11) симметричность матрицы не является необходимым условием.

Ресурсную сеть с несимметричной матрицей R назовем *квасимметричной*, если для всех i условие (11) выполняется, и *несимметричной*, если для некоторого i оно не выполняется.

Введем обозначение $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$.

Вершины несимметричной сети разделим на три класса:

- 1) *вершины-приемники*, для которых $\Delta r_i > 0$;
- 2) *вершины-источники*, $\Delta r_i < 0$;
- 3) *нейтральные вершины*, $\Delta r_i = 0$.

В симметричных и квазисимметричных сетях все вершины *нейтральны*. Несимметричная сеть обладает как минимум одним источником и одним приемником.

Пусть среди n вершин сети имеется l приемников, k источников и $n - l - k$ нейтральных вершин. Будем считать, что приемники имеют номера от 1 до l , источники – от $l + 1$ до $l + k$, нейтральные вершины – от $l + k + 1$ до n .

Правила, аналогичные 1.4, по которым происходит распределение ресурса в несимметричной сети, таковы:

В момент $t + 1$ вершина v_i в ребро v_m отдает:

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ в противном случае (правило 2).

В этом разделе рассматриваются *несимметричные двусторонние полные сети с петлями* (НДП-сети).

Для их анализа используются результаты теории матриц и дискретных цепей Маркова [1, 3].

4.2. СВОЙСТВА НДП-СЕТЕЙ

Свойства 1-3 однородных сетей (см.п.3) в несимметричных сетях в общем случае не сохраняются. Свойство 2 выполняется только для источников и нейтральных вершин.

Свойство 2а. Если для некоторого t' $q_i(t') \leq r_i^{in}$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \leq r_i^{in}$ ($i > l$).

Определения зон $Z^+(t)$ и $Z(t)$ для НДП-сетей изменяются. Зоной $Z(t)$ назовем множество вершин, для которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$, зоной $Z^+(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$. Из свойства 2а следует, что источники и нейтральные вершины, попав в $Z(t)$, не смогут ее покинуть, так как для них $r_i^{in} \leq r_i^{out}$.

Теорема 3. В НДП-сети для любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ и любого суммарного ресурса W существует такой момент времени t' , что

$$(12) \forall t > t' \quad q_i(t) < r_i^{in}, \quad i > l.$$

Из свойства 2а следует, что источники и нейтральные вершины, находящиеся в начальном распределении в зоне $Z(0)$, так в ней и останутся. Для них (12) выполнится с момента $t' = 1$. Рассмотрим источники и нейтральные вершины из $Z^+(0)$.

1. Для источников формула (12) следует из неравенства: $r_i^{in} < r_i^{out}$, $i = l+1, \dots, l+k$. Если для источника v_m $q_m(0) > r_m^{out}$, то эта вершина будет функционировать по правилу 1, т.е. отдавать за каждый такт по r_m^{out} единиц ресурса. Принять она может только $r_m^{in} < r_m^{out}$. Поэтому за каждый такт ее ресурс будет уменьшаться на ограниченную снизу величину $r' \geq |\Delta r_m| = |r_m^{in} - r_m^{out}|$. Таким образом, как бы ни был велик начальный ресурс в вершине v_m , за конечное число тактов она перейдет на правило 2. В следующий момент его петля получит ресурса меньше, чем ее проводимость r_{mm} , входящая в сумму r_m^{in} , и выполнится (12).

2. Докажем выполнение (12) для нейтральных вершин. Поскольку сеть полная, то, как только хотя бы один источник перейдет на правило 2, все нейтральные вершины, функционирующие по правилу 1, начнут отдавать ресурс больше, чем получать. А это означает, что через конечное число тактов для любой нейтральной вершины v_i ее ресурс $q_j(t)$ удовлетворит условию (12). Номер такта, когда для последней из этих вершин выполнится условие (12), и обозначим t' . $\square$

По теореме 3 все источники и нейтральные вершины перейдут в зону $Z(t)$, однако условие (12) более сильно.

4.3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЕТИ ПРИ $W=1$

Если в полной несимметричной сети $W = 1$, а суммарная проводимость сети больше единицы, то процесс распределения ресурса представляет собой регулярную цепь Маркова, а вектор состояний $Q^1(t)$ соответствует вероятностному вектору.

