

# ЛЕВАЯ АСИМПТОТИКА АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Белов И.Р.<sup>2</sup>, Кустов А.Ю.<sup>3</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*В данной работе рассматриваются задачи асимптотического представления анизотропийной нормы и приближенного вычисления матриц оценителя при малых значениях средней анизотропии. Также представлено решение задачи определения предельного порога средней анизотропии внешнего возмущения, при котором фильтр Калмана с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оценитель. Приведен численный пример решения задачи определения максимального порога средней анизотропии входного возмущения для линейной дискретной стационарной системы.*

Ключевые слова: анизотропийная теория, задача оценивания, линейные дискретные стационарные системы, фильтр Калмана,  $\mathcal{H}_2$ -оптимизация.

## 1. Введение

Хорошо известно [1, 2, 3], что для эффективного управления объектом крайне важно обладать максимально полной информацией о его состоянии, которую исследователь может получить с установленных на объект датчиков. Однако, получение полной и точной информации об их состояниях на основании измерений с датчиков представляется крайне трудоемкой задачей. В такой ситуации остается синтезировать закон управления исключительно на основе неполных данных, которые могут быть сильно зашумлены в силу технических особенностей имеющихся датчиков и процессов, протекающих в самих системах. Отсюда возникает

<sup>1</sup> Авторы статьи благодарят И.Г. Владимирову за предоставление неоцененной помощи в выводе данного результата для оптимального случая, который описан в разделе 3.2 данной статьи, и В.Н. Тимина за обсуждение на начальном этапе исследования.

<sup>2</sup> Иван Романович Белов, к.ф.-м.н., с.н.с. (ivanb1993@mail.ru).

<sup>3</sup> Аркадий Юрьевич Кустов, к.ф.-м.н., с.н.с. (arkadiykustov@yandex.ru).

круг задач оценивания, заключающихся в построении оценки состояния или другой интересующей величины, характеризующей рассматриваемую систему. В задачах оптимального оценивания ищется оценка, доставляющая супремум/инфимум функционалу качества, а в задачах субоптимального оценивания для искомой оценки должно быть выполнено условие ограниченности критерия качества некоторым заданным числом.

Довольно часто в прикладных задачах случайные входные возмущения, действующие на систему, будь то шумы в датчиках, турбулентные порывы ветра или др., являются статистически неопределенными [4]. Поэтому при решении многих задач оценивания математическая модель случайных возмущений вводится с использованием той или иной неопределенности, что на уровне математической абстракции позволяет природе генерировать наихудшие возмущения из рассматриваемого класса.

Двумя известными методами решения задач оценивания являются методы  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий [5, 6, 7]. В самом простом случае LQG/ $\mathcal{H}_2$ -оптимальный фильтр, или фильтр Калмана, если известна статистика сигнала на входе, используется при допущении, что входное возмущение системы является стандартным гауссовским белым шумом. Подобный фильтр обеспечивает минимальное значение следа ковариационной матрицы ошибки оценивания состояния системы. Однако, как известно, фильтр Калмана не является эффективным (т.е. существует более оптимальный оцениватель), если указанные допущения не выполняются – к примеру, если входное возмущение не является белым шумом с заранее известной статистикой. Часто, если статистические свойства шумов не известны, используется  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтр. При построении  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра математически конструируется наихудшее внешнее возмущение, ввиду чего в реальных ситуациях данный фильтр оказывается излишне консервативным, а в некоторых случаях практической реализации – неоправданно энергозатратным. Помимо многочисленных публикаций, посвященных методам синтеза  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтров, большое количество научных работ посвящены решению задач синтеза фильтров, более эффек-

тивных с точки зрения минимизации влияния возмущений на систему, как было в случае  $\mathcal{H}_2$ -фильтра, но менее консервативных, чем  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтры [8, 9, 10, 11].

В 90-е годы с целью объединения подходов к описанию внешних возмущений и соответствующих ему методов решения задач управления и фильтрации И.Г. Владимировым была разработана так называемая анизотропийная теория управления и фильтрации [12, 13, 14, 15]. Фундаментальными понятиями этой теории являются анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия (стационарной эргодической) последовательности случайных векторов и анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы.

В [16] представлены асимптотические представления анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем при стремлении средней анизотропии входного возмущения к нулю и бесконечности. Тем не менее, полученные асимптотики не учитывают влияние на систему соответственно регуляторов или фильтров. Решение задачи анизотропийного оценивания при стремлении средней анизотропии к нулю позволяет ответить на вопросы об аналитической связи хорошо известных и широко используемых  $\mathcal{H}_2$ -регуляторов и оценщиков с анизотропийными регуляторами и оценщиками на уровне их асимптотики.

В данной работе рассмотрена задача исследования асимптотических представлений матриц анизотропийного оценщика при стремлении максимального порога средней анизотропии входного возмущения системы к нулю. При этом определен максимальный порог средней анизотропии, при котором оптимальный  $\mathcal{H}_2$ -фильтр с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оценщик. Актуальность данной постановки обусловлена тем, что во многих прикладных задачах [17] по причине простоты численной реализации используются методы синтеза  $\mathcal{H}_2$ -фильтров при предположении о поступлении на вход системы случайных возмущений с неопределенными параметрами, а также отсутствия строгих ограничений на величины отклонений моментов от известных эталонных значений. Величина найден-

ного максимального значения средней анизотропии задает порог, начиная с которого для получения качественного результата оценивания возникает необходимость использования анизотропийного оценителя вместо  $\mathcal{H}_2$ -фильтра.

В первом разделе данной статьи приведены краткое описание  $\mathcal{H}_2$ -фильтра, основные положения анизотропийной теории и формулы оптимального анизотропийного оценителя, которые используются для решения поставленных задач. Во втором разделе изложено решение задачи определения асимптотического представления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания для оптимального анизотропийного оценителя. Также второй раздел посвящен решению задачи определения максимального значения средней анизотропии, при котором фильтр Калмана аппроксимирует анизотропийный оценитель с заданной точностью. Данные результаты используются в численном примере в третьем разделе статьи.

