

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОД- НОГО РЕЖИМА СМО М/РН/1/п С БОЛЬШИМ ЧИС- ЛОМ ЗАЯВОК

Вытовтов К. А.¹, Барабанова Е. А.², Вишневский В. М.³

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Волкова С. А.⁴, Вытовтов Г. К.⁵

*(Астраханский государственный технический
университет, Астрахань)*

Работа посвящена разработке алгоритма построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для однолинейной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону. Рассматривается система с двумя фазами обслуживания заявок и произвольным конечным числом заявок в системе. Введены новые функции, существенно упрощающие алгоритм построения уравнений Колмогорова, а также инфинитезимальной матрицы системы. Проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Использование данного алгоритма позволит в дальнейшем получить аналитические и численные решения основных характеристик производительности СМО М/РН/1/п с большим числом заявок в переходном режиме работы.

Ключевые слова: однолинейная система массового обслуживания, фазовый закон распределения, уравнения Колмогорова, сложность алгоритма.

¹ Вытовтов Константин Анатольевич, д.т.н., доцент
(vytovtov_konstan@mail.ru).

² Барабанова Елизавета Александровна, д.т.н., доцент
(elizavetaalex@yandex.ru).

³ Вишневский Владимир Миронович, д.т.н., профессор (vishn@inbox.ru).

⁴ Волкова Светлана Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент
(svolkovav2017@gmail.com).

⁵ Вытовтов Георгий Константинович, студент (georgii.vytovtov@gmail.com).

1. Введение

Системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и фазовым распределением времени обслуживания в последние годы получили довольно широкое развитие [1-10]. Данные модели в отличие от СМО с экспоненциальным распределением времени обслуживания позволяют более точно описать реальные системы и получить для них основные характеристики производительности. Так, например, фазовое распределение времени обслуживания используется для описания сетей связи нового поколения, для которых характерна переменная интенсивность обслуживания большого числа заявок [1]. Кроме этого, такое распределение помогает достаточно точно описать системы с многоэтапным обслуживанием заявок [11], примером которых являются многокаскадные коммутационные структуры, такие как, дуальные фотонные коммутаторы [12]. При этом наиболее часто используются частные случаи фазового распределения времени обслуживания: распределение Эрланга [4,5], гиперэкспоненциальное распределение [6] и т.д.

При исследовании СМО в том числе с фазовым распределением времени обслуживания важно рассматривать не только стационарный [9], но и переходной режим ее функционирования [7]. Такая необходимость возникает в случае нестационарного изменения интенсивностей поступления и обслуживания заявок, что применительно к телекоммуникационным приложениям отражает ситуации, связанные с изменением маршрутов передаваемых сообщений или выходом из строя обслуживающих устройств. В работах авторов [13,14] рассматривается аналитический подход к описанию работы СМО с пуассоновским и коррелированным входными потоками и экспоненциальным распределением времени обслуживания в переходном режиме. Метод позволяет получить решение системы любого конечного числа уравнений Колмогорова, используя так называемую матрицу преобразования вероятностей. На первом шаге предлагаемого подхода составляется система уравнений Колмогорова, что для экспоненциального времени обслуживания не представляет особого труда. В случае системы с фазовым распределением

данная задача значительно усложняется, так как реализовать алгоритм составления системы уравнений Колмогорова для большого числа заявок в каждой фазе даже для двух фаз требует больших вычислительных ресурсов.

В работе [2] описываются наиболее широко используемые методы исследования СМО с фазовым распределением времени обслуживания, такие как: метод вложенных цепей Маркова, метод введения дополнительной переменной, метод производящих функции, матричный метод и другие. При этом, система уравнений Колмогорова для однолинейной СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$ впервые представлена в [11]. Однако разработанные ранее алгоритмы построения уравнений Колмогорова содержат большое количество условий, что приводит к их высокой вычислительной сложности и, соответственно, высоким требованиям к вычислительным ресурсам.

Поэтому актуальным является разработка усовершенствованного алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для дальнейшего исследования СМО с фазовым распределением времени обслуживания в переходном режиме, позволяющего описывать систему с любым сколь угодно большим числом заявок и не требующего значительных вычислительных ресурсов.