Такая сеть будет функционировать по правилу 2, и вектор состояния для нее задается рекуррентной формулой:

$$(13) Q^1(t+1) = Q^1(t) \cdot R',$$

$$(14) R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \dots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \dots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

R' – регулярная стохастическая матрица, полученная из положительной матрицы проводимости R нормированием строк.

Непосредственно из результатов, полученных для регулярных цепей Маркова [1, 3], следует, что:

1) для любой полной двусторонней сети с петлями существует матрица предельных вероятностей $\lim_{h \rightarrow \infty} (R')^h = (R')^\infty$;

2) для любого начального распределения единичного ресурса вектор предельного распределения Q^{1*} существует, единственен и находится по формуле:

$$Q^{1*} = Q^1(0) \cdot (R')^\infty;$$

3) кроме того, для любого $t > 0$ верно:

$$(15) Q^{1*} = Q^1(t) \cdot (R')^\infty;$$

4) Матрица $(R')^\infty$ состоит из n строк Q^{1*} : $(R')^\infty = \xi Q^{1*}$, где ξ – вектор-столбец, состоящий из n единиц.

$$(16) (R')^\infty = \begin{pmatrix} q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \end{pmatrix}.$$

5) Вектор Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы R' с собственным числом $\lambda = 1$:

$$(17) Q^{1*} \cdot R' = Q^{1*};$$

6) Вектор, состоящий из любой координаты Q^{1*} (любой столбец матрицы (16)) является правым собственным вектором матрицы R' ;

7) Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы $(R')^\infty$: $Q^{1*} \cdot (R')^\infty = Q^{1*}$. Чтобы получить это равенство, достаточно осуществить предельный переход в (13).

Замечание. Из пункта 2) следует, что сеть с единичным ресурсом является эргодической системой – ее предельное состояние не зависит от начального.

4.4. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПО ПРАВИЛУ 2. ПОРОГОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЕСУРСА T

Рассмотрим функционирование сети при $W \neq 1$. По теореме 3 существует такой момент t' , после которого все источники и нейтральные вершины функционируют по правилу 2. Пусть W таково, что и вершины-приемники также функционируют по правилу 2, т.е. находятся в $Z(t)$. Такая величина W существует: при $W < \min_i r_i^{out}$ ни одна вершина не может оказаться в $Z^+(t)$.

Теорема 4. В НДП-сети для любого ресурса W , при котором, начиная с некоторого момента t' , все вершины переходят в зону $Z(t)$, для любого начального распределения $Q(0)$ вектор предельного состояния Q^* :

1) существует;
 2) единственен;
 3) является левым собственным вектором стохастической матрицы R' (14) и предельной матрицы $(R')^\infty$ (16) с собственным числом $\lambda=1$: $Q^* = Q^* \cdot R'$ и $Q^* = Q^* \cdot (R')^\infty$.

По условию теоремы существует момент t' , начиная с которого все вершины окажутся в зоне Z и начнут функционировать по правилу 2. Тогда для любого $t \geq t'$ функционирование сети описывается формулой:

$$(18) Q(t+1) = Q(t) \cdot R',$$

где R' – стохастическая матрица (15).

Для любого k верно:

$$(19) Q(t+k) = Q(t) \cdot (R')^k.$$

Поскольку $(R')^\infty$ существует, в правой части (19) можно осуществить предельный переход:

$$Q(t) \lim_{k \rightarrow \infty} (R')^k = Q(t) (R')^\infty.$$

Тогда и в левая часть (19) сходится к некоторому предельному вектору:

$$(20) Q^* = Q(t) \cdot (R')^\infty.$$

Таким образом, вектор предельного состояния существует и может быть найден из любого промежуточного состояния $Q(t)$ ($t \geq t'$). Так как (20) верно для любого $t \geq t'$, осуществив еще один предельный переход, получим:

$$Q^* = Q^* \cdot (R')^\infty.$$

Отсюда следует, что Q^* – левый собственный вектор матрицы $(R')^\infty$ с собственным числом $\lambda=1$.

