

## МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПО ЛЯПУНОВУ НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОНИ АНАЛИЗА<sup>1</sup>

Катаев Д.Е.<sup>2</sup>, Кутяков Е.Ю.<sup>3</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Для современных электроэнергетических систем (ЭЭС) проблема исследования их устойчивости продолжает быть особо актуальной в связи с тенденциями развития структур генерации и потребления. Модальный анализ по Ляпунову совмещает два подхода к оценке устойчивости систем и ЭЭС в частности: модальный анализ и спектральные разложения функций Ляпунова. Существующие исследования, связанные с ним, предполагают наличие линейной модели системы. В то же время, существует большой интерес к методам исследования устойчивости ЭЭС, основанным на измерениях, а не моделях. Это мотивирует изучить возможности модального анализа по Ляпунову на основе измерений. Данная работа представляет пример реализации такого подхода с помощью Прони анализа. Получены выражения для вычисления модальных вкладов по Ляпунову на основе данных, получаемых методом Прони из измерений в нелинейной системе. Представлены результаты вычислительных экспериментов проведенных с помощью созданной программной реализации измерительной модификации модального анализа по Ляпунову. Проведено исследование переходных процессов напряжения в узлах сети тестовой модели IEEE 68. Также представлены результаты сравнения измерительной и модельной модификаций.*

Ключевые слова: электроэнергетическая система, модальный анализ, Прони анализ, уравнение Ляпунова, спектральное разложение.

### 1. Введение

Современные электроэнергетические системы (ЭЭС) — сложнейшие технические объекты, включающие большое число генераторов электроэнергии, объединяемых на совместную работу электрической сетью, роторы которых в нормальном режиме вращаются с синхронной угловой скоростью. Со времени создания первых ЭЭС одной из важнейших проблем было и остается обеспечение их устойчивости. Для современных ЭЭС

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант 19-19-00673П

<sup>2</sup> Катаев Дмитрий Евгеньевич, к.т.н., с.н.с. (dekataev@ipu.ru).

<sup>3</sup> Кутяков Евгений Юрьевич, н.с. (evgeniykutyaakov@gmail.com).

эта проблема особенно актуальна в связи с ростом влияния новых факторов, определяемых нестационарностью генерации возобновляемых источников электроэнергии, меняющейся активностью потребителей, нарастающим использованием устройств на базе силовой электроники в системе, что существенно ухудшает свойства ЭЭС с точки зрения возможностей обеспечения их устойчивости. Ситуацию усугубляет расширение использования в ЭЭС установок распределенной генерации с малыми постоянными инерции роторов либо подключаемых к электрической сети через выпрямительно-инверторные блоки, что существенно снижает инерционность системы и повышает опасность нарушений ее устойчивости. Нарушение устойчивости сложной системы может привести к каскадному развитию аварийного процесса с массовым нарушением питания потребителей и тяжелыми последствиями для системы [1, 8, 13, 17].

При исследовании устойчивости ЭЭС при малых возмущениях используется классический подход математической теории устойчивости динамических систем, важным аспектом которого является определение собственных чисел матрицы линейной или, как в случае ЭЭС, линеаризованной системы. В широком смысле как спектральный анализ, так и модальный анализ подразумевают изучение свойств динамических систем в терминах частот и связанных с ними величин, таких как энергии, собственные значения и векторы [1].

В общем случае существует два базовых подхода: методы, основанные на модели, и методы, основанные на измерениях. Важно помнить, что построение модели большой сложной энергосистемы является нетривиальной задачей. Так, в [12] отмечается, что во время аварии 10 августа 1996 года в американской Западной Электроэнергетической системе (WSCC) данные, получаемые диспетчерским центром от модели, разнились с реальными данными измерений. Измерительные методы, напротив, могут обновлять оценки мод системы, исходя из потоков измерительных данных в реальном времени. Таким образом, они имеют определенные преимущества перед модельными в области мони-

торинга системных мод в реальном времени [2, 16].

