МЕТОДЫ ВЫБОРА МЕДИАНЫ РАНЖИРОВАНИЯ И ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Корнеенко В.П.[1]
(ФГБУН *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль расстояния и медианы ранжирования, известной как медиана Кемени. Однако для нахождения медианы ранжирований, представленных матрицами бинарных отношений по матричному критерию расстояния, не существует оптимального метода решения. Обоснованность оптимального решения задачи выбора медианы в пространстве ранговой шкалы измерения связана с тем, что между ранжированиями, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов и ранжированиями в ранговой шкале существует взаимнооднозначное соответствие. После нахождения медианы ранжирований важной задачей становится проверка согласованности мнений группы экспертов. Существующие статистические методы и методы ранговой корреляции согласованность мнений экспертов, если под которой понимать меру близости между экспертными оценками объектов, не измеряют. В статье на конкретных примерах показано, что коэффициент конкордации Кендэла, до сих встречающийся в работах некоторых авторов, не позволяет реально оценивать согласованность ранжирований экспертов, что может приводить к ошибочным управленческим решениям. Предлагается метод оценки мнений как пары экспертов так и группы экспертов, в виде усреднённой согласованности экспертов относительно медианы ранжирований, представленной в ранговой шкале.

Ключевые слова: ранговая шкала, связанные (рациональные) ранги, медиана ранжирования объектов, матричный критерий, согласованность мнений экспертов.

1. Введение

Большое значение для практики имеет качественная оценка объектов (вариантов решений), которую проводят руководители в условиях дефицита времени или невозможности проведения

---

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (*vkorn@ipu.ru*).

количественных измерений. В связи с этим экспертные оценки – один из эффективных инструментов разработки и принятия управленческих решений [1, 3, 21, 24, 30, 32, 33].

При многокритериальной оценке эффективности объектов в конкретной предметной области, оцениваемых экспертами, возникает задача выбора группового ранжирования объектов, представленных точечными или интервальными оценками [1, 5, 6, 20, 36, 37]. В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль медианы ранжирования [16, 20–22, 24].

В классической постановке задача построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени, по матричному критерию близости ранжирований объектов, представленными матрицами бинарных отношений относится к классу *NP* полных комбинаторных задач [14]. В настоящее время для данного класса задач с матричным критерием не существует оптимального метода решения.

В связи с этим были предложены эвристические методы [16, 20, 22, 25]. По мнению автора работы [23] поскольку «…ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических», то в [24] предлагается «метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится одновременно во всех исходных ранжировках». Однако процедура построения «кластеризованной ранжировки по медианам рангов» не позволяет количественно определить степень согласованности мнений экспертов.

После того, когда решена проблема построения медианы ранжирования объектов, возникает задача оценки степени согласованности мнений экспертов при решении различных прикладных задач [2, 9, 10, 18, 26, 27, 34].

Существующие статистические методы [5] и методы ранговой корреляции М. Кендэла [12] согласованность мнений экспертов, если под которой понимать меру близости между экспертными ранжированиями объектов, не измеряют.

Несмотря на то, что коэффициент конкордации (согласованности) Кендэла не позволяет точно оценивать согласованность ранжирований экспертов в ранговой шкале, он до сих пор активно применяется для оценки согласованности мнений экспертов при решении прикладных задач [27, 18].

Так например, в работе [18, с. 57] не удалось в службе медицины катастроф принять правильное управленческое решение так как "… к сожалению, коэффициент конкордации не позволяет ответить на вопрос, какие из данных групп гемостатических средств можно исключить, а какие оставить".

В данной статье предлагается оптимизационный метод построения медианы ранжирования и новый подход оценивания степени согласованности мнений экспертов для объектов, измеренных в порядковой (ранговой, балльной) шкале и представленных в виде элементов (векторов) метрического пространства.

2. Преобразования экспертных оценок объектов в градации ранговой шкалы метрического пространства

Рассмотрим преобразования экспертных оценок в произвольной порядковой или количественной шкале измерения в градации ранговой шкалы метрического пространства.

Пусть

$A = \{a_k | k = \overline{1,n}\}$ – множество объектов, n – число объектов;

$Э = \{Э_i | i = \overline{1,m}\}$ – множество экспертов, оценивающие объекты в произвольной шкале измерения, m – число критериев (экспертов).

$X_i = \left\{x_i^{(k)} | k = \overline{1,n}\right\}$ – множество результатов экспертного оценивания a_k объектов i-м экспертом.

Тогда результаты экспертного оценивания объектов можно представить в виде матрицы $M = \left(x_i^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ размерности $n \times m$, где $x_i^{(k)}$ – результат экспертного оценивания объекта a_k по $Э_i$ экспертом в произвольной порядковой балльной или количественной шкале измерения.

Рассмотрим ранжирование объектов, представляющие строгие отношения предпочтения. В результате сравнения всех объектов составляется упорядоченная последовательность

(1) $P_i\colon a_{i_1} \succ a_{i_2} \succ \cdots \succ a_{i_k} \succ \cdots \succ a_{i_n}$,

где объект с первым номером является наиболее предпочтительным из всех объектов, объект со вторым номером менее предпочтителен первого объекта, но предпочтительнее всех остальных объектов и т. д.

Свойствам отношения строгого порядка удовлетворяет числовая система шкалы измерения, элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением строгого неравенства > (<) [28]. Это означает, что упорядочению объектов P_i (1) экспертами $Э_i, i = \overline{1, m}$, соответствует упорядочение чисел, в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наибольшее число $x_i^{(1)}$:

(2) $x_i^{(1)} > x_i^{(2)} > \cdots > x_i^{(n)}$ (убывающая последовательность).

Возможна и обратная последовательность

(3) $x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \cdots < x_i^{(n)}$ (возрастающая последовательность), в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наименьшее число $x_i^{(1)}$, характеризующее место или рейтинг объекта, и, по мере возрастания предпочтения в (3), объектам приписываются большие числа.

Соответствие между упорядоченной последовательности (1) и последовательностью (2) или (1) и (3), т.е. их изоморфизм или гомоморфизм можно осуществить, выбирая любые числовые представления.

В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательностей (2) и (3) в виде натуральных чисел:

(4) $x_i^{(1)} = n,\ x_i^{(2)} = n - 1, \dots, x_i^{(n)}$=1

либо

(5) $x_i^{(1)} = 1,\ x_i^{(2)} = 2, \dots, x_i^{(n)} = n,$

т.е. используются числовые последовательность типа (4) и (5).

При прямом ранжировании (2) числа $x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}$, удовлетворяющие соотношению (4) называются рангами, а при обратном ранжировании (3) и удовлетворяющие соотношению (5) называются местами и обычно обозначаются в виде:

$$r_i^{(1)},\ r_i^{(2)}, \dots, r_i^{(n)}.$$

В этом случае ранжирование n объектов $a_k \in A$ экспертом $Э_j$ можно представить в виде векторной оценки

(6) $\vec{r}_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \dots, r_i^{(k)}, \dots, r_i^{(n)}).$

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов.

Для эквивалентных объектов удобно, с точки зрения технологии последующей обработки экспертных оценок, назначать одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют связанными рангами [12].