Такой алгоритм представлен авторами в данной статье. Статья построена следующим образом. В разделе 3 приведен метод построения системы уравнений Колмогорова с применением новых функций, введенных авторами. Этот метод исключает использование в алгоритме построения уравнений Колмогорова многочисленных условий «если» и позволяет в дальнейшем проводить аналитическое исследование поведения СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$, в частности, использовать метод матрицы преобразования вероятностей [13,14] для нахождения вероятностей состояний системы в переходном режиме. Раздел 4 посвящен разработке алгоритма построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Для этого введена функция, преобразующая числа, соответствующие количеству заявок в каждой из фаз, в порядковый номер

элемента матрицы в столбце или строке. В разделе 5 описаны новые функции, позволяющие упростить алгоритм построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. В разделе 6 приведен сравнительный анализ алгоритмов построения системы уравнений Колмогорова в соответствии с хорошо известным методом [11] и с методом, использующим новые функции.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$. Система имеет одно обслуживающее устройство, обработка заявок в котором происходит в два этапа с интенсивностями μ_1 и μ_2 для первого и второго этапов соответственно. Входные заявки поступают в систему с интенсивностью λ . Максимальное количество заявок, находящихся в системе равно N , n - размер буфера, n_1 - число заявок, обслуживаемых на первом этапе, n_2 - число заявок, обслуживаемых на втором этапе, при этом, $n_1 + n_2 \leq N$, $n = N - 2$. Граф состояний однолинейной СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$ представлен на Рис.1. Состояние $S(0,0)$ соответствует отсутствию заявок в системе, $S(n_1, n_2)$, $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$ соответствует наличию n_1 заявок в первой фазе обслуживания и n_2 заявок на второй фазе обслуживания.

Целью данной статьи является модернизация алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для случая фазового распределения времени обслуживания с целью уменьшения его сложности и упрощения ее дальнейшего исследования.

3. Система уравнений Колмогорова

Прежде всего, оценим количество возможных состояний системы в зависимости от максимального количества заявок N . Из графа (Рис.1) видно, что любому n_2 соответствует

$S_{n_2} = N + 1 - n_2$ состояний. Тогда общее число состояний находится как

$$(1) \quad S = \sum_{n_2=0}^N (N + 1 - n_2)$$

Очевидно, что эта сумма ряда (1) равна

$$(2) \quad S = \frac{1}{2}(N^2 + 3N + 2)$$

и она соответствует количеству дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих данную систему $M/PH/1/n$.

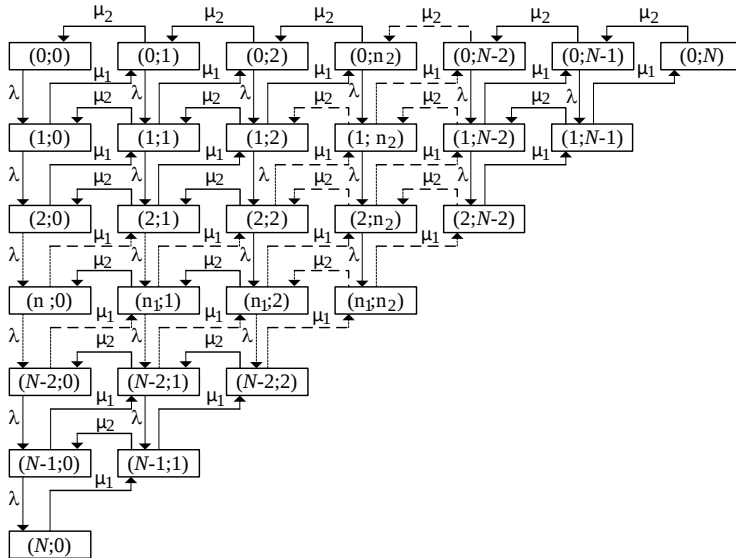


Рис.1. Граф состояний однолинейной СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону

Для этой системы уравнения Колмогорова были записаны в развернутом аналитическом виде еще в [11]:

$$\frac{dP(0,0,t)}{dt} = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t), \quad (n_1, n_2 = 0);$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(0, n, t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P(0, n, t) + \mu P(0, n-1, t) + \\
 & + \mu P(0, n+1, t), \quad (n = 0, n = \overline{1, N-1}); \\
 & \frac{dP(0, N, t)}{dt} = -\mu_2 P(0, N, t) + \mu_1 P(1, N-1, t), \\
 & (n_1 = 0, n_2 = N); \\
 & \frac{dP(n_1, 0, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(n_1, 0, t) + \mu_2 P(n_1, 1, t), \\
 & (n_1 = \overline{1, N-1}, n_2 = 0) \\
 & \frac{dP(N, 0, t)}{dt} = -\mu_1 P(N, 0, t) + \lambda P(N-1, 0, t), \quad (n_1 = N, n_2 = 0); \\
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1+1, n_2-1, t) + \\
 & + \mu_2 P(n_1, n_2+1, t) + \lambda P(n_1-1, n_2, t), \quad (n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N); \\
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1+1, n_2-1, t) + \\
 & + \lambda P(n_1-1, n_2, t), \quad (n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N);
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Следует отметить, что данный метод, предусматривающий использование различных форм записи при различных значениях n_1 и n_2 , является очень неудобной для дальнейшего анализа рассматриваемой СМО с большим числом заявок и расчета ее характеристик. Прежде всего, не удобным является . Это не позволяет получить общий вид рассматриваемой системы, а при составлении программ потребует усложнения программного кода, использования дополнительных условий и ограничений. Однако, очень важно отметить, что в записи (3) наблюдаются определенные закономерности. Для их описания возьмем за основу уравнение для $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1+1, n_2-1, t) + \\
 & + \mu_2 P(n_1, n_2+1, t) + \lambda P(n_1-1, n_2, t),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

содержащее наибольшее количество слагаемых. Допустим, что все эти слагаемые содержатся и в остальных уравнениях систе-

мы (3). Однако, каждое из слагаемых умножается на некоторую функцию $f_i(n_1, n_2, N)$, которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от значений n_1 , и n_2 . Тогда все уравнения в (3) с использованием (4) и функции $f_i(n_1, n_2, N)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} f_1(n_1, n_2, N) - (\lambda f_2(n_1, n_2, N) + \\
 & + \mu_1 f_2(n_1, n_2, N) + \mu_2 f_3(n_1, n_2, N)) P(n_1, n_2, t) + \\
 (5) \quad & + \mu_1 f_4(n_1, n_2, N) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & + \mu_2 f_5(n_1, n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & + \lambda f_6(n_1, n_2, N) P(n_1 - 1, n_2, t)
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим условия, при которых функции $f_i(n_1, n_2, N)$ должны принимать значения 0 или 1. В соответствии с (3) вероятности в левой части под знаком производной имеют вид $P(n_1, n_2, t)$, $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$. При этом, соответствующее уравнение в (3) отсутствует, если $n_1 + n_2 > N$ и сохраняется, если $n_1 + n_2 \leq N$. В сохраненных уравнениях в первой скобке правой части (множитель при $P(n_1, n_2, t)$) интенсивность поступления λ отсутствует при условии $n_1 + n_2 \geq N$ и сохраняется при $n_1 + n_2 < N$. Интенсивность обслуживания μ_1 отсутствует при $n_1 < 1$ и сохраняется при $n_1 \geq 1$. Интенсивность обслуживания μ_2 отсутствует при $n_2 < 1$ и сохраняется при $n_2 \geq 1$. Второе слагаемое $\mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t)$ в правой части уравнений (3) отсутствует при $n_1 + n_2 > N$ и сохраняется при $n_1 + n_2 \leq N$. Третье слагаемое $\mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t)$ в правой части уравнений (1) отсутствует при $n_2 < 0$ и сохраняется при $n_2 \geq 0$. Четвертое слагаемое $\lambda P(n_1 - 1, n_2, t)$ отсутствует при $n_1 < 0$ и сохраняется при $n_1 \geq 0$.

Исходя из этого анализа, для корректной записи системы (3) в общем виде (5) необходимо ввести функцию $v_1(x, M)$, ограничивающую возможные состояния системы снизу (минимально допустимые значения $x = n_1, n_2, n_1 + n_2$ должны быть большими либо равными M), а также функцию $v_2(x, K)$, ограничивающую возможные состояния сверху (максимально допустимые значения $n_1, n_2, n_1 + n_2$ должны быть меньшими либо равными K). Тогда система (3) с использованием введенных функций $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \nu_2(n_1 + n_2, N) \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -[\lambda \nu_2(n_1 + n_2, N) + \\
 & \mu_1 \nu_1(n_1, 1) + \mu_2 \nu_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) \nu_2(n_1 + n_2, N + 1) + \\
 (6) \quad & \mu_1 \nu_1(n_2, 1) \nu_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & \mu_2 \nu_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & \lambda \nu_1(n_1, 1) \nu_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t)
 \end{aligned}$$

где $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$.