К измерительным методам, помимо прочего, относятся различные методы построения спектрограмм и периодограмм, однако в рамках данной работы интересны методы, идентифицирующие систему, ее передаточную функцию или спектр. К таковым, относятся Прони анализ [20], метод Юла-Уокера [14], авторегрессионные алгоритмы [15], искусственные нейронные сети [18], разложение по динамическим модам (dynamic mode decomposition) [6] и алгоритм ERA (Eigensystem Realization Algorithm) [19] и др. [16, 5].

Модальный анализ по Ляпунову совмещает два подхода к оценке устойчивости: модальный анализ и спектральные разложения функций Ляпунова [4, 9]. Он позволяет оценивать колебания в системе в терминах вариации энергии. Также существует его обобщение для билинейных систем [10]. Существующие исследования модального анализа по Ляпунову и предшествующие им исследования методов спектрального разложения грамианов требуют наличия линейной модели исследуемой системы. Однако, на практике, в частности, в электроэнергетике широко распространены методы, основанные не на моделях, а на измерениях. Это и послужило основной мотивацией для выполнения исследования, представляемого в данной статье.

Применение модального анализа по Ляпунову совместно с методами, идентифицирующими целиком систему в пространстве состояний или ее передаточную функцию не требует дополнительных исследований, так как формально работа с ними ничем не отличается от работы с вручную созданной моделью. Для первичного изучения совместного с измерительными методами использования наиболее удачным представляется Прони анализ. Он сравнительно прост в использовании, при этом обладает уникальной структурой результатов, требующей некоторой теоретической доработки. Также он предоставляет всю необходимую информацию для получения наиболее детализированных оценок, которые можно получить с помощью модального анализа по Ляпунову.

## 2. Постановка задачи

Пусть есть линеаризуемая система, представляемая в виде возмущаемой начальными условиями линейной системы с одним выходом:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

Пусть матрица  $A$  диагонализируема и имеет простой спектр  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ :

$$(2) \quad A = U\Lambda V = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix},$$

Добавим условие нормировки:

$$(3) \quad UV = VU = I.$$

Определение 1. Грамианом наблюдаемости системы (1) называется решение  $P$  уравнения Ляпунова [3]

$$(4) \quad A^*P + PA = -C^TC.$$

Определение 2. Субграмианы наблюдаемости  $P_i$  и парные субграмианы наблюдаемости  $P_{ij}$  являются элементами разложения грамиана наблюдаемости  $P$  по спектру  $\Lambda$  и определяются как [9]

$$(5) \quad P_i = \sum_j P_{ij} = - \sum_j \frac{\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}_i^T)^* C^T C \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T}{\lambda_i^* + \lambda_j}, P = \sum_i P_i.$$

Определение 3. Модальный вклад по Ляпунову (МВЛ)  $\hat{E}_i$  определяется как [9]

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty y^2(\tau) d\tau &= \sum_{ij} (\mathbf{x}_0^T P_{ij} \mathbf{x}_0) = \\ &= \sum_i (\mathbf{x}_0^T \sum_j P_{ij} \mathbf{x}_0) = \sum_i \hat{E}_i, \hat{E}_i = \mathbf{x}_0^T P_i \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Определение 4. Парный модальный вклад по Ляпунову  $\hat{E}_{ij}$  [9]:

$$(7) \quad \hat{E}_{ij} = \mathbf{x}_0^T P_{ij} \mathbf{x}_0.$$

Определение 5. Конечные субграмианы наблюдаемости  $P_i(t)$  и парные субграмианы наблюдаемости определяются как  $P_{ij}(t)$  [11]:

$$(8) \quad P_i(t) = \sum_j P_{ij}(t) =$$

$$= - \sum_j \frac{\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}_i^T)^* C^T C \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T}{\lambda_i^* + \lambda_j} (1 - e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t}),$$

$$P(t) = \sum_i P_i(t).$$

Определение 6. Соответствующие МВЛ на конечном интервале времени  $\hat{E}_i(t)$  и  $\hat{E}_{ij}(t)$  [11]:

$$(9) \quad \int_0^t y^2(\tau) d\tau = \sum_i \hat{E}_i(t), \hat{E}_i(t) = \mathbf{x}_0^T P_i(t) \mathbf{x}_0.$$

$$(10) \quad \hat{E}_{ij}(t) = \mathbf{x}_0^T P_{ij}(t) \mathbf{x}_0.$$

Выражения (6-7) и (9-10) задают отношение между МВЛ и выходным сигналом системы  $y$ . Для определения аналогичного отношения, порождаемого методом Прони, рассмотрим его основные свойства ниже.