Пример 1. Пусть, кроме отношений строгого порядка, между 10 объектами имеется отношение эквивалентности. Упорядочение объектов в этом случае может иметь следующий вид:

$$P_i: a_1 \succ a_2 \succ \{a_3 \approx a_4 \approx a_5\} \succ a_6 \succ \{a_7 \approx a_8\} \succ \{a_9 \approx a_{10}\}.$$

В этом упорядочении эквивалентны между собой объекты $a_3,\ a_4,\ a_5$, также $a_7,\ a_8$ и $a_9,\ a_{10}$, а само упорядочение образует нестрогое линейное упорядочение. Связанные ранги объектов $a_3,\ a_4,\ a_5$ будут одинаковыми и равными:

$$r_i^{(3)} = r_i^{(4)} = r_i^{(5)} = \frac{3+4+5}{3} = 4.$$

Связанные ранги объектов $a_7,\ a_8$ будут одинаковыми и равными их среднему арифметическому:

$$r_i^{(7)} = r_i^{(8)} = \frac{7+8}{2} = 7{,}5,$$

ранги $a_9,\ a_{10}$ также будут одинаковыми и равными их среднему арифметическому:

$$r_i^{(9)} = r_i^{(10)} = \frac{9+10}{2} = 9{,}5.$$

Как следует из этого примера, связанные ранги могут оказаться дробными, т.е. рациональными числами. Удобство использования рангов, в том числе, связанных рангов заключается в том, что сумма рангов n объектов равна сумме натуральных чисел от единицы до n:

$$(7)\quad \sum_k^n r_i^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n,\ i = \overline{1,m}.$$

При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму.

Определение 1. Будем называть ранговую шкалу канонической, если в качестве градаций при строгом ранжировании n объектов используются натуральные числа от 1 до n. В зависимости от направления возрастания предпочтения (прямого или обратного) каноническую ранговую шкалу будем называть соответственно прямой или обратной канонической ранговой шкалой.

При нестрогом ранжировании со связанными рангами натуральные числа заменяются средними арифметическими рангов эквивалентных объектов. С учётом как строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, ранжирование объектов будем представлять в общем виде:

(8) $P_i: a_{i_1} \succcurlyeq a_{i_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{i_k} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{i_n}$,

где $a_{i_v} \succcurlyeq a_{i_s} \Longrightarrow (a_{i_v} \succ a_{i_s}) \vee (a_{i_v} \approx a_{i_s}) \; \forall \, v, s \in \overline{1, n}$.

Для порядкового типа шкал измерения в качестве допустимых преобразований принято множество монотонно возрастающих преобразований [28]. Таким преобразованием, например, является $\varphi(x) = x^2$, которое линейные шкальные балльные оценки объектов переводит в нелинейные. При этом упорядочение между объектами хотя и сохраняется, но сравнение объектов после преобразования в шкале разности теряет смысл, т.е. такие шкалы не являются эквивалентными.

В связи с этим переход от порядковой шкалы к количественной введём с помощью операции метризации расстояния между ранговыми оценками объектов, включая и оценки со связанными рангами. Рассмотрим векторную оценку $\vec{r}_i$ (6) ранжирования P_i (8) объектов как точку в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что множество $R = \{\vec{r}_i \in \mathbb{R}^n | i = \overline{1,\ m}\}$ векторов $\vec{r}_i$ (6) из $\mathbb{R}^n$ с расстоянием в виде евклидовой l_2-нормы:

$$\rho_{l_2}(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_t^{(k)})^2}.$$

образует n-мерное евклидово пространство (R, ρ_{l_2}).

Расстояние между ранжированиями P_i и P_t можно представить как расстояния между векторными оценками в виде l_1-нормы:

(9) $\rho_{l_1}(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right|$,

в котором отображение $\rho_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ также задаёт метрику пространства (R, ρ_{l_1}).

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиями объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства, а именно: аксиомам тождества, симметрии и треугольника [13].

3. Задача выбора медианы ранжирования по критерию близости матриц бинарных отношений

При анализе экспертных данных возникает задача проверки согласованности мнений экспертов, которой предшествует решение задачи получения коллективного (результирующего) мнения экспертов. Для такой проверки согласованности вначале целесообразно использовать методы построения «коллективного мнения» [34].

Одним из первоначальных методов построения результирующего ранжирования (медианы) n объектов по предпочтительности m экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [35] и изданная на русском языке в 1972 г. [11].

В работе авторов упорядочения объектов представлены матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов.

Ранжирование P_i (8) экспертами представляются в виде квадратных матриц бинарных отношений частичного и линейного порядка:

(10) $M(P_i) = \left[p_{ks}^i\right],\ a_k, a_s \in A\ \ \forall\, k, s = \overline{1, n}$,

где $p_{ks}^j = \begin{cases} 1, \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_s; \\ -1, \text{если объект } a_s \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, \text{если объекты } a_s \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{равноценны.} \end{cases}$

Расстояние между произвольными ранжированиями P_i и P_t можно рассчитывать по матричным l_1-нормой и l_2-нормой по формулам [31]]:

(11) $d_{l_1}(P_i, P_t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}^i - p_{ks}^t\right|$;

$$d_{l_2}(P_i, P_v) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(p_{ks}^i - p_{ks}^t)^2}.$$

В работе [11] даётся следующее определение медианы ранжирований.

Определение 2. Медианой данного множества упорядочений $P_1, \dots, P_m$ (не обязательно различных) называется такое упорядочение P_*, для которой сумма расстояний

(12) $\mathcal{D}_1(P_i, P_*) = \sum_{i=1}^{m} d(P_i, P_*)$

минимальна, а средним значением – упорядочение P_*, для которой минимальна величина

(13) $\mathcal{D}_2(P_i, P_*) = \sum_{i=1}^{m} d^2(P_i, P_*)$.

Расстояние (12), часто используемое как «расстояние Кемени», между произвольными ранжированиями P_iи P_t, представленные в матричном виде $M(P_i)$, можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю по формуле

$$d(P_i, P_t) = \sum_{k<q} \left| p_{ks}^{i} - p_{ks}^{t} \right|.$$

По сути задача построения медианы Кемени по матричным критериям (12) или (13) относится к классу комбинаторных задач. Действительно каждому произвольному ранжированию

$$P_\sigma\colon a_{\sigma_1} \succcurlyeq a_{\sigma_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{\sigma_n}$$

соответствует матрица бинарных отношений $M(P_\sigma) = [p_{ks}^{\sigma}]$, $k, s = \overline{1, n}$, объектов, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ – перестановка на множестве $\{1,2, \dots, n\}$ номеров объектов $a_k \in A$.

Тогда исходная задача выбора результирующего ранжирования $P_*(P_1, \dots, P_m)$ относительно мнений m экспертов сводится к поиску перестановки $\sigma^* = (i_1^*, \dots, i_n^*)$ объектов ранжирования, минимизирующая сумму расстояний до исходных ранжирований P_i, $i = \overline{1, m}$:

(14) $P_*(P_1, \dots, P_m) = \arg \min\limits_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{i=1}^{m} d(P_i, P_\sigma)$,

где $d(P_i, P_\sigma) = \sum_{k<s} \left| p_{ks}^{i} - p_{ks}^{\sigma} \right|$.