Поскольку Q^* – существует, перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$ слева и справа непосредственно в равенстве (18). Получим:

$Q^* = Q^* \cdot R'$, т.е. Q^* – левый собственный вектор матрицы R' с собственным числом $\lambda=1$. По теореме Фробениуса [1] этот вектор единственен. Таким образом, доказаны все утверждения теоремы. $\square$

При функционировании сети по правилу 2 вектор предельного состояния является собственным вектором матрицы R' . Но

поскольку положительный собственный вектор матрицы R' единственен [1], все векторы предельного состояния попарно линейно зависимы; их координаты пропорциональны. Для двух значений ресурса W_1 и W_2 справедливо:

$$\frac{Q_1^*}{W_1} = \frac{Q_2^*}{W_2}$$

Тогда для каждого значения W , при котором все вершины сети функционируют по правилу 2, координаты вектора предельного состояния Q^* можно выразить через вектор Q^{1*} :

$$(21) Q^* = Q^{1*} \cdot W.$$

Теорема 5. *В НДП-сети существует пороговое значение суммарного ресурса T , такое, что при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t' , переходят в зону $Z(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста для любого t . Для каждой конфигурации сети T единственно и не зависит от суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0)$.*

Из теоремы 3 следует, что через конечное число тактов все источники и нейтральные вершины оказываются в зоне $Z(t)$. Тогда при достаточно большом суммарном ресурсе в зоне $Z^+(t)$ могут оказаться лишь приемники. При $W > r_{sum}$ хотя бы одна из таких вершин гарантированно окажется в $Z^+(t)$.

Рассмотрим вектор предельного состояния как функцию от W : $Q^* = Q^*(W)$. Из (11) следует, что координаты $Q^*(W)$ растут пропорционально W , пока все вершины остаются в зоне Z . Как только при увеличении W ресурс в одной из вершин достигает значения r_i^{out} , она переходит на правило 1, и при дальнейшем росте W соотношение (21) перестает выполняться. Обозначим величину суммарного ресурса, при котором первая из вершин в предельном состоянии получает ресурс, равный r_i^{out} , через T .

Поскольку $Q^*(W)$ единственно для каждого $W \leq T$ и не зависит от $Q(0)$, T – единственно. $\square$

Обозначим вектор предельного состояния при $W = T$ через $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$. При $W = T$ существует хотя бы одна вершина,

для которой верно: $\tilde{q}_i = r_i^{out}$. В НДП-сети такой вершиной может быть только приемник.

4.5. ПОТОК РЕСУРСА

4.5.1. $W \leq T$

Если $W \leq T$, вся сеть при достаточно больших t функционирует по правилу 2, и ресурс в вершинах состоит только из вновь пришедшего, то есть $Q(t) = S^{in}(t)$. С другой стороны, по правилу 2 вершины отдают весь свой ресурс, значит: $S^{out}(t) = Q(t)$. Из теоремы 4 предел $Q(t)$ при $W \leq T$ существует и равен Q^* . Тогда пределы: $\lim_{t \rightarrow \infty} S^{in}(t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} S^{out}(t)$ тоже существуют. Таким обра-

зом, при функционировании сети по правилу 2 выполняется:

$$(22) S^{in*} = S^{out*} = Q^*.$$

Из доказательства теоремы 5 следует, что при $W = T$ по крайней мере один приемник в предельном состоянии имеет ресурс, равный его выходной проводимости. Будем полагать, что он имеет номер 1. Тогда $\tilde{q}_1 = r_1^{out}$.

4.5.2. $W > T$

В несимметричных сетях в отличие от симметричных и однородных, динамика потока зависит от начального состояния. Поток может изменяться как монотонно, так и немонотонно.

Рассмотрим процесс стабилизации сначала для монотонно возрастающего потока.

Теорема 6. В НДП-сети, в которой $\tilde{q}_1 = r_1^{out}$ для любого $W > T$ и начального распределения $Q(0) = (W, 0, \dots, 0)$:

- 1) предельный поток s^* существует и равен T ;
- 2) предельное состояние Q^* существует;
- 3) зона $Z^{+*} = \lim_{t \rightarrow \infty} Z^+(t)$ содержит одну вершину v_1 ;

4) координаты вектора предельного состояния Q^* , начиная со второй, для любого $W > T$ совпадают с координатами $\tilde{Q}$:

$$Q^* = \left(\left(W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i \right), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right) = \left((W - T + r_1^{out}), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right)$$

Доказательство.