Классический метод Прони аппроксимирует дискретную последовательность значений суммой комплексных экспоненциальных функций с различными амплитудами, коэффициентами демпфирования, частотами и начальными фазами. Основная особенность классического метода заключается в замене задачи нелинейной аппроксимации решением линейной системы уравнений и нахождением корней многочлена. Помимо классического существуют модификации с решением переопределенной системы уравнений методами наименьших квадратов и полных наименьших квадратов, а также метод пучка матриц, во многом сводящий задачу аппроксимации к поиску собственных чисел. Модификации, в основном, различаются вычислительными свойствами и характером чувствительности к шуму в аппроксимируемом сигнале [7].

Хотя входными данными для Прони анализа является дискретный сигнал, аппроксимация оказывается непрерывной. Таким образом, метод Прони способен идентифицировать спектр непрерывной системы по переходному процессу. Одним из возможных представлений результата работы Прони анализа в идеальном случае является разложение выходного сигнала вида [20]:

$$(11) \quad y(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t},$$

где  $c_i$  - комплексная амплитуда экспоненты, а  $\lambda_i$  - показатель комплексной экспоненты, т.е. элемент идентифицированного спектра системы. Такое представление позволяет сформулировать задачу данной работы. Сформулируем теоретическую часть задачи выполнения модального анализа по Ляпунову на основе измерений с помощью Прони анализа.

**Задача 1.** Выразить модальные вклады по Ляпунову  $\hat{E}_i$ ,  $\hat{E}_{ij}$ ,  $\hat{E}_i(t)$  и  $\hat{E}_{ij}(t)$  через получаемые методом Прони амплитуды  $c_i$  и показатели  $\lambda_i$  аппроксимирующих экспоненциальных функций.

### 3. Решение задачи

Рассмотрим идеализированный случай, когда аппроксимированный методом Прони сигнал полностью совпадает с оригиналом. В соответствии с (11) квадрат выходной реакции системы можно выразить как:

$$(12) \quad y^2(t) = y^*(t)y(t) = \sum_i \sum_j c_i^* c_j e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t},$$

а его интеграл по времени:

$$(13) \quad \int_0^t y^2(\tau) d\tau = - \sum_i \sum_j \frac{1}{\lambda_i^* + \lambda_j} c_i^* c_j (1 - e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t}).$$

Прямая подстановка (13) в (9-10) дает:

$$(14) \quad - \sum_i \sum_j \frac{1}{\lambda_i^* + \lambda_j} c_i^* c_j (1 - e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t}) = \\ = - \sum_i \sum_j \frac{\mathbf{x}_0^T \mathbf{v}_i^* (\mathbf{u}_i^T)^* C^T C \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{x}_0}{\lambda_i^* + \lambda_j} (1 - e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t}),$$

из чего можно заключить, что:

$$(15) \quad c_i = C u_i v_i^T x_0.$$

Это позволяет вывести выражения для модального анализа по Ляпунову на базе Прони анализа:

$$(16) \quad E_{ij} = -\frac{1}{\lambda_i^* + \lambda_j} c_i^* c_j, E_i = \sum_j E_{ij}, \int_0^\infty y^2(\tau) d\tau = \sum_i E_i,$$

$$(17) \quad E_{ij}(t) = -\frac{1}{\lambda_i^* + \lambda_j} c_i^* c_j (1 - e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t}),$$

$$E_i(t) = \sum_j E_{ij}(t), \int_0^t y^2(\tau) d\tau = \sum_i E_i(t).$$

В рассматриваемом случае идеально точной аппроксимации считаем, что:

$$(18) \quad \hat{E}_i = E_i, \hat{E}_{ij} = E_{ij}, \hat{E}_i(t) = E_i(t), \hat{E}_{ij}(t) = E_{ij}(t).$$