Формально постановка задачи (14) построения медианы ранжирования относится к классу комбинаторных *NP*-полных задач [14] при полном переборе множество ранжирований объектов состоит из *n*! (*n*-факториал) всевозможных перестановок только строгих, не считая нестрогих, которых тоже не менее *n*!.

Поэтому в [25] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающей с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика», т.е. по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным (см. рис. 2 на стр. 30 [11]).

Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является. Представлению ранжирования (мнения эксперта) в виде матрицы бинарных отношений на множестве объектов соответствует связный граф, в котором вершинами служат объекты, а направления дуг задают порядок предпочтения.

4. Решение задачи выбора медианы Кемени по критерию близости ранжирований в ранговой шкале измерения

4.1. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАНЖИРОВАНИЙ В ГРАДАЦИЯХ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ С МАТРИЦАМИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ПАР ОБЪЕКТОВ

Понятно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов $a_s,\ a_k \in A$ ранжирования P_i (8). Однако это легко сделать, если установить взаимосвязь между ранговыми оценками объектов ранжирований и элементами матрицы $M(P_i)$ (10) бинарных отношений.

Теорема 1. *Между ранговыми оценками объектов* a_k *ранжирований* P_i *и элементами* p^i_{ks}, $i = \overline{1,m}$, *матрицы* $M(P_i)$ (10) *бинарных отношений существует биекция, которую можно представить в виде соотношений*:

а) *для объектов с обратным порядком предпочтения*

(15) $r^{(k)}_{i\nearrow} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{s=1,k\neq s}^{n}\left(1 - p^i_{ks}\right);$

б) *для объектов с прямым порядком предпочтения*

(16) $r^{(k)}_{i\searrow} = n - \frac{1}{2}\sum_{s=1,k\neq s}^{n}\left(1 - p^i_{ks}\right).$

где $\nearrow$ *– обозначение возрастающей последовательности при обратном порядке предпочтения объектов*;

$\searrow$ *– обозначение убывающей последовательности при прямом порядке предпочтения объектов.*

Доказательство. Вначале, не умоляя общности, будем считать, что объекты строго ранжированы P_i (1) с прямым порядком предпочтения (наиболее предпочтительному объекту приписы-вается наибольшее число).

Тогда этому ранжированию будет соответствовать векторная оценка в ранговой шкале:

(17) $\vec{r}_{i\searrow} = (n, n-1, \ldots, n-k, \ldots, 1)$,

которой можно поставить в однозначное соответствие квадратную матрицу бинарных отношений линейного порядка:

(18) $M(P_i) = \left[p_{ks}^i\right],\ k, s = \overline{1, n}$,

где $p_{ks}^i = 1$, если $k < s$ $(a_k \succ a_s)$;

$p_{ks}^i = -1$, если $k > s$ $(a_s \succ a_k)$.

Обратно от элементов матрицы $M(P_i)$ (18) перейдём к рангам $\vec{r}_{i\searrow}$ (17) ранжирования P_i (1).

Так как

$p_{ks}^i = -1\ \forall\, k > s = 1, 2, \ldots, k-1\ (a_s \succ a_k) \Rightarrow 1 - p_{ks}^i = 2$;

$p_{ks}^i = +1\ \forall\, k < s = k+1, k+2, \ldots, n\ (a_k \succ a_s) \Rightarrow 1 - p_{ks}^i = 0$;

$p_{ks}^i = 0$, если $k = s$, то для $r_{i\searrow}^{(k)}$ (17) имеем

$$r_{i\searrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2}\left[\sum_{s=1}^{k-1}\left(1 - p_{ks}^i\right) + \sum_{s=k+1}^{n}\left(1 - p_{ks}^i\right)\right] =$$

$$= n - \tfrac{1}{2}[2(k-1) + 0] = n - k + 1.$$

Откуда для $k = \overline{1, n}$ получим компоненты вектора $\vec{r}_{i\searrow}$ (17). Легко убедиться, что для равноважных объектов, для которых $p_{ks}^i = 0, k \neq s,$ по формуле $r_{i\searrow}^{(k)}$ (16) получим связанные ранги.

Пусть, например, объекты a_1 и a_2 равноважны: $a_1 \approx a_2$. Убедимся, что для них связанный ран равен $\frac{n+(n-1)}{2} = n - \frac{1}{2}$.

Так как $p_{12}^i = 0$; $p_{1s}^i = 1\ \forall\, 3 \leq s < n$, то для a_1 имеем:

$$r_{i\searrow}^{(1)} = n - \frac{1}{2}\left[\left(1 - p_{12}^i\right) + \sum_{S=3}^{n}\left(1 - p_{1s}^i\right)\right] = n - \frac{1}{2}.$$

Поскольку $p_{21}^i = 0$; $p_{2s}^i = 1\ \forall\, s \in [3, n]$, то для a_2 имеем:

$$r_{j\searrow}^{(2)} = n - \frac{1}{2}\left[\left(1 - p_{21}^i\right) + \sum_{s=3}^{n}\left(1 - p_{2s}^i\right)\right] = n - \frac{1}{2}$$

Аналогично, легко вычисляется связанный ранг для любой группы равноважных объектов. Теорема доказана. ■

Пример 2. Рассмотрим ранжирования четырёх объектов $P_i\colon \{a_1 \approx a_2\} \succ a_3 \succ a_4$, для которых матрица бинарного нестрогого отношения примет вид:

$$M(P_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги для объектов, например, с прямым порядком предпочтения, по элементам матрицы $M(P_i)$:

$$r_{i\searrow}^{(1)} = 4 - \frac{1}{2}[(1-0) + (1-1) + (1-1)] = 3{,}5;$$

$$r_{i\searrow}^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}[(1-0) + (1-1) + (1-1)] = 3{,}5;$$

$$r_{i\searrow}^{(3)} = 4 - \frac{1}{2}[(1+1) + (1+1) + (1-0)] = 2;$$

$$r_{i\searrow}^{(4)} = 4 - \frac{1}{2}[(1+1) + (1+1) + (1+1)] = 1;$$

Откуда $\vec{r}_{i\searrow} = (3{,}5; 3{,}5; 2; 1)$, а для обратного порядка предпочтения вектор ранговых оценок имеет вид:

$$\vec{r}_{j\nearrow} = (1{,}5; 1{,}5; 3; 4).$$

4.2. МЕТОД ВЫБОРА МЕДИАНЫ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА БЛИЗОСТИ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Задача нахождения медианы (результирующего) ранжирования $P_*(P_1, \dots, P_m)$ в ранговой шкале заключается в нахождении переменных $\vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$, доставляющих при этом минимальное значение квадрату евклидовой нормы:

(19) $Q(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m) = \sum_{j=1}^{m} \rho(\vec{r}_i, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - q_k)^2,$

где $\rho(\vec{r}_i, \vec{q}) = \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - q_k)^2$.