## 2. Предварительные сведения

### 2.1. Сокращения и обозначения

В данной работе используются следующие обозначения:  $\mathbb{R}^n$  – множество  $n$ -мерных вещественных векторов;  $\mathbb{R}^{n \times m}$  – множество  $(n \times m)$ -мерных вещественных матриц;  $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел;  $\mathbb{L}_2^n$  – множество  $n$ -мерных вещественнозначных интегрируемых с квадратом случайных векторов;  $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$  – пространство Харди  $(n \times m)$ -мерных комплекснозначных матричных функций, аналитических внутри единичного круга  $\mathbb{C}_\circ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и имеющих ограниченную  $\mathcal{H}_\infty$ -норму, определенную для  $F \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$  как  $\|F\|_\infty = \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(F(z))$ ;  $\bar{\sigma}(X) = \max \sqrt{\lambda(X^*X)}$  – максимальное сингулярное число матрицы  $X$ ;  $\lambda(X)$  – собственное число матрицы  $X$ ;  $X^* = \bar{X}^T$  – комплексное транспонирование;  $\mathcal{H}_2^{p \times m}$  – пространство Харди аналитических для всех  $z \in \mathbb{C}_\circ$  матричных функций  $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k$  с ограниченной  $\mathcal{H}_2$ -нормой, квадрат которой определяется выражением

$$\|F\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{tr}(f_k f_k^T).$$

## 2.2. Класс рассматриваемых систем

Объектом исследования являются линейные дискретные стационарные системы  $F$  вида

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $x_k \in \mathbb{L}_2^n$  – вектор состояния,  $x(0) = 0$ ;  $w_k \in \mathbb{L}_2^m$  – вектор внешнего возмущения. Интересующие исследователя комбинации состояний системы (1) содержатся в последовательности векторов оцениваемого выхода

$$(2) \quad z_k = C_z x_k + D_z w_k.$$

В данной работе рассматривается случай  $z_k = x_k$ , т.е. в формуле (2) заданы  $C_z = I_n$ ,  $D_z = 0$ . В качестве данных для составления оценки выхода системы  $F$  используют наблюдения с датчиков, установленных на объект. Эти данные представляются в виде последовательности векторов  $y_k \in \mathbb{L}_2^p$  измеряемого выхода

$$(3) \quad y_k = Cx_k + Dw_k.$$

Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  являются известными вещественными матрицами соответствующих размеров. Системе уравнений вида (1), (3) ставится в соответствие передаточная функция  $T_{yw}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$ , определяемая четверкой матриц

$$(4) \quad T_{yw} \sim (A, B, C, D).$$

Общая постановка задачи оценивания: необходимо построить оценитель, заданный четверкой матриц

$$(5) \quad T_{\hat{x}y} \sim (A - KC, K, I_n - MC, M)$$

с состоянием  $\hat{x}_k \in \mathbb{L}_2^n$ , входом  $y_k \in \mathbb{L}_2^p$  и выходом  $\hat{z}_k \in \mathbb{L}_2^n$ , чтобы обеспечить выполнение некоторого критерия качества. В (5) определению подлежат матрицы  $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Далее представлены основные сведения о двух типах оценок в зависимости от критерия качества:  $\mathcal{H}_2$ -фильтре (критерием качества является след ковариационной матрицы ошибки оценивания) и анизотропном оценителе (критерием качества является анизотропная норма системы в ошибках оценивания).

### 2.3. $\mathcal{H}_2$ -оптимальное оценивание

Задача оптимального  $\mathcal{H}_2$ -оценивания [5, 7] заключается в поиске оценщика, доставляющего минимум  $\mathcal{H}_2$ -норме системы в ошибках оценивания для линейной системы с входным возмущением в виде стандартного гауссовского белого шума. Пусть дана линейная дискретная стационарная система  $F$  с уравнением динамики (1), вектором измерений  $y_k$ , описываемым уравнением (3), и выходом  $z_k = x_k$ . Оценщик  $T_{\hat{z}_y}$  выхода  $z_k$  по измерениям выхода  $y_k$  имеет вид (5). Ошибка оценивания  $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$  является выходом системы  $T_{\tilde{z}_w}$  вида

$$(6) \quad T_{\tilde{z}_w} \sim (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

Критерием оптимальности полученной оценки  $\hat{z}_k$  является  $\mathcal{H}_2$ -норма системы  $T_{\tilde{z}_w}$ :

$$(7) \quad \|T_{\tilde{z}_w}\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T]) \doteq \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_\infty \tilde{z}_\infty^T]) \doteq J(K, M).$$

Задача  $\mathcal{H}_2$ -оптимального оценивания заключается в поиске для системы  $F$  оценщика  $T_{\hat{z}_y}$  вида (5), доставляющего минимум функционалу (7). С учетом (6) функционал (7) имеет вид [5]

$$(8) \quad J(K, M) = \text{tr}(MD(MD)^T + (I_n - MC)\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^T](I_n - MC)^T).$$

Матрица  $\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^T]$  в (8) представляет собой ковариационную матрицу состояния на установившемся режиме. Обозначим эту матрицу через  $P$ . Уравнение для  $P$  с учетом (6) имеет вид

$$(9) \quad P = (A - KC)P(A - KC)^T + (B - KD)(B - KD)^T.$$

Задача минимизации (8), связанная с нахождением матриц  $K$  и  $M$ , решается в два этапа. На первом этапе определяется оптимальное значение матрицы  $M$  как функции матрицы  $P = P(K)$ :

$$(10) \quad M_*(K) = \arg \min_M J(K, M) = PC^T T^{-1},$$

где

$$(11) \quad T = CPC^T + DD^T.$$

На втором этапе решается задача нахождения матрицы  $K$ :

$$(12) \quad K_* = \arg \min_K J(K, M_*(K)) = (APC^T + BD^T)T^{-1}.$$

Таким образом, решением описанной выше задачи является оптимальный  $\mathcal{H}_2$ -оценщик  $T_{\hat{z}_y}$  вида (5) с матрицами  $K_*$  и  $M_*$ , удовлетворяющими (12) и (10), соответственно. Далее приведены основные положения анизотропной теории управления, использующиеся в работе.