## 4. Практическое применение

### 4.1. МЕТОДОЛОГИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Отправной точкой в проведении модального анализа по Ляпунову на основе измерений является получение сигнала, по которому будет проводиться идентификация системы. В данной работе использовались измерения комплексного напряжения в узлах ЭЭС, по которым отдельно определялись амплитуды напряжения, непосредственно использовавшиеся в идентификации. Сигналы снимались с нелинейной компьютерной модели ЭЭС, в следствие чего, как зачастую бывает в реальных системах, получаемые переходные процессы имели характерные нелинейные искажения. Одним таким искажением, наибольшим образом влияющим на результаты идентификации, является различие между точками равновесия до возмущения и после. Это приводит к ошибочной идентификации неустойчивых мод в устойчивой системе. Для коррекции этого искажения мы вычитали из каждого исходного сигнала его линейный тренд. Также на результаты Прони

анализа оказывает существенное влияние соотношения доступных точек к количеству идентифицируемых мод, поэтому требуется повторная дискретизация (resampling).

Прони анализ требует настройки некоторых параметров под решаемую задачу. В данной работе исследуемый сигнал не был зашумлен, поэтому выбран вариант Прони анализа на основе метода наименьших квадратов, как представившийся наименее чувствительным к изменениям настроек в исследованном случае. Временное окно было выбрано длиной в 10 секунд после возмущения. Количество идентифицируемых мод установлено равным 20, что позволяет стабильно идентифицировать 3 наиболее ярко выраженные низкочастотные моды без лишней вычислительной нагрузки и не наполняя получаемые спектры слишком большим количеством избыточных результатов. Исследуемый сигнал после предобработки должен обеспечивать количество точек, не менее чем вдвое превышающее количество идентифицируемых мод. При этом слишком большое количество точек способно нарушить вычислительную устойчивость алгоритма. В данной работе выбран период повторной дискретизации в 0,2 секунды, обеспечивающий новый сигнал из 51 точки. Указанные выше настройки в итоге не позволяли получать высококачественные аппроксимации, но существенные отклонения от них приводили к нарушению вычислительной устойчивости метода Прони при обработке сигналов из тех или иных узлов.

Данное исследование предполагает работу не с одним сигналом, а сразу с набором сигналов, полученных в различных узлах ЭЭС в ответ на одно и то же возмущение. Таким образом, в использованной системе с 68 узлами получается 68 разных спектров, которые в нашей задаче требуется так или иначе рассматривать как один. Для проведения модального анализа мы пользовались эталонным спектром линеаризованной системы. Для выбранной эталонной моды в каждом идентифицированном спектре искалась мода, ближайшая к эталонной среди входящих в ее заданную окрестность. Если таковая не находилась, то МВЛ в данном узле по данной моде считался нулевым.



В качестве тестовой модели использовалась стандартная модель IEEE 68. Она состоит из 16 генераторов, 68 узлов и 86 линий, образующих 5 энергорайонов (см. рис. 1). Модель реализована с помощью пакета Power System Toolbox (PST) для MATLAB.

