

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.¹

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Рассматривается задача поиска критериев существования стабилизирующих статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных управляемых и наблюдаемых систем. Дело в том, что имеющиеся ранговые критерии существования статических регуляторов применимы только в тех случаях, когда одна из матриц входа или выхода имеет полный ранг. Во всех остальных случаях, как правило, чаще всего встречающихся на практике, эти критерии оказываются не применимыми. Показано, что критерий для обратной связи по выходу также существует и может быть сформулирован в виде необходимых и достаточных условий. Основная идея состоит в приведении посредством невырожденного линейного преобразования матрицы выхода или входа к определенному виду, благодаря которому матрицу замкнутой системы в новом базисе можно разбить на блоки таким образом, что неизвестная матрица регулятора будет локализованной в двух ее блоках. После исключения этой матрицы получается параметрический ранговый критерий, подобный критерию для статической обратной связи по состоянию.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, управляемость, линейное преобразование.

1. Введение

Управление в форме статической обратной связи по выходу представляет собой наиболее востребованный на практике способ стабилизации линейных систем [1, 4]. Очевидным преимуществом такого подхода к стабилизации по сравнению со стабилизацией по состоянию является то, что для ее реализации не требуется весь вектор состояния. Однако NP-трудность задачи [12], а также отсутствие четких критериев существования заметно усложняют синтез таких регуляторов [9, 11, 13, 14]. Изучены лишь некоторые частные случаи, в которых удастся сформулировать критерии в виде необходимых и достаточных условий (например, [13]).

¹ Алексей Валерьевич Мухин, аспирант (muhin-aleksei@yandex.ru).

Статья посвящена решению задачи о существовании статического регулятора по выходу. Для решения задачи также как и в [6] был введен специальный класс матриц выхода, с помощью которого удастся сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов в общем случае. Для этого посредством невырожденного линейного преобразования матрицы замкнутой системы необходимо выбрать такой базис, в котором, матрица выхода (входа) примет требуемый вид, что позволит локализовать матрицу регулятора в двух блоках матрицы замкнутой системы. Благодаря этому появляется возможность исключить неизвестную матрицу регулятора и получить ранговый критерий, подобный критерию для статического регулятора по состоянию.

Структура статьи стандартная. Во втором разделе сформулирована задача. В третьем разделе приведены используемые обозначения и показан переход к новому базису, в котором матрица выхода принимает блочно-однородный вид. Четвертый раздел содержит доказательство теоремы, в которой сформулирован критерий существования статического регулятора по выходу. Пятый раздел – примеры. Заключительные выводы даны в последнем разделе.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную стационарную управляемую и наблюдаемую систему

$$(1) \quad \dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}u, \quad x(0) = x_0, \\ y = \hat{C}x,$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – вход; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $\hat{A} \in R^{n \times n}$ – матрица системы; $\hat{B} \in R^{n \times m}$ – матрица входа; $\hat{C} \in R^{p \times n}$ – матрица выхода.

Будем считать, что относительно матриц $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются естественные ранговые условия

$$\text{rank}(\hat{B}) = m,$$

$$\text{rank}(\hat{C}) = p,$$

где $1 \leq m, p < n$.

В противном случае требуется сначала избавиться от избыточности в системе (1). Для стабилизации системы применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид:

$$(2) \quad u = Ky,$$

где $K \in R^{m \times p}$ – неизвестная матрица регулятора.

Тогда (1) с учетом (2) примет замкнутый вид

$$(3) \quad \dot{x} = (\hat{A} + \hat{B}K\hat{C})x = \hat{A}_c x.$$

Задача состоит в поиске критериев, позволяющих сделать вывод относительно существования матрицы K , обеспечивающей устойчивость матрицы замкнутой системы (3). Стандартная математическая формулировка задачи звучит так [9]: *существует ли такая матрица K , которая для заданных матриц $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ обеспечивает устойчивость матрицы замкнутой системы (3)?*

Так как матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ в (3) являются некоторыми произвольными матрицами, то неизвестные элементы матрицы K оказываются рассеянными среди элементов матрицы $\hat{A}_c$. Как будет показано в следующем разделе, существует возможность, причем не единственная, сгруппировать элементы матрицы K в двух блоках матрицы $\hat{A}_c$ и, в конечном счете, исключить ее из последней.