Неудобным в записи (6) является то, что вместо отсутствующих уравнений появляется равенство $0 = 0$. Это затрудняет решение системы (6) матричными методами, поскольку матрица коэффициентов (6) оказывается вырожденной. Поэтому вместо (6) целесообразно использовать запись уравнений Колмогорова в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -[\lambda \nu_2(n_1 + n_2, N) + \\
 & \mu_1 \nu_1(n_1, 1) + \mu_2 \nu_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) + \\
 (7) \quad & \mu_1 \nu_1(n_2, 1) \nu_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & \mu_2 \nu_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & \lambda \nu_1(n_1, 1) \nu_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t)
 \end{aligned}$$

где $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$, $n_1 + n_2 \leq N$.

Таким образом, (7) является общей записью системы уравнений Колмогорова для однолинейной СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$.

В Приложении 1 представлен код программы и результаты построения системы уравнений Колмогорова для $N=4$ в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом (6), подтверждающие корректность предлагаемого метода.

В стационарном режиме дифференциальные уравнения (7) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$-[\lambda \nu_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 \nu_1(n_1, 1) + \mu_2 \nu_1(n_2, 1)] \pi(n_1, n_2) +$$

$$(8) \quad \begin{aligned} & \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \pi(n_1 + 1, n_2 - 1) + \\ & \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) \pi(n_1, n_2 + 1) + \\ & \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \pi(n_1 - 1, n_2) = 0, \end{aligned}$$

где $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$, $n_1 + n_2 \leq N$, которая позволяет записать инфинитезимальную матрицу в общем виде для данного случая.

4. Построение матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Функция $\mathcal{G}(n_k, n_l)$

Для нахождения вероятностей состояний системы авторы считают целесообразным применение метода матрицы преобразования вероятностей. Для этого прямое уравнение Колмогорова должно быть записано в матричной форме

$$(9) \quad \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}(t)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (7), $\vec{P}(t)$ – вектор-столбец вероятностей состояний системы. Отметим, что $\mathbf{A}$ является также инфинитезимальной матрицей рассматриваемой системы. Для построения матрицы $\mathbf{A}$ авторами введена функция:

$$(10) \quad \mathcal{G}(n_k, n_l) = (N + 1)n_k + n_l - \frac{n_k(n_k - 1)}{2} + 1,$$

преобразующая число заявок n_k , n_l в номер столбца (строки) этой матрицы. Проиллюстрируем ее для случая $N = 4$. Подставляя все необходимые комбинации n_k и n_l в (10) для $N = 4$, получим порядковые номера столбцов (строк), представленные в Таблице 1.

Таблица 1

n_k	0	0	0	0	0	1	1	1	1
n_l	0	1	2	3	4	0	1	2	3
$\mathcal{G}(n_k, n_l)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

n_k	2	2	2	3	3	4
n_l	0	1	2	0	1	0
$\mathcal{G}(n_k, n_l)$	10	11	12	13	14	15

Таким образом, элементу A_{11} матрицы $\mathbf{A}$ соответствует коэффициент при $P(0,0)$ в первом уравнении системы Колмогорова (7), элементу A_{21} соответствует коэффициент при $P(0,0)$ во втором уравнении системы (7), элементу $A_{15,15}$ соответствует коэффициент при $P(4,0)$ в последнем уравнении системы (7) и т.д. В соответствии с вышесказанным, а также видом уравнений Колмогорова для данной системы, элементы матрицы, расположенные на главной диагонали, записываются как

$$(11) \quad A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_2)} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)]$$

Остальные ненулевые элементы определяются соотношениями

$$(12) \quad \begin{aligned} A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_2)} &= \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \\ A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_5)} &= \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) \\ A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_6, n_2)} &= \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \end{aligned}$$

Оставшиеся элементы $\overline{A_{i,j}}$ матрицы $\mathbf{A}$ равны нулю. В (11) и (12) имеем $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$, $n_3 = n_1 + 1$, $n_4 = n_2 - 1$, $n_5 = n_2 + 1$, $n_6 = n_1 + n_2$.

Таким образом, метод, основанный на использовании функции (10) позволяет построить матрицу коэффициентов (9) (инфинитезимальную матрицу) без использования дополнительных условий «если» при переборе состояний n_k и n_l и существенно упрощает алгоритм.