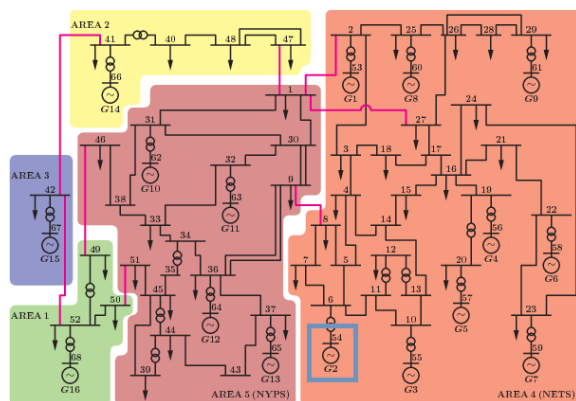


Рис. 1. Диаграмма тестовой модели IEEE 68

Начальным возмущением во всех рассмотренных случаях было возмущение угла ротора генератора №2 (узел 54 на графе) на 0,1 от равновесного значения. Для аналитического решения использовалась линеаризованная модель системы с выходами, показывающими амплитуду напряжения в каждом узле сети. Для решения по измерениям идентифицируемыми сигналами были амплитуды напряжения, снятые в каждом узле сети нелинейной модели.

#### 4.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

После предобработки сигналы из всех узлов подвергаются Прони анализу. Первичным результатом, позволяющим оценить качество работы, является идентифицированная часть спектра системы. Графическое сравнение интересующей в рамках решаемой задачи части эталонного спектра с результатами идентификации представлено на рис. 2. Данные результаты в целом не

выглядят точными, тем не менее, четыре наиболее ярко выраженных слабоустойчивых колебания идентифицируются с приемлемой точностью.

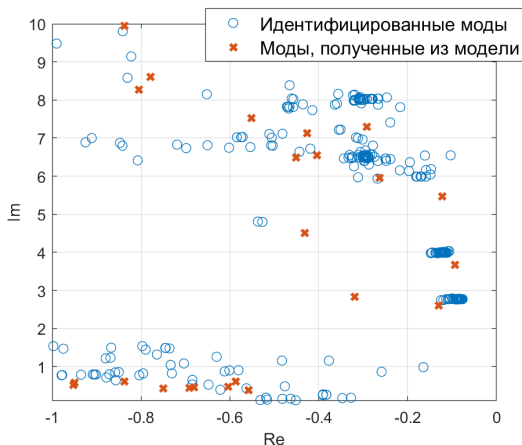


Рис. 2. Слабоустойчивые низкочастотные моды, полученные аналитическим образом из модели и из измерений (во всех узлах сразу)

Пример графического представления результатов приведен на рис. 3. Там изображено нормированное распределение модального вклада по Ляпунову моды 3 по графу сети исследуемой ЭЭС. Оно позволяет оценить географию влияния этого колебания на вариацию амплитуды напряжения в узлах. Представленный граф получен для конкретного входного возмущения, однако, изменение точки входа приводит к достаточно слабым, визуально неразличимым изменениям.

Граф на рис. 3 обладает высокой степенью визуальной схожести со своим аналитически полученным аналогом на рис. 4. Однако, это справедливо для нормированных данных. При рассмотрении абсолютных величин (см. рис. 5) видна существенная разница. Характер отклонений для моды 3 таков, что нормировка способна существенно смягчить их влияние на результаты ана-

10

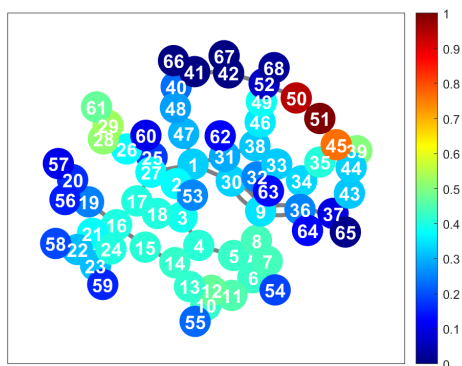


Рис. 3. Нормированное распределение МВЛ  $E_3$  по графу сети  
(по измерениям)

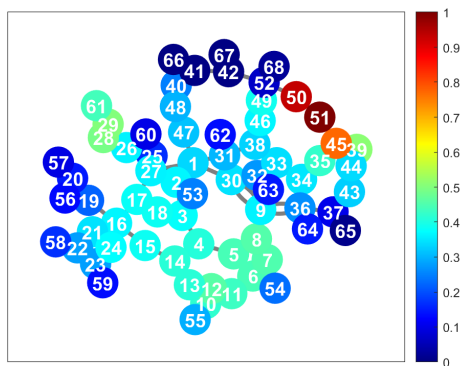


Рис. 4. Нормированное распределение МВЛ  $\hat{E}_3$  по графу сети  
(по модели)

лиза в целом. Так, на рис. 6 графически представлены нормированные ошибки вычисления МВЛ, которые позволяют заключить, что они существенно коррелируют с величинами МВЛ в узлах и не должны качественно искажать результаты. Тем не менее, даже для корректно идентифицированных мод не гарантируется хотя бы такой уровень однородности ошибок.