Таким образом, математическая постановка задачи сводится к минимизации критерия (19) по переменным q_k, $k = \overline{1, n}$:

(20) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - q_k)^2 \to \min\limits_{(q_1, \dots, q_n)}$

при условии:

(21) $\sum_{k=1}^{n} q_k = \frac{1+n}{2} \cdot n.$

Условие (21) означает, что поскольку для оценок объектов в шкале со связанными рангами выполняется соотношение (7), то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов медианы ранжирования по переменным q_k. В обосновании построения результирующего ранжирования объектов по критерию минимума расстояния в ранговой шкале лежит следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ранжирования* P_i, $i = \overline{1,m}$, *объектов экспертами представлены в виде оценок* $r_i^{(k)} = r_i(a_k)$, $k = \overline{1,n}$, *с прямым (обратным) порядком предпочтения объектов в ранговой шкале с учётом связанных рангов.*

Тогда и только тогда оптимальным решением задачи (20)–(21) *по переменным* q_k, $k = \overline{1,n}$, *является вектор*

(22) $\vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_k^*, \dots, q_n^*)$,

компонентами которого являются среднеарифметические рациональные числа рангов объектов по числу т ранжирований:

(23) $q_k^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)}, \forall\, k = \overline{1,n}$,

и результирующее ранжирование:

$$P_*\colon a_{k_1} \succcurlyeq a_{k_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{k_n},$$

объектам которого поставим в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) *при прямом направлении* (*строгом отношении*) *предпочтения объектов*

$$q_{k_1}^* > q_{k_2}^* > \cdots > q_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = n;\, r_{k_2}^* = n-1; \dots; r_{k_n}^* = 1;$$

б) *при обратном направлении* (*строгом отношении*) *предпочтения объектов*:

$$q_{k_1}^* < q_{k_2}^* < \cdots < q_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = 1;\; r_{k_2}^* = 2; \dots;\; r_{k_n}^* = n;$$

При равенстве шкальных оценок $q_{k+1}^* = q_{k+2}^* = \cdots = q_{k+t}^*$ *объектам, занимающим места с* $(k+1)$*-го по* $(k+t)$*-е, присвоим связанный ранг равный:*

$$r_{k+i}^* = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(k+i) = k + \frac{1+t}{2}, \forall i = \overline{1,t}.$$

Доказательство теоремы базируется на построении функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования (20)–(21) и выполнении необходимых и достаточных условиях существования минимума функции Лагранжа.

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^* = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)}\right) = \frac{1+n}{2}\cdot n,$$

то на ряду с понятием связанных рангов [12] приходим к новому понятию дробных (рациональных) рангов $\vec{q}_*$ (23).

Сравним расстояния между ранжированиями, представленными в ранговой шкале, и матрицами бинарных отношений, на следующем примере.

Пример 3. Пусть ранжирования объектов экспертами представлены в виде (здесь исходные данные взяты из примера на стр. 75 работы [16]):

$P_1: a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$, $P_2: a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3$,
$P_3: a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_5$, $P_4: a_1 \succ a_5 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4$,
$P_5: a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2$,

которым поставим в соответствие ранги с прямым порядком предпочтения объектов (см. столб. 2 – 6 табл. 1).

Таблица 1. Исходные данные в ранговой шкале

a_k	Ранги ранжирований объектов							Медиана	
	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	$\vec{r}_3$	$\vec{r}_4$	$\vec{r}_5$	$\vec{q}_*$	$\vec{r}_*$	P_*	$Q_*\ R_*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	5	3	3	5	3	3,8	5	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \approx a_3 \\ a_4 \approx a_5 \end{pmatrix}$
a_2	4	5	4	2	1	3,2	3,5		
a_3	3	1	5	3	4	3,2	3,5		
a_4	2	2	2	1	5	2,4	1,5		
a_5	1	4	1	4	2	2,4	1,5		
Σ	15	15	15	15	15	15	15		

Медиана ранжирования (см. столб. 9 табл. 1), полученная по мажоритарному правилу имеет вид [16]:

(24) $P_*: a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$.

Решение оптимизационной задачи представим в дробных и связанных рангах в виде векторных оценках:

$\vec{q}_* = (3{,}8; 3{,}2; 3{,}2; 2{,}4; 2{,}4)$; $\vec{r}_* = (5; 3{,}5; 3{,}5; 1{,}5; 1{,}5)$,

которым соответствует одно и тоже ранжирование (см. столб. 10 табл. 1):

$Q_*: a_1 \succ \{a_2 \approx a_3\} \succ \{a_4 \approx a_5\}$ и $R_*: a_1 \succ \{a_2 \approx a_3\} \succ \{a_4 \approx a_5\}$

Сравним результаты формирования медианы Кемени по мажоритарному правилу и как решение оптимизационной задачи.

Рассчитаем меру близости результирующих ранжирований до исходных ранжирований $P=\{P_i\}, i=1\div 5,$ в градациях матриц бинарных отношений $\{-1,0,+1\}$ и в градациях ранговой шкалы.

По формулам расстояния:

(25) $\mathcal{D}_1(P_i,Y_*)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}d(P_i,Y_*)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k<s}\left|p_{ks}^{i}-p_{ks}^{*}\right|;$

(26) $\mathcal{D}_2(P_i,Y_*)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}d^2(P_i,Y_*)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k<s}\left(p_{ks}^{i}-p_{ks}^{*}\right)^2;$

(27) $\mathcal{R}_1(\vec{r}_i,\Delta_*)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\rho(\vec{r}_i,\Delta_*)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left|r_i^{(k)}-r_k^{*}\right|;$

(28) $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\Delta_*)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\rho^2(\vec{r}_i,\Delta_*)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(r_i^{(k)}-r_k^{*})^2,$

где $Y_*\in\{Q_*,R_*,P_*\}$ – ранжирования;

$\Delta_*\in\{\vec{q}_*,\vec{r}_*,\vec{p}_*\}$ – векторные оценки соответствующие ранжированиям Q_*,R_*,P_*.

Результаты сравнений ранжирований в ранговой шкале и градаций матрицы бинарных отношений представлены в табл. 2.

Таблица 2. Оценки ранжирований различными методами

Медиана	Ранговый критерий		Матричный критерий	
Q_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i,\vec{q}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\vec{q}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i,Q_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i,Q_*)$
	5,68	8,56	7,2	12,4
R_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i,\vec{r}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\vec{r}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i,R_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i,R_*)$
	6,0	11,8	7,2	12,4
P_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i,\vec{p}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\vec{p}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i,P_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i,P_*)$
	6,0	12,8	6,8	13,6

Из таблицы 2 видно, что медиана Кемени, вычисленная в ранговой шкале не совпадает с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу: P_* (24)

Однако при этом медиана ранжирования Q_*, как оптимальное решение задачи (20)–(21), по сравнению с мажоритарной медианой P_* имеет наименьшую среднюю сумму расстояний по ранговым критериям $\mathcal{R}_1(\vec{r}_i,\vec{q}_*)$, $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\vec{q}_*)$, $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i,\vec{r}_*)$ и матричным критериям $\mathcal{D}_2(P_i,Q_*),\mathcal{D}_2(P_i,R_*)$.

Возникает вопрос о связи расстояний между ранжированиями, представленными в ранговой шкале, и матрицами бинарных отношений для произвольных ранжирований.

Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* P_i, $i = \overline{1, m}$, *– упорядочения* n *объектов* $a_k \in A$ *группой из* m *экспертов, представленные в виде векторных оценок* $\vec{r}_i$ (6) *в ранговой шкале измерения и матрицами бинарных отношений*.