Рассмотрим два вектора начального состояния:

$$Q_T(0) = (T, 0, \dots, 0) \text{ и } Q(0) = (W, 0, \dots, 0) \ (W > T).$$

В каждый момент в обоих случаях вершина v_1 отдает r_1^{out} ресурса; одноименные вершины при обоих начальных состояниях получают одно и то же значение. Входные и выходные потоки в сети для этих двух начальных состояний полностью совпадают; векторы состояния отличаются только ресурсом в первой вершине.

Предельное состояние для $W = T$ существует и описывается вектором: $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$. Тогда при $W = T$ существуют и предельные входящий и исходящий потоки $\tilde{S}^{in}$ и $\tilde{S}^{out}$; и из (22) следует, что $\tilde{S}^{in} = \tilde{S}^{out} = \tilde{Q}$. Но поскольку поток для $W > T$ на каждом такте совпадает с потоком при $W = T$, он также сходится к значению $\tilde{Q}$. Кроме того, равенство потоков означает, что при $W > T$ все вершины, кроме первой, функционируют по правилу 2, и, следовательно, для каждого t координаты векторов $Q(t)$ и $Q_T(t)$, начиная со второй, совпадают, и ресурсы в этих вершинах сходятся к тем же предельным значениям $\tilde{q}_i$. Поскольку в сети выполняется закон сохранения, то ресурс в первой вершине тоже имеет предельное значение и равен $W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i$.

Тем самым доказаны все четыре утверждения теоремы.

Предельное состояние описывается вектором:

$$Q^* = \left(\left(W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i \right), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right) = \left((W - T + r_1^{out}), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right).$$

Потоки в сети при $W = T$ и $W > T$ совпадают.

Так как при $W = T$ все вершины функционируют по правилу 2, и суммарный поток равен суммарному ресурсу, для любого $W > T$ выполнится: $s^* = \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j = T$. $\square$

Из теоремы 6 следует, что если в начальном распределении ресурс находится в вершине, способной при $W = T$ набрать ресурс, равный своей выходной проводимости, то ни одна другая вершина уже не перейдет на правило 1, и только эта вершина в предельном состоянии окажется в зоне Z^{+*} .

Вершины, в предельном состоянии принадлежащие Z^{+*} , будем называть *аттракторами*. Если в сети существует несколько вершин, для которых выполняется равенство $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, то при $W > T$ такая сеть не будет эргодической системой: в какой из указанных вершин будет ресурс в начальном распределении, та и окажется единственным аттрактором. Остальные вершины, для которых выполняется $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, назовем *потенциальными аттракторами*.

Теорема 7. В НДП-сети при любом начальном распределении $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ ресурса $W > T$:

- 1) предельный поток s^* существует и равен T ;
- 2) предельное состояние Q^* существует;
- 3) для всех вершин, у которых в предельном состоянии при $W = T$, $\tilde{q}_j < r_j^{out}$, для любого $W > T$ выполняется: $q_j^* = \tilde{q}_j$.

Доказательство.

По теореме 3 при $t > t'$ источники и нейтральные вершины окажутся в зоне $Z(t)$; они функционируют по правилу 2 и отдают весь свой ресурс.

Рассмотрим отдельно два случая.

1. В зоне $Z^+(t)$ для любого $t > t'$ только одна вершина. Покажем, что это может быть только вершина, имеющая при $W = T$ в предельном состоянии ресурс, равный своей выходной проводимости (пусть по-прежнему она имеет номер 1): $\tilde{q}_1 = r_1^{out}$.

Для ресурса $W > T$ рассмотрим произвольное начальное распределение:

$$Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0)).$$

Если $W = T$, предельный поток в сети равен T для любого начального распределения.

Уменьшим пропорционально все координаты вектора $Q(0)$ так, чтобы суммарный ресурс стал равен T :

$$Q_T(0) = (q_{1T}(0), q_{2T}(0), \dots, q_{nT}(0)).$$

При этом выполняется:

$$(23) \quad \frac{q_{iT}(0)}{q_i(0)} = \text{const},$$

Поток при $W > T$ на каждом такте не может быть меньше, чем при $W = T$. Покажем, что для достаточно больших t он не может быть и больше.

Для $Q_T(0)$ предельным состоянием будет $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$. Если при $t > t'$ суммарный поток больше T , то хотя бы одна вершина v_k имеет ресурс, превосходящий $\tilde{q}_k$, причем $k > 1$, так как при увеличении ресурса в v_1 поток увеличиться не может: она отдает по полной проводимости в каждое ребро.