#### 2.4. Анизотропийное оценивание

Предположим, что на вход рассматриваемой системы (1) поступает стационарная последовательность гауссовских случайных векторов  $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$ ,  $w_k \in \mathbb{L}_2^m$ , с неизвестной точно статистикой. Для описания статистической неопределенности в распределении отдельных векторов и последовательности в целом будут использоваться понятия анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов, соответственно. Анизотропия случайного вектора  $w$  определяется выражением [13]

$$(13) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}),$$

где  $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$  – относительная энтропия плотности распределения вероятности  $f$  вектора  $w$  относительно плотности нормального распределения вероятности  $p_{m,\lambda}$  с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$ ,  $\lambda > 0$ .

Векторы последовательности  $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$  могут быть представлены в виде

$$(14) \quad w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k},$$

где  $V = (v_k)_{0 \leq k \leq +\infty}$  – стандартный  $m$ -мерный гауссовский белый шум;  $G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$  – передаточная функция так называемого формирующего фильтра. В рамках анизотропийной теории последовательность случайных векторов характеризуется ее средней анизотропией, которая определяется следующей формулой [13]:

$$(15) \quad \bar{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left( \frac{m \hat{G}(w) (\hat{G}(w))^*}{\|G\|_2^2} \right) dw,$$

где  $\hat{G}(w) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{iw})$ ,  $i^2 = -1$ . В дальнейшем для средней анизотропии наряду с  $\bar{\mathbf{A}}(W)$  также будет использоваться обозначение  $\bar{\mathbf{A}}(G)$ .

Мерой отклика системы  $F$  вида (4) на входное возмущение с ограниченной средней анизотропией  $\bar{A}(G) \leq a$  является анизотропийная норма системы [14]:

$$(16) \quad \|F\|_a = \sup \{ \|FG\|_2 / \|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a \},$$

где  $\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \bar{A}(G) \leq a\}$ . Ниже приведена формулировка леммы о вычислении анизотропийной нормы (16) для линейной дискретной стационарной системы.

**Лемма 1** [14]. Пусть дана устойчивая линейная дискретная стационарная система  $F$  вида (4), для которой выполнено условие несферичности  $\|F\|_2 / \sqrt{m} < \|F\|_\infty$ . Для любого  $a > 0$  существует единственная пара  $(q, R)$ , состоящая из скалярного параметра  $q \in (0, \|F\|_\infty^{-2})$ , удовлетворяющего уравнению

$$(17) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(LPL^T + \Sigma)} = a,$$

и неотрицательно-определенной матрицы  $R$ , являющейся решением уравнения Риккати

$$(18a) \quad R = A^T R A + q C^T C + L^T \Sigma^{-1} L,$$

$$(18b) \quad \Sigma = (I_m - q D^T D - B^T R B)^{-1},$$

$$(18c) \quad L = \Sigma (B^T R A + q D^T C).$$

Анизотропийная норма системы  $F$  вычисляется как

$$(19) \quad \|F\|_a = \left( \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{m}{\text{tr}(LPL^T + \Sigma)} \right) \right)^{1/2},$$

где неотрицательно-определенная матрица  $P$  удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(20) \quad P = (A + BL)P(A + BL)^T + B\Sigma B^T.$$

Формирующий фильтр вида

$$(21) \quad G \sim (A + BL, B\Sigma^{1/2}, L, \Sigma^{1/2}),$$

где матрицы  $L$  и  $\Sigma$  заданы уравнениями (18), называется наилучшим формирующим фильтром, и ему отвечает супремум отношения  $\|FG\|_2 / \|G\|_2$ . Справедливость (17) гарантирует, что средняя анизотропия выхода фильтра (21) точно равна числу  $a$ .

Задача синтеза оптимального анизотропийного оценителя заключается в нахождении неизвестных матриц  $K$  и  $M$  линейного стационарного оценителя вида (5), минимизирующего значение анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания вида (6). Далее в работе этой системе будет соответствовать четверка матриц

$$(22) \quad (A, B, C, D) = (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

По аналогии с представленным в [15] решением задачи оптимального оценивающего анизотропийного регулятора можно найти решение задачи синтеза оптимального анизотропийного оценителя вида (5). Матрицы  $K$  и  $M$  оценителя будут определяться выражениями

$$(23a) \quad K = ((A + BL)P(C + DL)^T + B\Sigma D^T)T^{-1},$$

$$(23b) \quad M = P(C + DL)^T T^{-1},$$

$$(23c) \quad T = (C + DL)P(C + DL)^T + D\Sigma D^T,$$

где матрицы  $\Sigma$ ,  $L$  и  $P$  удовлетворяют (17), (18), (20). Рассуждения относительно связи анизотропийного оценителя с  $\mathcal{H}_2$ -фильтром приведены в следующем разделе работы.

### 3. Левая асимптотика анизотропийной нормы

В работе [16] были получены формулы асимптотического поведения анизотропийной нормы в окрестности ее предельных значений. При  $a \rightarrow 0 + 0$  эта зависимость имеет вид

$$(24) \quad \|F\|_a = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} \left( 1 + \sqrt{\frac{Qa}{m}} + \bar{o}(\sqrt{a}) \right),$$

где

$$(25) \quad Q = \frac{m\|F\|_4^4 - \|F\|_2^4}{\|F\|_2^4}.$$

Приведенное выражение справедливо для устойчивых систем с известным представлением в пространстве состояний. В случае, когда система  $F$  представляет собой систему в ошибках оценивания, а потому сама зависит от выбранного в задаче синтеза уровня средней анизотропии, формула (24) нуждается в правке, чему и посвящен остаток данной работы.