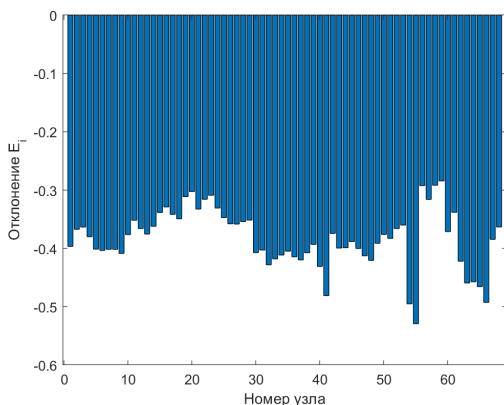


Рис. 5. Отклонение МВЛ  $E_3$  по данным от модельного эталона  $\hat{E}_3$  (в долях от эталона)

При проведении аналогичного вычислительного эксперимента на другом наборе данных, основанном на иных настройках той же модели, получены значительно более точные результаты. Уровень ошибок был достаточно низким, чтобы было возможно распознавание источника возмущения по измерениям путем сравнения с эталонными разложениями МВЛ по графу сети. Однако, при переходе к более реалистичным настройкам, использовавшимся для получения приведенных выше результатов, качество итогового анализа серьезно пострадало.

Как уже показано на рис. 2, метод Прони позволяет адекватно идентифицировать наиболее интересные для анализа колебательные моды. Помимо собственных чисел также идентифицируются соответствующие им комплексные амплитуды, содер-

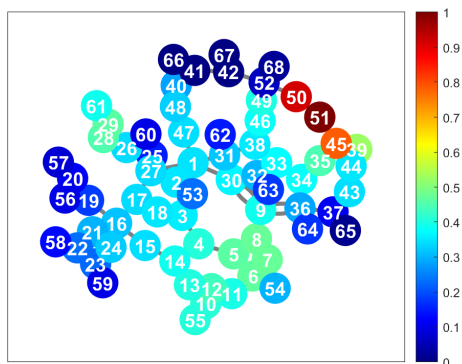


Рис. 6. Нормированное распределение ошибки МВЛ  $E_3$ , полученных по измерениям по графу сети

жащие информацию о начальных действительных амплитудах и начальных фазах колебаний. Логично допустить, что основной источник ранее упомянутых ошибок заключен именно в этом аспекте Прони анализа. В рамках типичного использования метода Прони для проведения модального анализа электроэнергетических систем для идентификации потенциально опасных колебаний ошибки в оценке амплитуд и фаз обычно не имеют значения [20]. Для модального анализа по Ляпунову их корректная оценка, напротив, имеет существенное значение. Это также важно при использовании метода Прони для фильтрации сигналов. Например, хотя авторам работы [7] удалось построить эффективную систему аппроксимации и фильтрации определенного класса сигналов с помощью метода Прони, они также указывают на большое количество довольно разнообразных проблем с вычислительной устойчивостью метода. Последнее наблюдалось и наших вычислительных экспериментов и серьезно ограничивало множество значений параметров, при которых метод Прони был работоспособен.

## **5. Выводы и перспективы**

Рассмотрена задача проведения модального анализа по Ляпунову на основе измерений.

Получены выражения, позволяющие вычислять модальные вклады по Ляпунову (МВЛ) исходя только из доступных после применения метода Прони данных.

Проведены вычислительные эксперименты, реализующие проведение модального анализа по Ляпунову по данным измерений нелинейной модели ЭЭС.