Поскольку сеть полная, существует ребро $\langle v_k, v_1 \rangle$, поток в котором больше, чем при $W = T$. Поскольку при $W = T$ в ребре $\langle v_1, v_k \rangle$ поток в предельном состоянии был равен r_{1k} , то и в ребре $\langle v_k, v_1 \rangle$ он был равен той же величине: $s_{k1T}^* = r_{1k}$.

Тогда $s_{1k}(t) - s_{k1}(t) = r_{1k} - s_{k1}(t) < 0$. Дивергенция в вершине v_1 положительна, а в v_k – отрицательна. $q_1(t)$ – величина возрастающая, $q_k(t)$ – убывающая.

Однако $q_1(t)$ ограничено сверху величиной $\left(W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i\right)$, т.к.

ресурсы в остальных вершинах не могут быть меньше $\tilde{q}_i$.

Соответственно, ресурс в v_k ограничен снизу величиной $\tilde{q}_k$.

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = \left(W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i\right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) = \tilde{q}_j, \quad j > 1.$$

Вектор предельного состояния будет иметь вид:

$$Q^* = \left(\left(W - \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i\right), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right) = \left((W - T + r_1^{\text{out}}), \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \right),$$

а предельный поток равен T .

Поскольку для каждого вектора $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ существует вектор $Q_T(0)$, для которого выполняется (13), предельное состояние существует для произвольного начального распределения, причем в зоне Z^{+*} может оказаться только вершина, для которой верно: $\tilde{q}_j = r_j^{out}$.

2. Пусть для $t > t'$ в зоне $Z^+(t)$ несколько вершин. Из предыдущего пункта следует, что среди них есть хотя бы одна вершина, для которой выполняется $\tilde{q}_k = r_k^{out}$. Рассмотрим входной поток в вершину v_k . Отдавать эта вершина не может больше своей выходной проводимости r_k^{out} .

По теореме 6, если весь ресурс $W > T$ находится в вершине v_k , поток стабилизируется, и входной поток этой вершины равен выходному.

$$(24) \quad s_k^{in*} = r_{kk} + \sum_{j \neq k} \frac{r_{jk}}{r_j^{out}} \tilde{q}_j = r_k^{out},$$

Первое слагаемое, составляющее входной ресурс, – ресурс, вернувшийся по петле, второе – ресурс, пришедший из всех остальных вершин.

Если в зоне $Z^+(t)$ находится M вершин (пусть их номера от 1 до M , и $1 \leq k \leq M$), входной поток вершины v_k будет равен:

$$(25) \quad s_k^{in}(t) = r_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M r_{jk} + \sum_{j=M+1}^n \frac{r_{jk}}{r_j^{out}} q_j(t)$$

Рассмотрим два класса вершин из $Z^+(t)$: потенциальные аттракторы с номерами от 1 до L ($k \leq L$; $L \leq M$) и вершины с номерами от $L+1$ до M , для которых $\tilde{q}_j < r_j^{out}$. Начнем со второго класса.

2.1. Пусть для $M-L$ вершин $v_{L+1}, \dots, v_M$, выполняется $\tilde{q}_j < r_j^{out}$. Тогда $s_k^{in}(t)$ из (25) превосходит s_k^{in*} из (24), и, значит, у вершины v_k в каждый момент t дивергенция положительна; у вершин v_j ($j = L+1, \dots, M$) – напротив, отрицательна; их ресурс уменьшается на величину, ограниченную снизу значени-

ем $\Delta s_j(t) = r_{jk} - \frac{r_{jk}}{r_j^{out}} \tilde{q}_j$. За конечное число тактов эти вершины

перейдут в $Z(t)$. В частности, если $L=1$, существует момент, в который в $Z^+(t)$ останется одна вершина v_k . Этот случай сводится к п.1, предельный поток существует и $s^* = T$.