### 3.1. Случай оптимального анизотропийного оценителя

Для начала кратко разберем оптимальный случай, когда  $F = F(E)$  – система, зависящая от коэффициентов оптимального  $a$ -анизотропийного оценителя. Обозначим через  $J_a(F)$  средне-квадратичный коэффициент усиления для системы с неизвестными переменными (на уровне задачи фильтрации такая система является системой в ошибках оценивания, проведенного с помощью фильтра  $E$ ) при условии, что на ее вход поступает наилучшее внешнее возмущение со средней анизотропией  $a$ :

$$(26) \quad J_a(F) = \|FG_*\|_2 / \|G_*\|_2 \Big|_{G_* = \arg \max\{\|FG\|_2 / \|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a\}}$$

Для него справедливо представление

$$(27) \quad J_a(F) = c_0(F) + \sqrt{a}c_1(F) + \frac{1}{2}ac_2(F) + \dots$$

при малых значениях  $a \geq 0$ . Достаточно очевидно, что оптимальный  $\mathcal{H}_2$ -фильтр  $E_0$  является решением задачи

$$(28) \quad J_0(F) = c_0(F) \rightarrow \min_E,$$

т.е.  $E_0 = \arg \min_E c_0(F) \Big|_{F=F(E)}$ , при этом для “макета” системы будет справедливо соотношение  $F = F(E_0)$ . Однако при отклонении величины средней анизотропии от нуля для случая, когда система замыкается оптимальным  $a$ -анизотропийным оценителем  $E_a$ , формула (27), если в нее подставить  $E = E_a$ , принимает вид

$$(29) \quad J_a(F_a) = c_0(F_a) + \sqrt{a}c_1(F_a) + \frac{1}{2}ac_2(F_a) + \dots,$$

где  $F_a = F(E_a)$ , переставая, таким образом, быть содержательной в плане явного представления  $J_a(F_a)$  в виде степенного ряда по  $\sqrt{a}$ . Следующие рассуждения позволяют уточнить зависимость анизотропийной нормы для системы  $F(E_a)$ .

Прежде всего, легко убедиться, что при условии достаточной гладкости функции  $J_a(F)$  имеют место соотношения

$$(30) \quad c_0(F) = J_0(F), \quad c_k(F) = \partial_{\sqrt{a}}^k J_a(F) \Big|_{a=0},$$

дающие выражения для коэффициентов разложения (27). Тогда, т.к. из (28) следует, что

$$(31) \quad F_0 = \arg \min_{F(E)} c_0(F(E)),$$

справедливыми будут также выражения

$$(32) \quad \partial_F c_0(F)|_{F=F_0} = 0, \quad \partial_F^2 c_0(F)|_{F=F_0} \geq 0,$$

где  $\partial_F$  – производная Фреше. Для сокращения записи введем обозначения

$$(33) \quad \partial J_a = \partial_F J_a(F)|_{F=F_a}, \quad \partial^2 J_a = \partial_F^2 J_a(F)|_{F=F_a}.$$

Из (32) следует, что для всех сколь угодно малых значений  $a \geq 0$  выполнены необходимые условия минимума

$$(34) \quad \partial J_a = 0, \quad \partial^2 J_a \geq 0,$$

ввиду чего

$$(35) \quad \frac{d(\partial J_a)}{d\sqrt{a}} = \partial^2 J_a \cdot \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} + \partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) = 0.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$(36) \quad \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} = -\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) \cdot (\partial^2 J_a)^{-1},$$

выполненное при  $\partial^2 J_a > 0$ . Из (36), в частности, следует, что

$$(37) \quad \left. \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} \right|_{a=0} = - \left. \frac{\partial_F c_1(F)}{\partial_F^2 c_0(F)} \right|_{F=F_0}.$$

Следовательно,

$$(38) \quad \frac{d(J_a(F_a))}{d\sqrt{a}} = \partial_{\sqrt{a}}(J_a(F_a)).$$

При повторном дифференцировании получим

$$(39) \quad \frac{d^2(J_a(F_a))}{da} = \partial_{\sqrt{a}}^2(J_a(F_a)) - \left(\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a)\right)^2 \cdot (\partial^2 J_a)^{-1}.$$

Значит, при  $a = 0$  формулы (38) и (39) примут вид

$$(40) \quad \frac{dJ_a(F_a)}{d\sqrt{a}} = c_1(F_0), \quad \frac{d^2 J_a(F_a)}{da} = c_2(F_0) - \frac{(\partial_F c_1(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)}.$$

В результате окончательная модификация формулы (27) для случая зависимости системы  $F$  от оптимального анизотропийного оценителя  $E_a$  будет иметь вид

$$(41) \quad J_a(F_a) = c_0(F_0) + \sqrt{a}c_1(F_0) + \frac{1}{2}a \left( c_2(F_0) - \frac{(\partial_F c_1(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)} \right) + \bar{o}(a).$$

Интересен тот факт, что отличие полученной формулы от (27) при подстановке в последнюю  $F = F_0$  наблюдается начиная со слагаемого порядка  $a$ . Иными словами, если исследователя

удовлетворяет точность порядка  $\bar{o}(\sqrt{a})$  при аппроксимации формулы анизотропийной нормы (24), то достаточно сделать просто замену  $F = F_0$  в ее правой части. Однако для ее эффективного использования необходимо все равно находить оптимальный  $a$ -анизотропийный оценитель, что сопряжено с решением нелинейных уравнений.

Поскольку в рамках решаемой задачи система таких уравнений соответствует малым значениям уровня  $a$ , можно ограничиться лишь приближенными формулами для нахождения  $a$ -анизотропийного оценителя. В следующем параграфе будет показано, к чему приведет использование приближенных вычислений в задаче оценивания.

### 3.2. Приближенное вычисление анизотропийных оценок

Прежде всего отметим, что загроуление оптимального оценителя путем вычисления его приближенного варианта приведет к потере точности, связанной с представлением анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания формулой (41). Это фактически означает, что происходит потеря связи между уровнем средней анизотропии, для которого синтезируется оценитель, и тем, для которого вычисляется анизотропийная норма соответствующей системы в ошибках оценивания. Иными словами, если перейти от использования оптимального анизотропийного оценителя, для которого при малых значениях  $a$  справедливо разложение

$$(42) \quad E_a = E_0 + \sqrt{a}E_1 + \frac{1}{2}aE_2 + \dots,$$

к приближенному оценителю  $E'_a = E_0 + \sqrt{a}E_1$ , то величину  $a$  в общем случае нужно заменить на некоторую другую  $b$ , от которой все еще требуется выполнение условия малости  $b = \bar{o}(1)$ . Это утверждение имеет под собой те же основания, что и соотношение между  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормами систем, замкнутых оптимальными  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторами [18]. Далее приведены основные рассуждения о выводе уравнений для  $E'_b$ , а также формулы  $a$ -анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания  $F = F(E'_b)$ .