По результатам вычислительных экспериментов можно заключить, что:

- Метод Прони способен устойчиво идентифицировать наиболее выраженную часть спектра системы по переходному процессу с умеренными ошибками. Этого достаточно для классического модального анализа. Однако, ошибки при оценке амплитуд и начальных фаз колебаний оказались менее предсказуемы и оказывают серьезное влияние на результаты модального анализа по Ляпунову;
- Предложенный подход принципиально жизнеспособен, однако, труднопредсказуемый характер влияния ошибок идентификации на результат анализа представляет собой существенное препятствие для практического использования;
- Повышение точности аппроксимации сигнала путем подбора оптимальных значений параметров может серьезно ограничиваться недостаточной вычислительной устойчивостью рассмотренных модификаций метода Прони;
- Целесообразно продолжать исследование, испытывая другие методы идентификации.

### Литература

1. ВОРОПАЙ Н.И., ГОЛУБ И.И., ЕФИМОВ Д.Н., ИСКАКОВ А.Б., ЯДЫКИН И.Б. *Спектральный и модальный методы в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №10. – С. 3–34.
2. КАТАЕВ Д.Е. *Развитие и применение метода субграмианов для анализа устойчивости электроэнергетических систем*: Дис. канд. техн. наук. – Москва, 2018. – 127 с. URL: <https://viewer.rsl.ru/ru/rsl01009824744> (дата обращения 16.03.2023).
3. ЯДЫКИН И.Б. *О свойствах грамианов непрерывных систем управления* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 39-50
4. ЯДЫКИН И.Б., ИСКАКОВ А.Б. *Новые методы оценивания устойчивости и управления в сложных электроэнергетических системах на основе спектрального и структурного анализа* // Труды 13-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2020, Москва). – 2020. – С. 1977-1982.
5. CHAKRABORTY R., JAIN H., SEO G.-S. *A review of active probing-based system identification techniques with applications in power systems* // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. – 2022. – Vol. 140, URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2022.108008> (дата обращения 17.03.2023).
6. DELGADO FERNANDEZ O., TIISTOLA S., GUSRIALDI A. *Real-Time Data-Driven Electromechanical Oscillation Monitoring using Dynamic Mode Decomposition with Sliding Window* // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, – Issue 9, URL: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.028> (дата обращения 17.03.2023).

7. FERNANDEZ RODRIGUEZ A., DE SANTIAGO RODRIGO L., LOPEZ GUILLÉN E., RODRIGUEZ ASCARIZ J.M., MIGUEL JIMENEZ J.M., BOQUETE L. *Coding Prony's method in MATLAB and applying it to biomedical signal filtering* // BMC Bioinformatics. – 2018. – 19:451. URL:<https://doi.org/10.1186/s12859-018-2473-y> (дата обращения 06.03.2022).
8. HATZIARGYRIOU N. ET AL. *Definition and Classification of Power System Stability – Revisited & Extended* // IEEE Transactions on Power Systems. – 2021. – Vol. 36, No.4. pp.3271-3281, URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9286772> (дата обращения 17.03.2022).
9. ISKAKOV A.B., YADYKIN I.B. *Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems* // Automatica. – 2021. – Vol. 132. C. Art. No. 109814.
10. ISKAKOV A.B., YADYKIN I.B. *On Spectral Decomposition of States and Gramians of Bilinear Dynamical Systems* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9(24). URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/24/3288> (дата обращения 17.03.2022).
11. KATAEV D.E., KUTYAKOV E.Y. *Physically meaningful Lyapunov modal contributions in linear systems* // Systems Science & Control Engineering. – 2022. – VOL. 10, NO. 1. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/21642583.2022.2068165> (дата обращения 06.03.2022).
12. KOSTEREV D.N., TAILOR C.W., MITTELSTADT W.A. *Model validation for the August 10, 1996 WSCC system outage* // IEEE Transactions on Power Systems. – 1999. – Vol. 14. No. 3. pp.967-979. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/780909?arnumber=780909> (дата обращения 06.03.2022).
13. MILANO F., DORFLER F., HUG G., HILL D.J., VERBIC G. *Foundations and challenges of low-inertia systems (invited*