2.2. Рассмотрим вершины v_j ($j = 1, \dots, L, k \leq L$), для которых:

(26) $\tilde{q}_j = r_j^{out}$. Поскольку по определению при $q_j(t) = r_j^{out}$ применение правил 1 и 2 дает одинаковый результат, при выполнении условия (26) для вершин $v_1, \dots, v_L$, равенство (24) можно переписать в следующем виде:

$$(27) \quad s_k^{in*} = r_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{r_{jk}}{r_j^{out}} \tilde{q}_j = r_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^L r_{jk} + \sum_{j=L+1}^n \frac{r_{jk}}{r_j^{out}} \tilde{q}_j.$$

Из п. 2.1 следует, что $M - L + 1$ вершин с номерами от L до M перейдут в зону $Z(t)$, а от остальных $L - 1$ вершин вершина v_k при $W = T$ в предельном состоянии принимала по полной проводимости из каждого входящего ребра (формула (26)). Таким образом, входной ресурс (27) равен входному ресурсу (24) и, следовательно, совпадает с r_k^{out} . Входной поток в вершине v_k равен выходному. Стабилизация входного и выходного потоков в остальных вершинах v_j ($j = 1, \dots, L$) вытекает из произвольности выбора индекса k . Входной ресурс этих вершин равен r_j^{out} , $j = 1, \dots, L$, а из (26) следует, что это и есть соответствующие координаты вектора предельного состояния при $W = T$. Таким образом, входной и выходной ресурсы вершин из $Z^+(t)$ стабилизируются на значениях $r_j^{out} = \tilde{q}_j, j = 1, \dots, L$. Тогда и для вершин из $Z(t)$ входной и выходной потоки стабилизируются на значениях $\tilde{q}_j$. Отсюда следует, что при любом начальном распределении ресурса $W > T$ поток сети стабилизируется и $s^* = \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j = T$.

Предельное состояние Q^* существует, и для всех вершин, у которых в предельном состоянии при $W = T$, $\tilde{q}_j < r_j^{out}$, для любого $W > T$ выполняется: $q_j^* = \tilde{q}_j$. Излишек ресурса распределяется между аттракторами. $\square$

5. Заключение

В работе рассмотрены процессы стабилизации ресурсных сетей с произвольными проводимостями ребер. Показано, что в сети любой конфигурации при любом начальном состоянии и любом суммарном количестве ресурса происходит стабилизация состояний и потоков, однако предельные состояния для ресурса по разные стороны от порогового значения T принципиально различаются. При $W \leq T$ ресурс распределяется пропорционально между вершинами в зависимости от значений их проводимостей. При $W > T$ сети делятся на три класса. Однородные сети являются неэргодической системой – предельное состояние во всех вершинах зависит от начального; несимметричные сети при наличии одного аттрактора являются эргодической системой; при более чем одном аттракторе система – частично эргодическая: ресурс в потенциальных аттракторах зависит от начального распределения.

В отличие от традиционных транспортных интерпретаций модели Форда-Фалкерсона [5], где основное внимание уделяется потокам ресурса на ребрах, предложенная модель исследует распределение ресурса в вершинах. Отдельный интерес представляет наличие в несимметричных сетях аттракторов, которые можно интерпретировать либо как пассивные «потенциальные ямы» (например, в моделях загрязнения среды), либо как активные агенты, имеющие дополнительные возможности по сравнению с другими агентами (например, в многоагентных системах и в моделях финансовых потоков).

Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Физматлит. 2004, 560 с.
2. ЕРЗИН А.И., ТАХОНОВ И.И. *Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели* // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005, том VIII, № 3(23), с.58-68.
3. КЕМЕНИ Дж., СНЕЛЛ Дж. *Конечные цепи Маркова*. М.: Наука. 1970, 272 с.
4. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети I. Полные графы*. // Автоматика и телемеханика, 2009, № 11, с.136-147.
5. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д. *Потоки в сетях* М.: Мир, 1966. 276 с.
6. ANUJA R.K., MAGNATI T.L., ORLIN J.B. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications* Prentice Hall, New Jersey, 1993.

COMPLETE BIDIRECTIONAL NETWORKS WITH ARBITRARY CONDUCTIVITY

Oleg Kuznetsov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65,...).

Ludmila Zhilyakova, Pedagogical Institute SFedU, Rostov-on-Don, Cand. Sc., (Rostov-on-Don, Dneprovskiy lane, 116, zhilyakov@aaanet.ru).

Abstract:

The resource net is a network model represented by an oriented weighted graph in which any two vertices are either not adjacent or connected by a pair of oppositely directed edges. Vertices can contain unlimited amount of resource. The weights of edges indicate the ability to conduct a resource from one vertex to the other. The processes of the dynamic distribution of resources in bidirectional complete networks with arbitrary conductivity and their stabilization conditions are considered.

Keywords: resource network, conductivity, limit state, attractor.