5. Функции $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$

Условия, при которых в уравнении (7) отсутствуют определенные слагаемые, были описаны в предыдущем разделе. Теперь необходимо определить вид функций $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$. Формально исключение определенных слагаемых в (7) и сохра-

нение оставшихся можно осуществить с помощью функции Хевисайда

$$(13) \quad \sigma(x, x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$$

Однако, эта функция, по сути, является логической, а не аналитической и, следовательно, не очень удобна при разработке программы. В частности, при ее использовании в программном коде необходимо использовать дополнительные условия «если». Аналитически зависимость (13) может быть записана, например, как

$$(14) \quad \sigma(x, x_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \tanh \left[\alpha (x - x_0) \right] \right\} \right)$$

Но вычисление данного предела также затруднительно. Кроме того, гиперболический тангенс равен единице только при $x \rightarrow \infty$, а при остальных x он близок к единице, но не равен ей. Поэтому для возможности компактного аналитического представления системы уравнений Колмогорова была введена функция

$$(15) \quad \sigma_1(x, x_0) = \frac{|x - x_0| + x - x_0}{2|x - x_0|},$$

которая является аналитической и принимает те же значения, что и (13). Таким образом, функция, ограничивающая снизу допустимые состояния системы, системы имеет вид

$$(16) \quad \nu_1(x, M) = \frac{|x - M + 0.5| + x - M + 0.5}{2|x - M + 0.5|},$$

где M – нижнее допустимое состояние системы. Смещение на 0.5 по оси x выбрано в связи с тем, что в противном случае при $x = M$ эта функция была бы неопределенна, а ее производная стремилась бы к бесконечности в этой точке.

Аналогично с (15) введем функцию

$$(17) \quad \sigma_2(x, x_0) = \frac{|x_0 - x| + x_0 - x}{2|x_0 - x|},$$

которая позволяет записать окончательное выражение функции, ограничивающей сверху допустимые состояния системы

$$(18) \quad v_1(x, K) = \frac{|K - x - 0.5| + K - x - 0.5}{2|K - x - 0.5|},$$

где K – верхнее допустимое состояние системы. Применительно к решаемой задаче, x может принимать значения n_1, n_2, n_1+n_2 и т.д.

Преимуществом функций (16) и (18) в сравнении с (13) является отсутствие дополнительных условий «если», что существенно сокращает сложность программного кода и позволяет упростить аналитическое исследование соответствующей системы.

6. Сравнение алгоритмов

Алгоритм составления уравнений Колмогорова для системы $M/PH/1/n$ в соответствии с [11] представляет собой последовательную проверку условий в (3), т.е.:

1) если $n_1, n_2 = 0$, то

$$(19) \quad \frac{dP(0,0,t)}{dt} = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t);$$

если $n_1 = 0, n_2 = \overline{1, N-1}$, то

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{dP(0, n_2, t)}{dt} = & -(\lambda + \mu_2)P(0, n_2, t) + \mu_1 P(0, n_2 - 1, t) + \\ & + \mu_2 P(0, n_2 + 1, t); \end{aligned}$$

если $n_1 = 0, n_2 = N$, то

$$(21) \quad \frac{dP(0, N, t)}{dt} = -\mu_2 P(0, N, t) + \mu_1 P(1, N - 1, t);$$

если $n_1 = \overline{1, N-1}, n_2 = 0$, то

$$(22) \quad \frac{dP(n_1, 0, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(n_1, 0, t) + \mu_2 P(n_1, 1, t);$$

если $n_1 = N, n_2 = 0$, то

$$(23) \quad \frac{dP(N, 0, t)}{dt} = -\mu_1 P(N, 0, t) + \lambda P(N - 1, 0, t);$$

если $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$, то

$$(24) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \\ + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

если $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N$, то

$$(25) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

Блок-схема алгоритма (19)-(25) представлена на Рис.2.

Алгоритм составления уравнений Колмогорова в соответствии с методом, представленным в данной статье, сводится к вычислению (7) при различных значениях n_1, n_2 . Блок-схема этого алгоритма представлена на Рис.3.