3. Преобразование базиса

Введем сначала используемые обозначения. Правую комплексную полуплоскость будем обозначать $\mathbb{C}^+$. Если $\lambda \in \mathbb{C}^+$, то $Re \lambda \geq 0$. Спектральную абсциссу квадратной матрицы $\mathcal{M}$, определяемую как $\max_{1 \leq i \leq n} \{Re \lambda_i(\mathcal{M})\}$, обозначим $spr(\mathcal{M})$. Это обозначение позаимствовано из [8]. Если $\mathcal{M}$ гурвицева, то $spr(\mathcal{M}) < 0$ и наоборот. Ядра матриц $\hat{B}^T$ и $\hat{C}$ будем обозначать $\mathcal{N}_{\hat{B}^T}$ и $\mathcal{N}_{\hat{C}}$, соответственно. Их можно определить из уравнений [10]

$$\hat{B}^T \mathcal{N}_{\hat{B}^T} = 0,$$

$$\hat{C} \mathcal{N}_{\hat{C}} = 0.$$

Для решения задачи введем вспомогательный класс матриц выхода, который обозначим $\mathcal{E}$. С этой целью выполним линейное

преобразование системы (3) посредством невырожденной матрицы $S \in R^{n \times n}$ так, чтобы в новом базисе матрица выхода $\hat{C}$ приняла один из видов

$$(4) \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix},$$

$$(5) \quad C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n-p)} & I_p \end{pmatrix}.$$

Матрица $C \in \mathcal{C}$, если она имеет вид (4) или (5). В новом базисе матрица замкнутой системы будет равна

$$(6) \quad A_c = S(\hat{A} + \hat{B}K\hat{C})S^{-1} = A + BKC.$$

В силу подобия спектры матриц $\hat{A}_c$ и A_c совпадают [10]. Матрица преобразования может быть найдена из совместной системы уравнений

$$(7) \quad \hat{C}S^{-1} = C.$$

Отметим, что если $C \in \mathcal{C}$, то и $\mathcal{N}_C^T \in \mathcal{C}$. Заметим также, что

$$CC^T = I_p,$$

$$\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C = I_{n-p}.$$

Таким образом, всегда можно выбрать такой базис, в котором $C \in \mathcal{C}$. Иначе говоря, любую матрицу выхода всегда можно привести к любому из видов (4) или (5). Произведение матриц CB является инвариантным по отношению к выбранному базису. В общем случае ранг произведения матриц CB заключен в следующий диапазон:

$$0 \leq \text{rank}(CB) \leq \min\{m, p\}.$$

Равенство $\text{rank}(CB) = 0$ реализуется в некоторых частных случаях, когда, например, C имеет вид (4), а B^T – вид (5). Если, например, матрица выхода приведена к виду (4), то матрицу входа в новом базисе можно представить в блочном виде

$$(8) \quad B = S\hat{B} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

а матрицу системы в виде

$$(9) \quad A = S\hat{A}S^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in R^{p \times p}$.

Тогда с учетом (4), (8) и (9) матрицу замкнутой системы в новом базисе можно записать в блочном виде:

$$(10) \quad A_c = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}K & A_{12} \\ A_{21} + B_{21}K & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу (4) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} CB \\ \mathcal{N}_C^T B \end{pmatrix}, \\ A_{11} + B_{11}K &= CA_c C^T, \\ A_{22} &= \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C. \end{aligned}$$

Тогда (10) примет окончательный вид:

$$(11) \ A_c = \begin{pmatrix} CA_c C^T & A_{12} \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^T BK & \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$

В случае, когда матрица выхода приведена к виду (5), то получим матрицу замкнутой системы

$$(12) \ A_c = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C & A_{12} + \mathcal{N}_C^T BK \\ A_{21} & CA_c C^T \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\widehat{A}_c$ в исходном базисе устойчива, то в силу подобия матрицы (10) и (11) также устойчивы. Необходимо добавить, что это не единственный способ привести матрицу замкнутой системы к виду, в котором матрица регулятора оказывается локализованной в двух ее блоках. Точно также можно ввести блочно-однородный класс $\mathcal{B}$ для матрицы входа, в котором матрица $\hat{B}$ принимает один из двух видов

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

В результате, по аналогии с (11) и (12) получим следующие матрицы замкнутых систем в новых базисах:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_c &= \begin{pmatrix} B^T A_c B & A_{12} + KC \mathcal{N}_{B^T}^T \\ A_{21} & \mathcal{N}_{B^T}^T A \mathcal{N}_{B^T} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{A}_c &= \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{B^T}^T A \mathcal{N}_{B^T} & A_{12} \\ A_{21} + KC \mathcal{N}_{B^T}^T & B^T A_c B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, существует несколько способов сгруппировать элементы матрицы K в двух блоках матрицы замкнутой системы.