Следствием результатов работы [16] является тот факт, что для случая  $a = 0$  решениям соответствующих уравнений леммы 1 соответствуют матрицы  $R_0 = 0$ ,  $\Sigma_0 = I_m$ ,  $L_0 = 0$  и число  $q_0 = 0$ , где индекс “0” означает равенство нулю средней анизотропии. Соответствующая им ковариационная матрица  $P_0$  состояния на установившемся режиме определяется выражением (9), соответствующем случаю  $\mathcal{H}_2$ -оценителя. Несложно показать, что матрица  $K_0$  фильтра примет вид (12). Ковариационная матрица  $P_z = \text{cov}(\tilde{z}_\infty)$  ошибки оценивания вектора  $z_k$  на установившемся режиме при нулевой анизотропии входного возмущения удовлетворяет уравнению

$$(43) \quad P_{z0} = (I_n - M_0 C) P_0 (I_n - M_0 C)^T + M_0 D (M_0 D)^T,$$

где матрица  $M_0$  фильтра примет вид (10).

Как уже было отмечено, при равенстве средней анизотропии оценителя нулю ( $b = 0$ ) ковариационная матрица ошибки оценивания и сами матрицы оценителя соответствуют фильтру Калмана. По этой причине при малых значениях  $b = \bar{o}(1)$  будем описывать анизотропийный оценитель в терминах отклонений от фильтра Калмана, т.е. все переменные будем представлять в виде

$$(44) \quad X(b) = X_0 + \Delta_X(b), \quad \Delta_X(0) = 0,$$

где  $X \in \{P, R, \Sigma, L, K, M, q, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ .

Для решения задачи асимптотического представления анизотропийного оценителя при малых значениях  $b > 0$  нужно определить порядок малости  $\Delta_X(b)$  в выражении выше. Вернувшись к формуле (17), обратимся к представлению матричного логарифма в виде степенного ряда

$$(45) \quad \ln(I + X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} X^k}{k}, \quad \|X\| < 1.$$

С учетом пренебрежения слагаемых старше второй степени в (45) выражение (17) примет вид

$$(46) \quad \text{tr} \left( X - \frac{1}{2} X^2 \right) \approx -2b,$$

где

$$(47) \quad X = \frac{m(I_m + \Delta_\Sigma(b))}{m + \text{tr}(\Delta_L(b)P(b)\Delta_L^T(b) + \Delta_\Sigma(b))} - I_m,$$

что после проведения несложных преобразований приводит к

$$(48a) \quad 4bm + (\text{tr}(\Delta_{\Sigma}(b)))^2 - m\text{tr}(\Delta_{\Sigma}^2(b)) -$$

$$(48b) \quad -2m\text{tr}(\Delta_L(b)P_0\Delta_L^T(b)) \approx 0.$$

Таким образом, величины  $\Delta_L(b)P_0\Delta_L^T(b)$  и  $\Delta_{\Sigma}^2(b)$  имеют порядок малости  $b$ , а матрицы  $\Delta_L(b)$  и  $\Delta_{\Sigma}(b)$  как функции  $b$  представимы в виде

$$(49a) \quad \Delta_{\Sigma}(b) = \Sigma_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(49b) \quad \Delta_L(b) = L_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

где  $\Sigma_1$  и  $L_1$  будут определены позже. Для определения порядка малости функции  $\Delta_R(b)$  рассмотрим уравнение Риккати (18) с учетом (44) (как и ранее, пренебрегая частью слагаемых наименьшего порядка):

$$(50a) \quad \Delta_R(b) \approx \mathcal{A}_0^T \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{C}_0^T \mathcal{C}_0,$$

$$(50b) \quad \Sigma_1 \sqrt{b} \approx \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^T \mathcal{D}_0 + \mathcal{B}_0^T \Delta_R(b) \mathcal{B}_0,$$

$$(50c) \quad L_1 \sqrt{b} \approx \mathcal{B}_0^T \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^T \mathcal{C}_0.$$

Таким образом, функции  $\Delta_R(b)$  и  $\Delta_q(b)$  представимы в виде

$$(51a) \quad \Delta_R(b) = R_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(51b) \quad \Delta_q(b) = q_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b})$$

с некоторыми  $R_1$  и  $q_1$ . Наряду с полученными формулами также имеем соотношения

$$(52a) \quad \Sigma_1 = q_1(\mathcal{B}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^T \mathcal{D}_0),$$

$$(52b) \quad L_1 = q_1(\mathcal{B}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + \mathcal{D}_0^T \mathcal{C}_0),$$

где  $\mathcal{Q}$  – решение уравнения Ляпунова

$$(53) \quad \mathcal{Q} = \mathcal{A}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_0^T \mathcal{C}_0.$$

Можно заметить, что матрицы  $R_1$  и  $\mathcal{Q}$  связаны друг с другом выражением  $R_1 = q_1 \mathcal{Q}$ . Далее определим порядок малости  $\Delta_P(b)$ .