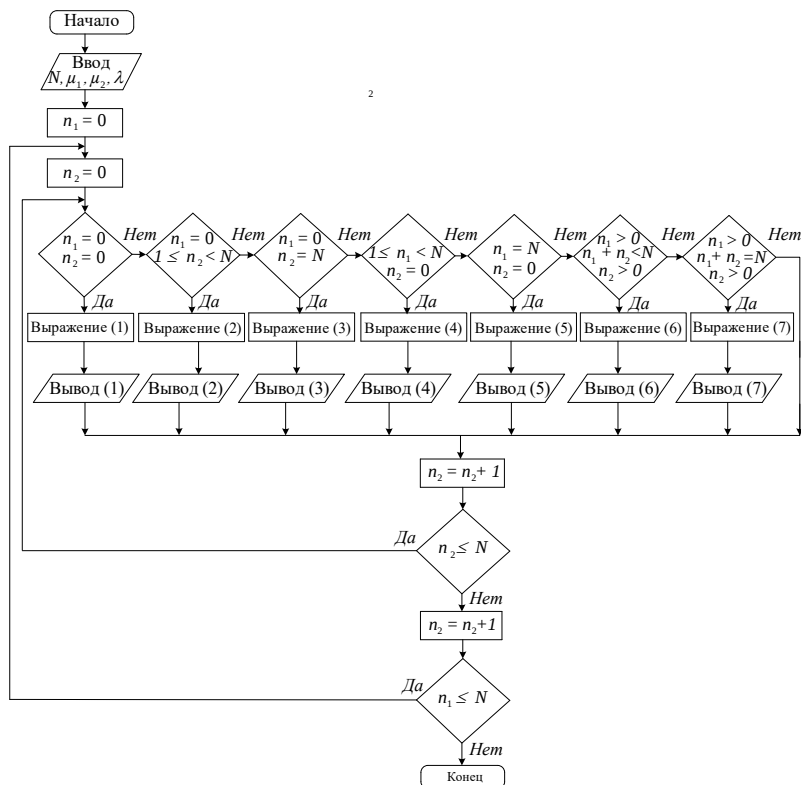


Рис.2. Блок-схема алгоритма (19)-(25)

Для оценки временной асимптотической сложности алгоритмов введем следующие обозначения: A – число проходов первого цикла, B – число проходов второго цикла. Поскольку $n_{1\max} = n_{2\max} = N$, то число проходов в каждом цикле равны $A = B = N$. Общее число проходов равно числу уравнений в (3) $(N^2 + 3N + 2)/2$. Тогда временная сложность обоих алгоритмов одинакова и равна $O(A \cdot B) = O(N^2)$ [15].

С точки зрения емкостной сложности (сложности по памяти), то она одинакова для обоих алгоритмов и равна

$O(A \cdot B) = O(N^2)$, поскольку при каждом проходе записывается всего одно дифференциальное уравнение Колмогорова.

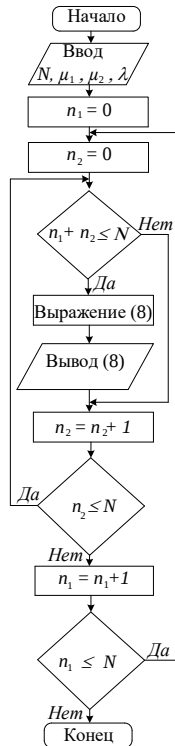


Рис.3. Блок-схема нового алгоритма, использующего функции $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$

При этом, в первом алгоритме для записи требуемого выражения имеется семь условных операторов «если». Проверка каждого условия в «лучшем варианте» занимает от 1 до 2 тактов условного процессора, в «худшем варианте» – от 10 до 20 тактов процессора. Во втором алгоритме присутствует только один условный оператор. Таким образом, выполнение первого алгоритма в «худшем варианте» предполагает использование на $7 \cdot 20 - 20 = 120$ тактов условного процессора больше, в «лучшем

варианте» количество тактов в обоих случаях равны. Таким образом, введение новых функций существенно уменьшает требуемый вычислительный ресурс, необходимый для выполнения поставленной задачи.

Для определения эффективного по времени алгоритма также был проведен натурный эксперимент. Реализация обоих алгоритмов проведена на языке Python. Определение времени выполнения произведено с помощью литерала `%time it`. Для первого алгоритма получим время $9K$, а во втором — $3K$. Таким образом, за счет уменьшения общего числа итераций во втором алгоритме значительно снизились вычислительные издержки, что говорит о временной эффективности предлагаемого алгоритма (Таблица 2).