4. Необходимые и достаточные условия существования статического регулятора по выходу

Будем считать, что $C \in \mathcal{C}$. Конкретный вид матрицы $C \in \mathcal{C}$ значения не имеет. Для определенности будем считать, что матрица C приведена к виду (4). Приведем два вспомогательных определения для статической обратной связи по состоянию и введем на их основе более общие. Напомним, что система, определяемая парой матриц (A, B) стабилизируема, если [3]

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\lambda I - A \quad B) = n.$$

Стабилизируемость системы является необходимым и достаточным условием существования статического регулятора по состоянию [4]. В практических задачах часто требуется не просто стабилизировать систему, но также произвольно изменять расположение ее спектра с целью получения требуемых характеристик. В таких случаях матрица K должна обеспечивать произвольное, симметрическое относительно действительной оси расположение собственных чисел замкнутой системы. Необходимым и достаточным условием для этого является управляемость пары (A, B) [4], которая имеет место когда [3]

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow \text{rank}(\lambda I - A \quad B) = n.$$

Из управляемости следует стабилизируемость, но не наоборот. По аналогии с двумя этими определениями введем более общие понятия стабилизируемости и управляемости по выходу применительно к случаю, когда $C \in \mathcal{C}$: систему с обратной связью по выходу будем называть стабилизируемой по выходу, если

$$(13) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - CAC^T & -CB & A_{12} \\ A_{21} & \mathcal{N}_C^T B & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix} = n,$$

и управляемой по выходу, если

$$(14) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - CAC^T & -CB & A_{12} \\ A_{21} & \mathcal{N}_C^T B & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix} = n.$$

Размерность матрицы в (13) и (14) равна $n \times (n + m)$. В частном случае, когда, например, $C = -I$, равенство (13) сводится к стабилизируемости, а равенство (14) – к управляемости пары (A, B) . Далее сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 1. Для существования статического регулятора по выходу, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы (1.3) необходимо и достаточно, чтобы в базисе, в котором $C \in \mathcal{C}$ система была стабилизируемой по выходу.

Доказательство. Обратимся к матрице (11). Будем считать, что эта матрица устойчива, а значит $spr(A_c) < 0$. Следовательно,

$$(15) \forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\lambda I - A_c) = n.$$

Подставим в (15) матрицу (11) и получим

$$(16) \forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - CA_c C^T & A_{12} \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^T B K & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix} = n.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda I - CA_c C^T &= (\lambda I - CAC^T \quad -CB) \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}, \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^T B K &= (A_{21} \quad \mathcal{N}_C^T B) \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда (16) можно переписать в виде

$$(17) \text{rank} \begin{pmatrix} (\lambda I - CAC^T \quad -CB) \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} & A_{12} \\ (A_{21} \quad \mathcal{N}_C^T B) \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix} = n.$$

Матрицу в (17) можно представить в виде произведения двух прямоугольных матриц

$$(18) \begin{pmatrix} (\lambda I - CAC^T \quad -CB) & A_{12} \\ (A_{21} \quad \mathcal{N}_C^T B) & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ K \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Матрицу справа в (18) можно отбросить, так как ее ранг $\forall K$ равен n . В результате приходим к (13). Таким образом, из $spr(A_c) < 0$ следует (13). Справедливо и обратное утверждение, что позволяет считать доказательство теоремы завершенным. На основании теоремы 1 сформулируем еще одну теорему:

Теорема 2. Для существования статического регулятора по выходу, обеспечивающего произвольное симметрическое относительно действительной оси расположение спектра матрицы замкнутой системы (1.3) необходимо и достаточно, чтобы в базисе, в котором $C \in \mathcal{C}$ система была управляемой по выходу.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Следует осветить еще один вопрос, связанный с выбором матрицы преобразования в (7). Для перехода к новому базису, в котором $C \in \mathcal{C}$, существует, вообще говоря, множество невырожденных матриц $S \in R^{n \times n}$. Так вот если матрица A_c устойчива, то условия теорем будут выполняться независимо от матрицы преобразования S . Действительно, пусть при некоторой матрице преобразования S_i из (7) матрица A_c устойчива. Возьмем любую другую невырожденную матрицу S_j , также как и S_i обеспечивающую условие $C \in \mathcal{C}$. В силу подобия устойчивой будет и любая другая матрица A_c в базисе, определяемом матрицей S_j , и, следовательно, должны выполняться условия доказанных выше теорем. Таким образом, условия теорем не зависят от выбора матрицы преобразования S .

Заметим, что если, например, выполняются условия

$$(19) \begin{cases} (CAC^T, -CB) \text{ управляема} \\ spa(\mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C) < 0 \end{cases},$$

то будет выполняться равенство (14), следовательно, система будет управляемой по выходу, а значит и стабилизируемой по выходу. Существуют и другие возможности добиться стабилизируемости и управляемости по выходу. Рассмотрим это более подробно на примерах.

5. Примеры

Рассмотрим статическую стабилизацию тела, вешенного в электромагнитном подвесе [2]. Тело находится в поле действия силы тяжести и силы магнитного притяжения, действующей со стороны электромагнита. Если геометрическая сумма сила равна нулю, то тело покоится. Матрица, описывающая уравнения линеаризованной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Имеем $n = 3$. Можно заметить, что $spa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -7.5 \end{pmatrix} < 0$. Зададим матрицу выхода в виде

$$C = (1 \quad 0 \quad 0),$$

а матрицу входа в виде

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что синтез статических регуляторов по выходу в таких случаях является выпуклой задачей [7]. Ядро матриц C и B^T образует матрица

$$\mathcal{N}_C = \mathcal{N}_{B^T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\text{spa}(A_{22}) < 0$ и

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow \text{rank}(\lambda - CAC^T \quad -CB) = \text{rank}(CB) = 1,$$

т.е. пара $(CAC^T, -CB)$ управляема. Получаем выполнение условий (19), а значит при такой организации матриц C и B задача синтеза статического регулятора по выходу, обеспечивающего произвольное расположение спектра матрицы замкнутой системы, будет разрешима. Матрица замкнутой системы примет вид:

$$A_c = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при $k < -7.5$ данная матрица будет гурвицевой. Покажем теперь, как неправильно заданная комбинация матриц входа и выхода может привести к неразрешимости задачи. Зададим матрицу входа в виде

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицу выхода оставим прежней и покажем, что задача статической стабилизации по выходу не разрешима. Матрица стабилизируемости в (11) будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda + 7.5 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если взять $\lambda = 1$, то получим

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8.5 \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, система не является стабилизируемой по выходу, а значит и управляемой по выходу. Убедимся что, задача действительно не разрешима. Запишем соответствующую матрицу замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -7.5 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы можно записать в виде

$$\lambda^3 + 7.5\lambda^2 - k - 7.5 = 0.$$

С помощью теоремы Гурвица [5] нетрудно заметить, что данный многочлен невозможно сделать устойчивым ни при каком значении k . Следовательно, статический регулятор не существует. Последний пример показывает, что неправильная комбинация матриц C и B может привести к неразрешимости задачи, хотя при тех же размерностях входа и выхода задача разрешима. Рассмотрим еще один способ стабилизации рассматриваемой системы. Зададим теперь матрицу входа в виде

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицу выхода оставим в прежнем виде. Матрица стабилизируемости в данном случае будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda + 7.5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим квадратную подматрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта подматрица невырожденная, так как ее определитель равен единице $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, равенство (14) выполняется, система управляема по выходу. Соответствующая матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_{11} + 1 & 0 & 1 \\ k_{21} & -1 & -7.5 \end{pmatrix},$$

а ее характеристический многочлен

$$\lambda^3 + 7.5\lambda^2 - k_{11}\lambda - 7.5k_{11} - k_{21} - 7.5 = 0.$$

При $k_{11} = k_{21} = -1$ получаем устойчивый многочлен, а значит и $\text{spa}(A_c) < 0$.