Подставив в уравнение (20) представления функций  $\Sigma(b)$  и  $L(b)$ , и с учетом (9) получим

$$(54) \quad \Delta_P(b) \approx \mathcal{A}_0 \Delta_P(b) \mathcal{A}_0^T + \sqrt{b} \mathcal{B}_0 \Sigma_1 \mathcal{B}_0^T + Y_P + Y_P^T,$$

где

$$(55) \quad Y_P = \sqrt{b} \mathcal{A}_0 P_0 (\mathcal{B}_0 L_1)^T - (\mathcal{A}_0 P_0 C^T + \mathcal{B}_0 D^T) \Delta_K^T(b),$$

откуда следует, что

$$(56) \quad \Delta_P(b) = P_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(57) \quad \Delta_K(b) = K_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Определение порядка малости  $\Delta_{P_z}(b)$  и  $\Delta_M(b)$  проходит по аналогии, что приводит к приближенному равенству

$$(58) \quad \Delta_{P_z}(b) \approx \sqrt{b} \mathcal{C}_0 P_1 \mathcal{C}_0^T + \sqrt{b} \mathcal{D}_0 \Sigma_1 \mathcal{D}_0^T - Y_{P_z} - Y_{P_z}^T,$$

где

$$(59) \quad Y_{P_z} = \mathcal{D}_0 (\Delta_M(b) D)^T + \mathcal{C}_0 P_0 (\Delta_M(b) C - D L_1 \sqrt{b})^T.$$

Таким образом, функции  $\Delta_{P_z}(b)$  и  $\Delta_M(b)$  имеют вид

$$(60a) \quad \Delta_{P_z}(b) = P_{z1} \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(60b) \quad \Delta_M(b) = M_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Подставив формулы для  $K(b)$  и  $M(b)$  в (22), придем к тому, что

$$(61a) \quad \Delta_{\mathcal{A}}(b) = \mathcal{A}_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_{\mathcal{B}}(b) = \mathcal{B}_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(61b) \quad \Delta_{\mathcal{C}}(b) = \mathcal{C}_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_{\mathcal{D}}(b) = \mathcal{D}_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Легко убедиться, что  $\mathcal{A}_1 = -K_1 C$ ,  $\mathcal{B}_1 = -K_1 D$ ,  $\mathcal{C}_1 = -M_1 C$ ,  $\mathcal{D}_1 = -M_1 D$ . С учетом приведенных выше выкладок выражение (48) примет вид

$$(62) \quad 4m + \text{tr}^2(\Sigma_1) - m \text{tr}(\Sigma_1^2) - 2m \text{tr}(L_1 P_0 L_1^T) = 0,$$

откуда с учетом (52) получаем формулу для  $q_1$ :

$$(63a) \quad q_1^2 = 4m \left( m \text{tr} \left( 2(\mathcal{B}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + \mathcal{D}_0^T \mathcal{C}_0) P_0 (\mathcal{A}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{C}_0^T \mathcal{D}_0) + \right. \right.$$

$$(63b) \quad \left. + (\mathcal{B}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^T \mathcal{D}_0)^2 - (\text{tr}(\mathcal{B}_0^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^T \mathcal{D}_0))^2 \right)^{-1}.$$

Для продолжения нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, связывающие друг с другом нормы различных систем. Так, известно, что  $\mathcal{H}_4$ -норма системы в ошибках оценивания фильтром Калмана определяется выражением [16]:

$$(64a) \quad \|F_0\|_4^4 = \text{tr}((C_0 P_0 C_0^T + D_0 D_0^T)^2) +$$

$$(64b) \quad + 2\text{tr}((C_0 P_0 A_0^T + D_0 B_0^T) Q (A_0 P_0 C_0^T + B_0 D_0^T)).$$

Согласно теореме Риса-Фреше, норма сопряженного оператора равна норме исходного оператора. Значит, часть выражений, справедливых для исходной системы, будут справедливыми и в терминах двойственной, т.е.

$$(65a) \quad \|F_0\|_2^2 = \text{tr}(B_0^T Q B_0 + D_0^T D_0) = \text{tr}(C_0 P_0 C_0^T + D_0 D_0^T),$$

$$(65b) \quad \|F_0\|_4^4 = 2q_1^{-2} \text{tr}(L_1 P_0 L_1^T) + \text{tr}((B_0^T Q B_0 + D_0^T D_0)^2) =$$

$$(65c) \quad = \text{tr}((C_0 P_0 C_0^T + D_0 D_0^T)^2) + 2\text{tr}(\Gamma^T Q \Gamma),$$

где  $\Gamma = A_0 P_0 C_0^T + B_0 D_0^T$ . Таким образом, выражение (63) принимает вид  $q_1^2 = 4m/(Q\|F_0\|_2^4)$ . Далее можно получить, что

$$(66) \quad P_1 = A_0 P_1 A_0^T + B_0 \Sigma_1 B_0^T + Y_{P_1} + Y_{P_1}^T,$$

где  $Y_{P_1} = A_0 P_0 (A_1 + B_0 L_1)^T - B_0 B_1^T$ , и

$$(67) \quad P_{z_1} = C_0 P_1 C_0^T + D_0 \Sigma_1 D_0^T + Y_{P_{z_1}} + Y_{P_{z_1}}^T,$$

где  $Y_{P_{z_1}} = C_0 P_0 (C_1 + D_0 L_1)^T + D_0 D_1^T$ . Также с учетом результатов [16] и формул (23) несложно вывести выражения

$$(68a) \quad K_1 = (A P_1 C^T + B L_1 P_0 C^T + A P_0 (D L_1)^T - K_0 T_1) T_0^{-1},$$

$$(68b) \quad M_1 = (P_1 C^T + P_0 (D L_1)^T - M_0 T_1) T_0^{-1},$$

$$(68c) \quad T_1 = C P_1 C^T + D \Sigma_1 D^T + Y_{T_1} + Y_{T_1}^T,$$

где  $Y_{T_1} = C P_0 (D L_1)^T$ .

Теперь, когда получены приближенные формулы для анизотропийного оценщика при малых значениях средней анизотропии  $b = \bar{o}(1)$ , можно переходить к получению приближенных формул для  $a$ -анизотропийной нормы при  $a = \bar{o}(1)$ . Повторим