Тогда расстояния $\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t)$ (27) и $\mathcal{D}_1(P_i, P_t)$ (25), $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_t)$ (28) и $\mathcal{D}_2(P_i, P_t)$ (26) *между парой произвольных ранжирований* P_i *и* P_t, *удовлетворяют неравенствам*:

$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t) \leq \mathcal{D}_1(P_i, P_t)$ и $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_*) \leq \mathcal{D}_2(P_i, P_t)$.

Доказательство теоремы см. в [15]

5. Метод оценки суждений пары экспертов в ранговой шкале

5.1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Для оценки степени согласованности ранжирований экспертов в ранговой шкале М.Д. Кендэлом в работе 1948 года «Ранговые корреляции», изданная в нашей стране только в 1970 году, были предложены формулы, по которым можно было определить «степень соответствия между этими двумя последовательностями порядковых оценок, или, другими словами, измерить тесноту ранговой корреляции» [12, с. 10].

Так для пары строгих ранжирований предлагается использовать коэффициент Спирмэна в ранговой шкале в виде следующего соотношения:

(29) $\rho = 1 - \frac{6S(d^2)}{n^3 - n} = 1 - \frac{6\sum_{k=1}^{n} d_k^2}{n^3 - n}$,

где $d_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(r_i^{(k)} - r_t^{(k)}\right)^2$.

Для согласованности группы из m экспертов в работе М. Кендэла представлен коэффициент конкордации, который можно определить как нормированную дисперсию, для строгого ранжированных объектов в ранговой шкале в виде формулы:

(30) $W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$,

где $S = \sum_{k=1}^{n}(S_k - \bar{S})^2$ – квадраты отклонений $S_k = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)}$ суммы рангов a_k объекта от $\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$ среднего значения n объектов

В случае ранжирований со связанными рангами коэффициент конкордации можно выразить следующим образом [12, с. 106]:

(31) $W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)-m\sum_{j=1}^{m} T_i}, T_i = \sum_{k=1}^{H_i}(h_k^3 - h_k),$

где H_j – число групп равных рангов в P_i ранжировке; h_k – число в последовательности равных рангов в H_k группе связанных рангов при ранжировании $Э_i$ экспертом.

В работе [34, с. 79] предложено «применять в качестве коэффициентов согласованности статистики, эквивалентные средним коэффициентам ранговой корреляции». В качестве другого подхода предлагается выделять в ранжировках упорядоченные кластеры объектов [6]. Однако при этом отсутствует количественная оценка согласованности экспертов.

В прикладных статьях до сих пор в качестве количественной оценки используются коэффициенты ранговой корреляции [2, 4, 8, 17, 27, 29].

Покажем, что коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна, подробно рассмотренный в работе Кендэла М. [12], не определяет степень согласованности между двумя ранжированиями.

Так на стр. 9-16 работы Кендэла М. [12] приводится пример строгого ранжирования группы из 10 учеников в соответствии с их способностями по математике и музыки в ранговой шкале.

Таблица 3. Ранги учеников по математике и музыке

Ученики	*I*	*F*	*C*	*B*	*J*	*E*	*A*	*H*	*G*	*D*	*Сумма*
Математика)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
Музыка	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10	55

Вычисленный коэффициент К.Спирмена по формуле (29) оказался равен: $\rho = -103$. Возникает вопрос, что означает отрицательное значение коэффициента К. Спирмэна? Покажем, что коэффициент ρ (29) это угловой коэффициент α при переменной *x* уравнения линейной регрессионной модели [19]:

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$$

где α, β – параметры модели; ε – случайная компонента.

Вычисление параметров α, β сводится к аппроксимации набора данных $\{x_k, y_k\}$, $k = \overline{1,n}$, линейной функцией

$f(x) = \alpha x + \beta$,
минимизирующей функционал:

$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n}[y_k - (\alpha x_k + \beta)]^2$.

Откуда оценки параметров линейной модели:

(32) $\widehat{\alpha} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}$; $\widehat{\beta} = \bar{y} - \widehat{\alpha}\bar{x}$,

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Рассчитаем по данным табл. 3 коэффициенты линейной модели, приняв за независимую переменную x «музыку», а за стохастическую y «математику»:

$\widehat{\alpha} = \frac{10\times 294 - 55\times 55}{10\times 385 - 3025} \approx -0{,}103$; $\widehat{\beta} = 5{,}5 - (-0{,}103) \times 5{,}5 \approx 6{,}07$.

График теоретической линии регрессии

$$\hat{y} = -0{,}103x + 6{,}07$$

и график эмпирической линии регрессии, соединяющей точки рангов учеников по музыке относительно возрастающих рангов по математике представлен на рис. 1.

Рис. 1. Графики теоретической и эмпирической линий регрессии

Из графика видно, что значение коэффициента уравнения регрессии $\widehat{\alpha}$ (32), численно совпадающее с коэффициентом ранговой корреляции ρ (29) К. Спирмэна, характеризует угол наклона прямой линии регрессии к оси абсцисс.

В данном случае отрицательное значение коэффициента

К. Спирмэна равное –0,103 означает, что с возрастанием рангов по математике способности к музыке ученика падает.

Таким образом, коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна всего лишь отражает возрастание или убывание значений линейного уравнения регрессии, когда один из факторов выполняет роль независимой детерминированной переменной, а другой зависимую стохастическую.

В этом случае коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна не может служить мерой близости мнений двух экспертов. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Для пары строгих ранжирований n объектов с прямым* (*обратным*) *порядком предпочтений объектов, представленных в ранговой шкале, значение коэффициента ранговой корреляции К. Спирмэна* ρ (29) *совпадает со значением коэффициента* $\widehat{\alpha}$ (32), т.е. $\rho = \widehat{\alpha}$, *при переменной x уравнения линейной регрессионной модели при условии равенства числа рангов числу оцениваемых объектов.*

Доказательство. Так как $\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} = \frac{1+n}{2} n$, $r_i^{(k)} = \overline{1,\, n}$, $i = \overline{1, m}$, то для утверждения теоремы достаточно показать, что правые части ρ (29) и $\widehat{\alpha}$ (31) совпадают. Поэтому имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2 = \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)})^2 - 2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} (r_j^{(k)})^2 =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)},$$

то

(33) $\rho = 1 - \frac{6\sum_{k=1}^{n}\left(r_i^{(k)} - r_j^{(k)}\right)^2}{n^3 - n} = \frac{12}{n^3-n} \cdot \sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1}.$

Подставляя $x_k = r_i^{(k)}$, $y_k = r_j^{(k)}$ и

$$\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1+n}{2} n$$

в $\widehat{\alpha}$ (32), получим:

(34) $\widehat{\alpha} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} - \left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right)^2}{\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right)^2} = \frac{12}{n^3-n} \cdot \sum_{k=1}^{n} r_i^{(k)} r_j^{(k)} - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot$

Правые части ρ (33) и $\widehat{\alpha}$ (34) совпадают. Теорема доказана. ■

5.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ ПАРЫ ЭКСПЕРТНЫХ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

При разработке метода оценки согласованности экспертных ранжирований будим исходить из следующих требований:

1. Доля числа совпадений точек зрения в ранжированиях пары экспертов должна учитываться в оценке суждений экспертов.

2. Для прикладной значимости степень совпадения мнений группы экспертов будем оценивать относительно медианы Кемени.