Рассмотрим еще один пример – статическую стабилизацию по выходу двухзвенного перевернутого маятника. Матрица такой системы равна [3]

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу входа в виде

$$\hat{B}^T = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0),$$

а матрицу выхода в виде

$$\hat{C} = (-18.0248 \quad 19.9613 \quad -4.0071 \quad 10.5928).$$

Приведем $\hat{C}$ к виду (4). В качестве матрицы преобразования можно взять

$$S = \begin{pmatrix} -18.0248 & 19.9613 & -4.0071 & 10.5928 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате матрица входа и матрица системы в новом базисе, определяемом матрицей S , будут равны

$$B^T = (-4.0071 \quad 0 \quad 0 \quad 1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.8844 & 4.7663 & -12.4226 & -10.4737 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0944 & 1.7016 & -1.8844 & 0.3783 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу стабилизируемости:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1.8844 & 4.0071 & 4.7663 & -12.4226 & -10.4737 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0.0944 & 0 & 1.7016 & \lambda + 1.8844 & 0.3783 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в этой матрице квадратную подматрицу

$$\begin{pmatrix} 4.0071 & 4.7663 & -12.4226 & -10.4737 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1.7016 & \lambda + 1.8844 & 0.3783 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}^+$ эта подматрица невырожденная. Функция определителя этой матрицы, описывается многочленом

$$\lambda^3 + 4.5\lambda^2 + 3.32\lambda + 2.05 = 0.$$

В соответствии с теоремой Гурвица приходим к выводу, что все корни данного многочлена расположены в левой открытой комплексной полуплоскости. Следовательно, рассматриваемая подматрица будет невырожденной $\forall \lambda \in \mathbb{C}^+$, а значит, система стабилизируема по выходу. При $k = 1$ получаем $\text{spa}(A_c) < 0$.

6. Заключение

В статье показано, что с помощью использования матрицы выхода (входа) блочно-однородного вида можно сформулировать критерий существования статического регулятора по выходу в виде параметрического рангового условия. Проверка такого условия может быть выполнена стандартными методами линейной алгебры. Таким образом, найденный критерий можно считать решением фундаментальной задачи о существовании статического регулятора по выходу.

Автор благодарит Дмитрия Владимировича Баландина за ценные и полезные замечания.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.А. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Наука, 1976.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения* // Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.
3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007.
4. КВАКЕРНААК Х, СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М.: Мир, 1977.
5. МАЛКИН И.Г. *Теория устойчивости движения*. – М.: Наука, 1966.
6. МУХИН А.В. *О существовании статических регуляторов по выходу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 16–30.
7. МУХИН А.В. *Пресечение множеств решений матричных неравенств в задачах синтеза статических регуляторов* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 100. – С. 107–119.
8. ПЕРОВ А.И., КОСТРУБ И.Д. *О спектральной абсциссе и логарифмической норме* // Математические заметки. 2017. №101. – С. 562–575.

9. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению*// Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
10. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989.
11. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
12. NEMIROVSKII A.A. *Several NP-hard problem arising in robust stability analysis* // Math. Control, Signals, Systems. – 1994. – Vol. 6. – P. 99–105.
13. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. – P. 11–26.
14. SYRMOS V.L., ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. –Vol.33, №. 2. – P. 125–137.

THE STATIC OUTPUT FEEDBACK EXISTENCE CRITERION

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of finding criteria for the existence of stabilizing static output feedback for linear continuous stationary controlled and observed systems is considered. The fact is that the existing rank criteria for the existence of static state feedback are applicable only in cases where one of the input or output matrices has full rank. In all other cases, as a rule, frequent in practice, these criteria are not applicable. It is shown that the criterion for static output feedback also exists and can be formulated as necessary and sufficient conditions. The main idea is that it is necessary, by means of a non-degenerate linear transformation, to reduce the output or input matrix to a certain form, thanks to which the closed-loop system matrix in the new basis can be divided into blocks in such a way that the unknown regulator matrix is concentrated in two her blocks. After eliminating the matrix, a parametric rank criterion is obtained, similar to the criterion for static state feedback.

Keywords: static output feedback, Hurvitz matrix, controllability, linear transformation.

УДК 517.977

ББК 22.18

DOI:

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

*Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...*