еще раз, что значения  $a$  и  $b$  не обязательно должны быть равны друг другу: нас интересует лишь порядок стремления анизотропийной нормы к своему точному значению при выполнении условия  $\max\{a, b\} = \bar{o}(1)$ . Для получения искомого выражения нужно получить разложение функции  $\Phi \doteq \text{tr}(LPL^T + \Sigma)$  в ряд по степеням  $\sqrt{a}$  до второй степени включительно. Стоит отметить, что матрицы  $L$ ,  $P$  и  $\Sigma$  определяются одновременно значениями  $a$  и  $b$ . Это обусловлено тем, что в представлениях функций вида  $\Delta_X(a, b) = X_1\sqrt{a} + \bar{o}(\sqrt{a})$  величина  $\bar{o}(\sqrt{a})$  на самом деле задана суммой  $\bar{o}(\sqrt{a}) = X_2\sqrt{ab} + X_3a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$ , где  $X \in \{R, \Sigma\}$  определяются выражениями

$$(69a) \quad R_2 = \mathcal{A}_0^T R_2 \mathcal{A}_0 + Y_{R_2} + Y_{R_2}^T,$$

$$(69b) \quad R_3 = \mathcal{A}_0^T R_3 \mathcal{A}_0 + L_1^T L_1,$$

где  $Y_{R_2} = q_1(\mathcal{A}_1^T \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + C_1^T C_0)$ , и

$$(70a) \quad \Sigma_2 = \mathcal{B}_0^T R_2 \mathcal{B}_0 + Y_{\Sigma_2} + Y_{\Sigma_2}^T,$$

$$(70b) \quad \Sigma_3 = \mathcal{B}_0^T R_3 \mathcal{B}_0 + \Sigma_1^2,$$

где  $Y_{\Sigma_2} = q_1(\mathcal{B}_1^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_1^T \mathcal{D}_0)$ . С учетом приведенных соотношений можно убедиться, что  $\Phi(a, b) = \Phi_{0,0} + \Phi_{1,0}\sqrt{a} + \Phi_{1,1}\sqrt{ab} + \Phi_{2,0}a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$ , где

$$(71a) \quad \Phi_{0,0} = m, \quad \Phi_{1,0} = \text{tr}(\Sigma_1) = q_1 \|F_0\|_2^2,$$

$$(71b) \quad \Phi_{1,1} = \text{tr}(\Sigma_2), \quad \Phi_{2,0} = \text{tr}(L_1 P_0 L_1^T + \Sigma_3) = q_1^2 \|F_0\|_4^4.$$

В соответствии с последними рассуждениями и ввиду (19)  $a$ -анизотропийная норма системы в ошибках фильтрации, проведенной  $b$ -анизотропийным оценителем, будет выражаться по формуле

$$(72) \quad \|F_b\|_a = \sqrt{\frac{1}{q(a)} \left(1 - \frac{m}{\Phi(a, b)}\right)}.$$

Подставив в (72) найденные выражения при  $\max\{a, b\} \rightarrow 0 + 0$ , получим

$$(73a) \quad \|F_b\|_a = \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} \left( 1 + \frac{q_1 \|F_0\|_4^4}{2 \|F_0\|_2^2} \sqrt{a} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|F_0\|_2^2} \sqrt{b} \right).$$

$$(73b) \quad \cdot \left( 1 - \frac{q_1 \|F_0\|_2^2}{2m} \sqrt{a} \right) + \bar{o}(\max\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\}).$$

Несложно убедиться, что при  $b = 0$  полученная формула совпадает с левой асимптотикой (24) анизотропийной нормы из задачи анализа для системы  $F_0$ . Однако она уступает в точности формуле (41) ввиду того, что здесь рассматривается анизотропийный оценитель  $E'_b$ , уже не являющийся оптимальным. Преимущество полученного результата перед аналогичным из параграфа 3.1 заключается в том, что для вычисления оценителя  $E'_b$  нужно решить достаточно простую систему *линейных* уравнений, в то время как для нахождения оптимального оценителя нужно решить достаточно сложную систему *нелинейных* уравнений.

Важным замечанием является то, что формулой (73) можно пользоваться только при удовлетворении определенного условия на значения  $a$  и  $b$ . Это условие находится из того соображения, что для некоторого  $0 < \varepsilon = \bar{o}(1)$  максимально возможные значения  $a$  и  $b$  должны удовлетворять неравенству

$$(74) \quad \|F_b\|_a - \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} < \varepsilon \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}},$$

обеспечивающего с предъявляемой точностью относительную близость значений анизотропийной нормы и масштабированной  $\mathcal{H}_2$ -нормы. Преобразуя (74), попутно заменяя обе величины  $a$  и  $b$  на  $a_{\max} \doteq \max\{a, b\}$ , получим

$$(75) \quad a_{\max} \leq \varepsilon^2 \left( \sqrt{\frac{Q}{m}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|F_0\|_2^2} \right)^{-2},$$

где правая часть неравенства в соответствии с решаемой задачей предполагается имеющей порядок  $\bar{o}(\text{tr}(P_0))$ . В следующем разделе работы представлен пример решения разбираемой задачи для некоторой линейной дискретной стационарной системы.

#### 4. Пример

Рассмотрим линейную стационарную устойчивую систему

$$(76) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B\omega, \\ y = Cx + D\omega \end{cases}$$

в трех различных конфигурациях, заданных матрицами  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_i & & \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -1.25 & -1.5 \end{pmatrix}, \\ a_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \\ a_3 &= \begin{pmatrix} -5 & -7 & -9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дискретизируем рассматриваемую систему (76) с шагом дискретизации  $\tau = 0.01$ . В итоге получаем линейную стационарную дискретную систему, заданную четверкой  $(A_d, B_d, C_d, D_d)$ , где

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left( \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau \right) B, \quad C_d = C, \quad D_d = D.$$

**Задача 1.** При заданном  $\varepsilon$  определить максимальный порог средней анизотропии, и для найденного порога вычислить приближенный анизотропийный оценщик, который удовлетворяет условию  $\text{tr}(P - P_0) < \varepsilon$ .

Используя представленные в работе результаты решения задач синтеза оценщика и определения максимального порога анизотропии, проведены численные вычисления:

- 1) максимального порога анизотропии  $a_{max}$  по формуле (75) для различных уровней точности  $\varepsilon \in (0; 1)$ ;
- 2) абсолютного отклонения следа ковариационной матрицы ошибки оценивания от ожидаемого при  $a = 0$ :  $\delta_{abs} = \text{tr}(P - P_0)$ ;
- 3) относительного отклонения

$$(77) \quad \delta_{rel} = \frac{\text{tr}(P_1)\sqrt{a}}{\text{tr}(P_0)} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений представлены в виде графиков, изображенных на рис. 1 и рис. 2. Соответствующие отклонения отложены по оси  $Oy$ , а по оси  $Ox$  – значения  $\lg(a_{max})$ .