3. С точки зрения наглядности числовое значение оценки согласованности экспертов должно принадлежать отрезку [0, 1], причём значение 1 должно соответствовать полному совпадению и значение 0 должно соответствовать полному несовпадению.

4. Простота процедуры вычисления медианы и оценок степени согласованности мнений экспертов по сравнению с существующими методами.

Определение 3. Под согласованностью мнений экспертов будем понимать относительную меру близости между объектами на отрезке [0, 1] ([0, 100] в %), которая численно была бы не менее общего числа совпадений точек зрения пары экспертов.

Пусть экспертные оценки объектов преобразованы в ранговую шкалу $\vec{r}_i$ (6) с учётом и связанных рангов. Расстояние между ранжированиями пары экспертов P_i и P_t, $i, t \in \{1, 2, \dots, m\}$, представленные векторными оценками

(35) $\vec{r}_i = (r_i^{(1)}, , \dots, r_i^{(k)}, \dots, r_i^{(n)})$; $\vec{r}_t = (r_t^{(1)}, , \dots, r_t^{(k)}, \dots, r_t^{(n)})$,

зададим в виде l_1-нормы (9):

$$(\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right|,$$

которая задаёт метрику пространства (R, ρ_1).

Рассмотрим ранжирование $P_{\nearrow}$, в котором ранги объектов упорядочены строго по возрастанию и ранжирование $P_{\searrow}$, в котором ранги объектов упорядочены строго по убыванию:

(36) $P_{\nearrow}: \vec{r}_{\nearrow} = (1, 2, \dots, n)$; $P_{\searrow}: \vec{r}_{\searrow} = (n, n-1, \dots, 2, 1), n > 1$.

Согласованность исходных ранжирований (35) будем оценивать относительно максимального расстояния между строго возрастающими и строго убывающими ранжированиями объектов (36):

$$d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow}) = \sum_{i=1}^{n} |n-(2i-1)| = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, \text{если } n - \text{чётное число;} \\ \dfrac{n^2-1}{2}, \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

Введём следующее определение степени согласованности мнений двух экспертов.

Определение 4. Под коэффициентом согласованности между P_i и P_j ранжированиями будем понимать выражение:

$$\mathcal{S}_{it} = \mathcal{S}(P_i, P_t) = 1 - \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})},$$

которое, с учётом формулы $d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})$, в ранговой шкале примет вид:

(37) $$\mathcal{S}_{it} = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right|, \text{если } n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{n^2-1} \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right|, \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

Очевидно, что при совпадении ранжирований $d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = 0$ степень согласованности примет значение $\mathcal{S}_{ij} = 1$, а при противоположных ранжированиях – $\mathcal{S}_{it} = 0$, т.е. степень согласованности мнений будет удовлетворять неравенству: $0 \le \mathcal{S}_{it} \le 1$.

Наряду со степенью согласованности между P_i и P_t ранжированиями введём в рассмотрение и коэффициент рассогласованности, под которым примем выражение:

(38) $$\bar{\mathcal{S}}_{it} = 1 - \mathcal{S}_{it} = \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})}.$$

Исходя из введённых оценок согласованности и рассогласованности мнений двух экспертов введём в рассмотрение следующий критерий принятия гипотезы при экспертном оценивании объектов: основная гипотеза принимается, если выполняется неравенство

(39) $$\mathcal{S}_{it} > \bar{\mathcal{S}}_{it},$$

в противном случае основная гипотеза должна быть отвергнута и принята альтернативная.

Докажем следующее утверждение. Рассмотрим два ранжирования

(40) $$P_i: \vec{r}_i = (1,\ 2, \dots, n-q,\ n-q+1,\ n-q+2, \dots, \dots, n);$$

(41) $P_t : \vec{r}_t = (n-q, n-q-1, \dots, 1, n-q+1, \dots, \dots, n),$

в котором начальные ранговые оценки упорядочены в строго противоположном направлении, а после $q < n$ оценок в ранжировании совпадают.

Докажем что для ранжирований (40), (41) коэффициент (степень) согласованности удовлетворяет неравенству:

(42) $\frac{q}{n} < \mathcal{S}_{it} < 1.$

Теорема 5. *Пусть для пары ранжирований* (40), (41) n *объектов* q *ранговых оценок в ранжированиях совпадают:*

(43) $r_i^{(k)} = r_t^{(k)} \ \forall\, k = n-q+1, \dots, \dots, n, q < n.$

Тогда значение степени согласованности удовлетворяет неравенству (42).

Доказательство. Не умоляя общности, пусть n и q – чётные числа. Тогда $n-q$ тоже чётное число и коэффициент согласованности примет вид:

$$\mathcal{S}_{it} = 1 - \frac{2}{n^2} d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right|.$$

Представим расстояние между ранжированиями в виде суммы слагаемых

$$d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^{n-q} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right| + \sum_{k=1}^{q} \left| r_i^{(n-q+k)} - r_t^{(n-q+k)} \right|,$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n-q} \left| r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right| = \frac{(n-q)^2}{2}, \sum_{k=1}^{q} \left| r_i^{(n-q+k)} - r_t^{(n-q+k)} \right| = 0,$$

то $d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \frac{(n-q)^2}{2}.$

Поскольку $q < n$, то убедимся в справедливости неравенства (42). Действительно имеем:

$$\mathcal{S}_{it} = 1 - \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_\searrow, \vec{r}_\nearrow)} = 1 - \frac{\frac{(n-q)^2}{2}}{\frac{n^2}{2}} = 2\frac{q}{n} - \left(\frac{q}{n}\right)^2 > \frac{q}{n},$$

поскольку $\frac{q}{n} - \left(\frac{q}{n}\right)^2 > 0$, а $\frac{q}{n} < 1$, то верно неравенство (42).

Теорема доказана. ■

Из данной теоремы следует вывод, что в коэффициенте $\mathcal{S}_{it}$ (37) при выполнении условия (42) теоремы учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

6. Метод оценки степени согласованности мнений группы экспертов относительно медианы

6.1. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ГРУППЫ ЭКСПЕРТОВ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Алгоритм оценки согласованности мнений группы из m экспертов сводится к следующим шагам.

Шаг 1. Вычислить оценки q_k^* (23), $k = \overline{1, n}$, и медиану ранжирования (медиану Кемени) представить в шкале Q_* или R_*:

$$Q_*: \vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_n^*);\ R_*: \vec{r}_* = (r_1^*, \dots, r_n^*).$$

Шаг 2. Вычислить расстояние

$$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - q_k^* \right|;\ d(\vec{r}_i, \vec{r}_*) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_k^* \right|$$

медианы ранжирований до исходных ранжирований $P_1, \dots, P_m$ в дробной (рациональной) шкале или шкале со связанными рангами.

Шаг 3. Вычислить коэффициенты $\mathcal{S}_{(Q_*, P_i)} = \mathcal{S}(Q_*, P_i)$ согласованности ранжирования P_i экспертом $Э_i$ относительно результирующего ранжирования Q_* (R_*).

Шаг 4. Оценить согласованность мнений m экспертов относительно медианы Кемени как среднее от $\mathcal{S}_{Q_*, P_i}$.

Введём следующее определение коэффициента согласованности ранжирований для группы экспертов.