Таблица 2. Результаты определения времени выполнения алгоритма

N	10	20	30
Время выполнения алгоритма 1, с	0.001	1.05	2.9
Время выполнения алгоритма 2, с	0.001	0.35	0.97

7. Заключение

В данной работе предложен новый алгоритм построения прямой системы уравнений Колмогорова, существенно упрощающий анализ и расчет вероятностей состояний однолинейной СМО с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/n$ в переходном режиме. Разработанный алгоритм основывается на использовании новых функций, введенных авторами. В работе также проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Показано, что предлагаемый алгоритм требует меньших объе-

мов вычислительных ресурсов и особенно эффективен при исследовании переходного режима СМО $M/PH/1/n$ с большим числом заявок в системе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>

Приложение 1

Код программы построения системы уравнений Колмогорова для однолинейной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и временем обслуживания, распределенным по фазовому закону $M/PH/1/4$ в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

```
restart;
with(linalg):
N := 4:
v1:=(x,m) -> evalf((1/2)*(abs(x-m+.5)+x-m+.5)/abs(x-m+.5), 2)
v2 := (x, k) -> evalf((1/2)*(abs(k-x-.5)+k-x-.5)/abs(k-x-.5), 2)

for n1 from 0 to N do for n2
    from 0 to N do
        if n1+n2 <= N then
            print("n1=", n1, "n2=", n2);
            print((Diff(P(n1,n2),
t))*v2(n1+n2,N+1)+(lambda*v2(n1+n2,
N)+mu[1]*v1(n1,1)+mu[2]*v1(n2,
1))*P(n1,n2,t)*v2(n1+n2,N+1)-
mu[1]*v1(n2,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1+1,n2-1,t)-
mu[2]*v2(n1+n2,N)*P(n1,n2+1,t)-
lambda*v1(n1,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1-1, n2,t)=0)
            end if;
        end do;
    end do;
```

Результаты построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для $N = 4$ в пакете символьных вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

$$\begin{aligned}
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(0, 0) \right) + 1.00\lambda P(0, 0, t) - 1.0\mu_2 P(0, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(0, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 1, t) - 1.00\mu_1 P(1, 0, t) - 1.0\mu_2 P(0, 2, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 2} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(0, 2) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 2, t) - 1.00\mu_1 P(1, 1, t) - 1.0\mu_2 P(0, 3, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 3} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(0, 3) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 3, t) - 1.00\mu_1 P(1, 2, t) - 1.0\mu_2 P(0, 4, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 4} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(0, 4) \right) + 1.00\mu_2 P(0, 4, t) - 1.00\mu_1 P(1, 3, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(1, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(1, 0, t) - 1.0\mu_2 P(1, 1, t) - 1.00\lambda P(0, 0, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(1, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 1, t) - 1.00\mu_1 P(2, 0, t) - 1.0\mu_2 P(1, 2, t) - 1.00\lambda P(0, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 2} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(1, 2) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 2, t) - 1.00\mu_1 P(2, 1, t) - 1.0\mu_2 P(1, 3, t) - 1.00\lambda P(0, 2, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 3} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(1, 3) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 3, t) - 1.00\mu_1 P(2, 2, t) - 1.00\lambda P(0, 3, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 2, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(2, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(2, 0, t) - 1.0\mu_2 P(2, 1, t) - 1.00\lambda P(1, 0, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 2, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(2, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 1, t) - 1.00\mu_1 P(3, 0, t) - 1.0\mu_2 P(2, 2, t) - 1.00\lambda P(1, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 2, "n2=", 2} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(2, 2) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 2, t) - 1.00\mu_1 P(3, 1, t) - 1.00\lambda P(1, 2, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 3, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(3, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(3, 0, t) - 1.0\mu_2 P(3, 1, t) - 1.00\lambda P(2, 0, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 3, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(3, 1) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(3, 1, t) - 1.00\mu_1 P(4, 0, t) - 1.00\lambda P(2, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 4, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left(\frac{d}{dt} P(4, 0) \right) + 1.00\mu_1 P(4, 0, t) - 1.00\lambda P(3, 0, t) = 0
 \end{aligned}$$