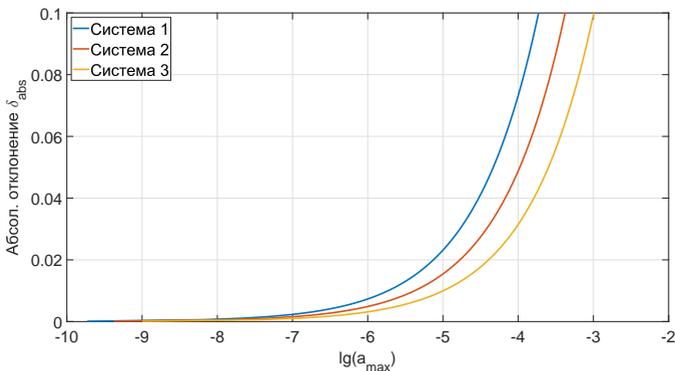


Рис. 1. Абсолютное отклонение  $\delta_{abs}$  следа ковариационной матрицы  $P$  от  $P_0$ .

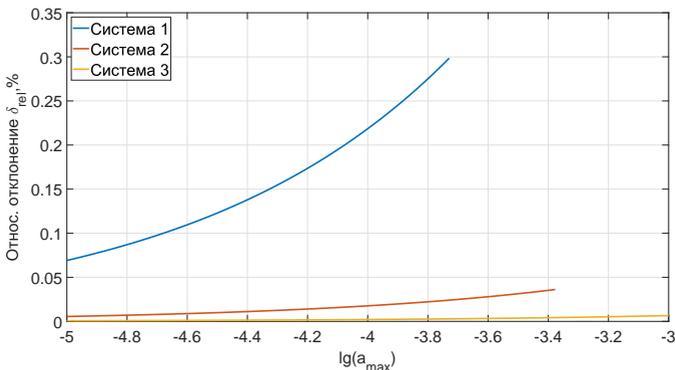


Рис. 2. Относительное отклонение  $\delta_{rel}$  следа ковариационной матрицы  $P$  от  $P_0$ .

В соответствии с графиками можно сделать вывод, что для

линейных стационарных устойчивых систем с большей скоростью динамики (меньшие по модулю собственные числа матрицы  $A$ ) максимальный порог анизотропии при том же допуске  $\varepsilon$  существенно выше, чем для систем с низкой скоростью динамики. Видно, что относительное отклонение  $\delta_{rel} = 0.2\%$  для системы с низкой скоростью динамики (Система 1) достигается при пороге анизотропии  $a_{max} \approx 0.0001$ , а для системы с высокой скоростью динамики (Система 3) то же относительное отклонение достигается при максимальном пороге анизотропии  $a_{max} \gg 1$ . Поскольку большинство реальных технических устойчивых систем обладают низкой скоростью динамики, можно ожидать, что диапазон отклонения статистических свойств входного случайного возмущения от свойств гауссовского белого шума очень узкий, и поэтому практически при любом отклонении внешних возмущений от белого шума эффективней будет использовать методы синтеза оптимального анизотропийного оценителя или, по крайней мере, использовать приближенные формулы его вычисления, полученные в данной работе.

## 5. Заключение

В данной работе рассмотрены задача синтеза анизотропийного оценителя при стремлении параметра анизотропии к нулю и задача определения максимального порога анизотропии, при котором анизотропийный оценитель может быть с заданной точностью аппроксимирован фильтром Калмана. Получены асимптотические представления матриц оценителя и ковариационных матриц ошибки оценивания как функций верхней границы средней анизотропии. Также выведено выражение для вычисления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания и проведено сравнение с ранее полученными результатами по левой асимптотике анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем. По результатам решения задачи об определении максимального порога анизотропии можно сделать вывод о большей эффективности анизотропийного оценителя в большинстве задач оценивания по сравнению с фильтром Кал-

мана при наличии на входе системы случайных возмущений с ненулевой анизотропией, т.е. отличающихся от гауссовского белого шума.

### Литература

1. *Terman F. E.* Electronic and Radio Engineering, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
2. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, Vol. 82, No. 1, 1960, pp. 35-45.
3. *Oppenheim A. V., Schaffer R.W.* Digital Signal Processing, PrenticeHall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
4. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра. //Известия РАН,Техническая кибернетика,1993, №6, С. 200–208.
5. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Filtering. New Jersey: Prentice Hall, 1979.
6. *Hassibi B., Sayed A., Kailath T.* Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Theories. Philadelphia: SIAM, 1999.
7. *Simon D.* Optimal State Estimation: Kalman,  $\mathcal{H}_\infty$ , and Nonlinear Approaches. New Jersey: Wiley, 2006.
8. *Xie L., Soe Y.C., de Souza C.E.* Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1994. vol. 39, pp. 1310–1314.
9. *Theodor Y., Shaked U.* Robust discrete-time minimum-variance filtering. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996. Vol. 44. №2. pp. 181–189.
10. *Kwon O.-K., de Souza C. E., Ryu H.-S.* Robust  $\mathcal{H}_\infty$  FIR filter for discrete-time uncertain systems. Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996. Vol. 4. pp. 4819–4824.

11. *Dey S., Moore J.B.* Risk-sensitive filtering and smoothing via reference probability methods. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997. Vol. 42, №11, pp. 1587–1591.
12. *Semyonov A. V., Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P.* Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA. December 14–16. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
13. *Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P., Semyonov A. V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Dokl. Math. 1995. V.51. P. 388–390.
14. *Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P., Semyonov A. V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congress. 1996. P. 179–184.
15. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem. Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, California, USA, June 30-July 5, 1996, V. H, Paper IFAC-3d-01.6, p. 427–432.
16. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем, Автомат. и телемех., 1999, № 3, 78–87.
17. *Kailath T.* A view of three decades of linear filtering theory. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 20, no. 2, 1974. P. 146-181.
18. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // INT.J.CONTROL, 2001. Vol.74, No.1. pp. 28–42.