Определение 5. Под степенью согласованности ранжирований m экспертами примем усреднённое значение коэффициентов согласованности экспертов относительно медианы ранжирования R_*, представленной в ранговой шкале:

(44) $\mathcal{S}_Э = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}(Q_*, P_i)$,

которое с учётом формулы $d_{\downarrow\uparrow}$, определяется в виде:

$$\mathcal{S}_Э = \begin{cases} 1 - \frac{2}{mn^2} d_\Sigma\,, & n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{m(n^2-1)} d_\Sigma, & n - \text{нечётное число,} \end{cases}$$

где $d_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} d(\vec{r}_i, \vec{q}_*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - q_k^* \right|$.

По значениям коэффициентов согласованности экспертов можно оценивать по близости к медиане Кемени и ранжировать по убыванию оценок согласованности:

$$Э_i \succ Э_j \Leftrightarrow \mathcal{S}(Q_*, P_i) > \mathcal{S}\big(Q_*, P_j\big).$$

6.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СУЖДЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

Покажем, что коэффициент конкордации (согласованности), предложенный в работе М. Кендэла, не может служить мерой согласованности мнений m экспертов за исключением крайних случаев – полное совпадение или несовпадение ранжирований объектов.

Пример 4. Используем данные из работы Кендэла М [12, с. 104–108]. Группа из четырёх экспертов упорядочили шесть объектов, которые представлены в столбцах 2–7 табл. 4.

Поскольку среднее значение $\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14$, то при $S = \sum_{k=1}^{6} (S_k - \bar{S})^2 = 64$ величина коэффициента конкордации составит: $W = \frac{12 \times 64}{4^2(6^3-6)} \approx 0{,}229$ (30%).

Таблица 4. Оценка объектов в ранговой шкале

Ранжирования	Объект						$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	$\mathcal{S}_{Q_*,P_i}$
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
P_1	5	4	1	6	3	2	7,5	0,58
P_2	2	3	1	5	6	4	7	0,61
P_3	4	1	6	3	2	5	9	0,50
P_4	4	3	2	5	1	6	5	0,72
Q_*	3,7	2,7	2,5	4,75	3	4,25	28,5	0,60

Результирующее ранжирование объектов в соответствии с оптимальным вектором $\vec{q}_* = (3{,}75; 2{,}75; 2{,}5; 4{,}75; 3; 4{,}25)$ в шкале с рациональными рангами:

$$Q_*: a_4 \succ a_6 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2 \succ a_3$$

представлено на рис. 2 в виде пунктирной линии, которая расположена в середине между линиями экспертов.

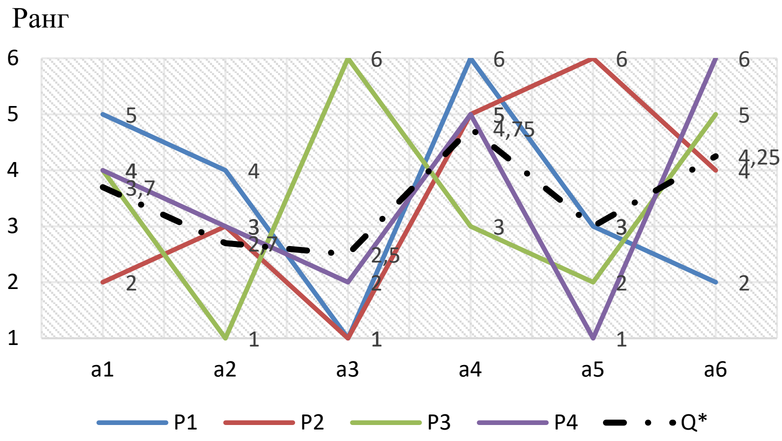

Рис. 2. Графики линий упорядочения объектов экспертами

При чётности числа объектов $d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = \frac{n^2}{2} = 18$ и оценка согласованности мнений экспертов в среднем составит величину:

$$\mathcal{S}_Э = 1 - \frac{2}{mn^2} d_\Sigma = 1 - \frac{2}{4 \times 6^2} \times 28{,}5 \approx 0{,}6\ (60\ \%).$$

На основании оценок согласованности каждого эксперта до медианы Кемени, значения которых представлены в ст. 9 табл. 4, экспертов можно ранжировать по степени приближения к медиане: $Э_4 \succ Э_2 \succ Э_1 \succ Э_3$.

Пример 5. Рассмотрим вариант, когда для 7-ми объектов мнения трёх экспертов из пяти совпадают с медианой Кемени, полученной как решение оптимизационной задачи и по мажоритарному правилу [20], т.е. имеем 60 % совпадения экспертных ранжирований (табл. 5).

При нечётности числа объектов $d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = \frac{n^2-1}{2} = 24$ и оценка согласованности мнений экспертов в среднем составит величину:

$$\mathcal{S}_Э = 1 - \frac{2}{m(n^2-1)} d_\Sigma = 1 - \frac{2}{5 \times (7^2-1)} \times 48{,}0 \approx 0{,}6\ (60\ \%).$$

Таблица 5. Оценка объектов в ранговой шкале, $m = 5, n = 7$

Эксперты	Объект							$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	$\mathcal{S}_{Q_*,P_i}$
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
$Э_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	0	1,0
$Э_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	0	1,0
$Э_3$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	0	1,0
$Э_4$	6	7	4	5	2	3	1	24	0,0
$Э_5$	7	5	6	3	4	1	2	24	0,0
R_*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	48	0,60

Коэффициент конкордации по данным таблицы 5 составит

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12\times 42}{5^2(7^3-7)} \approx 0{,}06\ (6\ \%),$$

где $\bar{S} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7} S_k = \frac{1}{7}(16+18+19+20+21+22+24) = 20;$

$$S = \sum_{k=1}^{7}(S_k - \bar{S})^2 = 16+4+1+0+2+4+16 = 42.$$

Результаты расчётов из табл. 5 показывают, что коэффициент конкордации почти на порядок занижает оценку согласованности мнений пяти экспертов по сравнению с почти точным значением коэффициента $\mathcal{S}_Э$ согласованности.

Приходим к выводу, что коэффициент конкордации не позволяет оценивать согласованность ранжирований экспертов за исключением крайних случаев: при совпадении мнений всех экспертов коэффициент конкордации принимает единичное значение, а при несовпадении нулевое значение.

Рассчитаем теоретическую оценку точности коэффициента конкордации W (30) для специального случая, когда у большей подгруппы экспертов ранжирования совпадают, а у другой подгруппы противоположны.

Теорема 6. *Пусть* n *объектов строго ранжированы* m *экспертами, где* $m \geq 3$, *и* g *ранжирований* $P_i, i = \overline{1,\mathrm{g}}$, *не совпадают с* $z = m - \mathrm{g}$ *ранжированиями* $P_j \in P\backslash\{P_i\}_{i=1}^{\mathrm{g}}, j = \overline{1,z}$, *экспертов с единым мнением, где* $z > \frac{m}{2}$, *и при этом пусть значения рангов для объектов из несовпадающих ранжирований удовлетворяют равенствам*:

(45) $r_i^{(k)} = n + 1 - r_j^{(k)}, \forall\, P_i,\ P_j \in\ P = \{P_1, \dots, P_m\}$.