Литература

1. YUTAKA SAKUMA, ONNO BOXMA, TUAN PHUNG-DUC. *An M/PH/1 queue with workload-dependent processing speed and vacations* // Queueing Systems. – 2021. – Vol. 98. – P. 373–405. – <https://doi.org/10.1007/s11134-021-09701-2>
2. SHARMA RICHA. *Mathematical Analysis of Queue with Phase Service: An Overview* // Advances in Operations Research. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID 240926, 19 pages. – <http://dx.doi.org/10.1155/2014/240926>.
3. KRISHNAMOORTHY A., DIVYA V. *(M, MAP)/(PH, PH)/1 queue with nonpreemptive priority, working interruption and protection* // Reliability: Theory & Applications. – 2018. – № 2 (49).-Vol. 13. –P.14-35.
4. GRIFFITHS J.D., LEONENKO G.M., WILLIAMS J.E. *The transient solution to M/E_k/1 queue* // Operations Research Letters. – 2006. – Vol. 34 (2006). – P. 349 – 354.
5. GRIFFITHS J. D., LEONENKO G. M. AND WILLIAMS J. E. *Time-Dependent Analysis of Non-Empty M/E_k/1 Queue* // Quality Technology of Quantitative Management Quantitative Management. – 2008. – Vol. 5. – № 3, P. 309-320.
6. KEMPA WOJCIECH M. AND PAPROCKA IWONA. *Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity* // Sensors. – 2022. – Vol. 22(24). – 9909. <https://doi.org/10.3390/s22249909>
7. RUBINO, G. *Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closed forms and uniformization*. In Queueing Theory 2: Advanced Trends; Wiley-ISTE: Hoboken, NJ, USA. – 2021. – P. 269–307.
8. DOGAN OZANCAN AND AKAR NAIL. *The multi-source probabilistically preemptive M/PH/1/1 queue with*

- packet errors*// IEEE Transactions on Communications. – 2021. – Vol. 69. – Issue 11. – P. 7297 – 7308.
9. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: Рекламно-издательский центр "ТЕХНОСФЕРА". – 2018. – 564 с.
 10. ДУДИН С.А., КЛИМЕНОК В.И. *Система обслуживания с фазовым процессом поступления запросов в сессии* // Автоматика и вычислит. техника. – 2009. – Т. 43. – № 3. – С. 5–17.
 11. JACKSON R. R. P. *Queueing Systems with Phase Type Service*// Operational Research Society. – Vol. 5. – №. 4 (Dec., 1954) . – P. 109-120.
 12. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А., ПОДЛАЗОВ В.С. *Двухкаскадные дуальные фотонные коммутаторы в расширенном схемном базисе* // Проблемы управления. – 2021. – № 1. – С. 69-81.
 13. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А. *Аналитический метод исследования поведения системы массового обслуживания при скачкообразно-изменяющихся потоках информации* // Физические основы приборостроения. – 2021. – Т. 10. – № 1 (39) . – С. 36-47.
 14. VISHNEVSKY, V., VYTOVTOV, K., BARABANOVA, E., SEMENOVA, O. *Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate* // Mathematics. – 2022. – 10(10) . – 1684.
 15. КРУПКИЙ В. Н., ПЛИСКО В. Е. *Теория алгоритмов.* М.: Академия. – 2009. – 208 с.

**ARTICLE TITLE, ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ
НА АНГЛИЙСКИЙ**

Konstantin Vytovtov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (vytovtov_konstan@mail.ru, 117997, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, 8-929-635-88-52).

Elizaveta Barabanova – Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (elizavetaalexb@yandex.ru, 117997, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, 8-967-086-26-24).

Vladimir Vishnevsky – Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Professor (vishn@inbox.ru, 117997, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, 8-916-688-48-93).

Svetlana Volkova Astrakhan State Technical University, PhD, Associate Professor, (svolkovav2017@gmail.com, 414056, Astrakhan, Tatisheva str., 16, 8-925-608-79-44).

Georgii Vytovtov – Astrakhan State Technical University, Student, (georgii.vytovtov@gmail.com, 414056, Astrakhan, Tatisheva str., 16, 8-965-454-66-22).

Abstract: This work is devoted to the development of the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm for a single-line queuing system with a Poisson input and phase service. The case of two phase system and an arbitrary finite number of customers in the system is considered. The new functions that significantly simplify the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm and the system infinitesimal matrix are introduced. A comparative analysis of the complexity of previous algorithms and the algorithm presented by the authors is carried out too. The use of this algorithm will allow in the future to obtain analytical and numerical solutions of the main performance characteristics of the M/PH/1/n QS with a large number of applications in the transient operation mode.

Keywords: a single-line queuing system, phase service, Kolmogorov differential equations system, algorithm complexity.

УДК 519.217.13

ББК 30Б6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...