- paper*) // Proc. 20 Power Systems Computation Conf. (PSCC). – Manchester, UK, June 11–15, – 2018.
14. PERIC V.S., BAUDETTE M., VANFRETTI L., GJERDE J.O., LOVLUND S. *Implementation and testing of a real-time mode estimation algorithm using ambient PMU data* // 2014 Clemson University Power Systems Conference, Clemson, SC, USA, – 2014. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6808116> (дата обращения 16.03.2023).
  15. PERIC V.S., VANFRETTI L. *Power-System Ambient-Mode Estimation Considering Spectral Load Properties* // IEEE Transactions on Power Systems. – 2014. – Vol. 29. No.3 pp. 1133-1143, URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6683082> (дата обращения 16.03.2023).
  16. PIERRE J.W., TRUDNOWSKI D., DONNELLY M., ZHOU N., TUFFNER F.K., DOSIEK L. *Overview of System Identification for Power Systems from Measured Responses* // 16th IFAC Symposium on System Identification The International Federation of Automatic Control Brussels, Belgium. July 11-13, –2012, pp. 989-1000.
  17. SHAIR J., LI H., HU J., XIE X. *Power system stability issues, classifications and research prospects in the context of high-penetration of renewables and power electronics* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2021. – Vol. 145, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032121003993> (дата обращения 17.03.2023).
  18. TEEUWSEN S.P., ERLICH I., FISCHER A., EL-SHARKAWI M.A. *Assessment of the small signal stability of the European interconnected electric power system using neural networks* // LESCOPE 01. 2001 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering. Conference Proceedings. Theme: Powering Beyond 2001 (Cat. No.01ex490), Halifax, NS, Canada, –2001, pp. 158-161. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/941643> (дата обращения 16.03.2023).
  19. VANFRETTI L., CHOW J.H. *Identification of Dominant*

- Inter-Area Modes in the Eastern Interconnection from PMU data of the FRCC 2008 Disturbance: an Eigensystem Realization Algorithm Illustration* // Contribution to Special Publication of the Task Force on Modal Identification of Electromechanical Modes, –2012. URL: <http://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:482085/FULLTEXT01.pdf> (дата обращения 16.03.2023).
20. ZHOU N., HUANG Z., TUFFNER F., JIN S., LIN J., HAUER M. *Oscillation detection and analysis* // Rep. / CIEE ; Executor: CIEE. – 2010. URL: [https://uc-ciee.org/ciee-old/downloads/ODA\\_Final\\_Report.pdf](https://uc-ciee.org/ciee-old/downloads/ODA_Final_Report.pdf) (дата обращения 06.03.2022).

## MEASUREMENT-BASED LYAPUNOV MODAL ANALYSIS USING PRONY ANALYSIS

**Dmitry Kataev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (dekataev@ipu.ru).

**Evgeniy Kutyaev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (evgeniykutyaev@gmail.com).

*Abstract: Modern power grids are in need of advanced stability analysis tools due to their generation and consumption development trends. Lyapunov modal analysis combines two stability analysis approaches: modal analysis and Lyapunov functions spectral decomposition. Related currently available research requires a linear model of a studied system. Nevertheless, there is a significant interest in data-driven stability analysis methods based on measurements rather than pre-existing models. This motivates the presented study of measurement-based Lyapunov modal analysis feasibility. We derived new formulas for Lyapunov modal contributions calculation that based on data provided by Prony analysis of measurements captured in a nonlinear models or systems. We also conducted case studies using our software implementation of measurement-based Lyapunov modal analysis and node voltage transients measured in IEEE 68 power system model. The paper concludes with comparative analysis between measurement and model-based implementations.*

**Keywords:** power system, modal analysis, Prony analysis, Lyapunov equation, spectral decomposition.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...*

*Поступила в редакцию ...*

*Дата опубликования ...*