Тогда коэффициент согласованности мнений m экспертов примет значение $\mathcal{S}_Э = \frac{z}{m}$, *а коэффициент конкордации* W (30) *не зависит от n числа объектов и вычисляется по формуле:*

(46) $W(m) = \frac{(z-\mathrm{g})^2}{m^2}$,

при чём относительная величина отклонения от значения коэффициента согласованности мнений экспертов составит величину

(47) $\Delta W(m) = \frac{\mathcal{S}_Э - W(m)}{\mathcal{S}_Э} = 1 - \frac{(z-\mathrm{g})^2}{mz}$.

Доказательство. С учётом условия (45) расстояние между g ранжированиями $P_i, i = \overline{1,\mathrm{g}}$, и результирующим ранжированием R_* совпадёт с расстоянием противоположных ранжирований, т.е. $d(P_i, R_*) = d(P_\downarrow, P_\uparrow)$, откуда $\mathcal{S}_{P_i R_*} = \mathcal{S}(P_i, R_*) = 0$. Для z ранжирований экспертов с единым мнением имеем $d\left(P_j, R_*\right) = 0$, откуда: $\mathcal{S}_{P_j, R_*} = \mathcal{S}\left(P_j, R_*\right) = 1, P_j \in\ P \setminus \{P_i\}_{i=1}^{\mathrm{g}}, j = \overline{1,z}$.

Следовательно: $\mathcal{S}_Э = \frac{1}{m} \cdot \left(q \times \mathcal{S}\left(P_j, R_*\right) + v \times \mathcal{S}(P_i, R_*)\right) = \frac{z}{m}$.

Не умоляя общности, будем считать, что ранги ранжирований P_i с номерами $i = \overline{1,\mathrm{g}}$ строго монотонно убывают, т.е.

$$r_i^{(k)} = n - k + 1,\ k = \overline{1,n},$$

то тогда ранги P_j, $j = \overline{1,z}$, ранжирований исходя из (45) строго монотонно возрастают, т.е. $r_j^{(k)} = k,\ k = \overline{1,n}$.

Рассчитаем параметры коэффициента конкордации W (48), а именно:

$$S_k = \sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)} = kq + (n - k + 1)\mathrm{g} = (n + 1)\mathrm{g} + k(m - 2\mathrm{g}),$$

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(n + 1)\mathrm{g} + k(m - 2\mathrm{g})] = \frac{m(n+1)}{2}.$$

Исходя из формул $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим:

$$S = \sum_{k=1}^{n}(S_k - \bar{S})^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[(n + 1)\mathrm{g} + k(m - 2\mathrm{g}) - \frac{m(n+1)}{2}\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(m - 2\mathrm{g})\left(k - \frac{n+1}{2}\right)\right]^2 = (m - 2\mathrm{g})^2 \sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= (m-2g)^2 \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k(n+1) + \frac{1}{4}(n+1)^2\right) = \frac{(m-2g)^2(n^3-n)}{12},$$

Откуда

$$W(m) = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{(z-g)^2}{m^2} \text{ и } \Delta W(m) = \frac{\mathcal{S}_Э - W(m)}{\mathcal{S}_Э} = 1 - \frac{(z-g)^2}{mz}.$$

Теорема доказана. ■

Пример 6. Для подверждения выводов теоремы рассчитаем согласованность для трёх ранжирований ($m = 3, n = 5$):

$P_1: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$, $P_2: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$,

$P_3: a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$.

где $z = 2$ и $g = 1$.

Поскольку медианой Кемени для трёх ранжирований является ранжирование $R_*: a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$, то коэффициент согласованности трёх экспертов: $\mathcal{S}_Э = \frac{z}{m} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (67 %).

Коэффициент конкордации вычисленный по формулам W (30) и $W(m)$ (46) составит:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12\times10}{9\times120} = \frac{1}{9} \text{ и } W(m) = \frac{(z-g)^2}{m^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11\ (11\%).$$

Данный пример подтверждает, что коэффициент конкордации ранговой корреляции не может служить оценкой согласованности мнений группы экспертов.

6.3 ОЦЕНКА СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТОВ В СЛУЖБЕ МЕДИЦИНЫ КАТАСТРОФ

На исходных данных работы «Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф» [18] покажем, что опираясь на коэффициент конкордации можно прийти к ошибочным решениям при экспертном оценивании гемостатических лекарственных средств. Суть сводится к следующему [18]: «Экспертам службы медицины катастроф была предложена анкета, включающая блоки профессиональной оценки экспертов-врачей и собственно анкета, включающая группы гемостатических средств: B02A, B02AB, B02B, B02BC, B02BD, B02BX, которые перенумеруем в виде $L_1, \dots, L_6$. Гемостатические лекарственные средства были ранжированы экспертами по пятибалльной шкале на предмет использования при массивных кровотечениях: оценку «отлично» получала та группа лекарственных препаратов, применение которой необходимо и целесообразно в условиях чрезвычайной ситуации (ЧС), «хорошо» – группа лекарственных средств, применение которой необходимо в условиях ЧС, «удовлетворительно» – группа без которой специалисты медицины катастроф могут обойтись, «неудовлетворительно» – не нужные в ЧС лекарственные средства».

В результате, каждый эксперт выставлял свою оценку, и каждая группа гемостатических средств была оценена в пятибалльной шкале, как представлено в таблице 6.

Таблица 6. Балльные оценки гемостатических средств

$Э_i$	Лекарства					
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
1	4	3	2	5	4	3
2	3	3	2	5	3	3
3	4	3	3	4	3	4
4	3	3	3	5	3	3
5	3	3	3	5	3	3
6	5	2	3	5	5	3
7	5	2	3	5	4	4
8	4	4	4	5	4	3
9	5	5	3	4	5	3
10	5	4	3	5	5	3
11	4	4	4	3	5	5
12	5	5	5	5	5	5
13	3	5	3	5	5	5
14	3	4	4	5	5	5
15	4	3	4	5	3	3

Затем балльные оценки гемостатических средств при оказания медицинской помощи в условиях чрезвычайной ситуации были преобразованы в связанные ранги, которые представлены в таблице 7. Так как $m^2(n^3 - n) = 15^2 \times (6^3 - 6) = 47250;$ $m^2(n^3 - n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i = 15^2 \times (6^3 - 6) - 15 \times 888 = 33930;$

$$\bar{S} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} S_k = \frac{1}{6}315 = 52{,}5 \text{ и } S = \sum_{k=1}^{6}(S_k - \bar{S})^2 = 690.$$

то отсюда коэффициент конкордации по формуле (30) составит:

$$W = \frac{12 \times 690}{15^2 \times (6^3 - 6)} = \frac{8280}{47250} \approx 0{,}1752 \ (17{,}52\ \%).$$

а с учётом связанных рангов по формуле W (31):

$$W = \frac{12 \times 690}{15^2 \times (6^3 - 6) - 15 \times 888} = \frac{8280}{33930} \approx 0{,}2440 \ (24{,}40\ \%).$$

Таблица 7. Связанные ранги гемостатических средств

$Э_i$	Лекарства						Σ	T_i
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6		
1	4,5	2,5	2	5	4,5	2,5	21	12
2	3,5	3,5	2	5	3,5	3,5	21	60
3	5	2	2	5	2	5	21	48
4	3	3	3	6	3	3	21	120
5	2,5	2,5	5	6	2,5	2,5	21	120
6	5	1	2,5	5	5	2,5	21	30
7	5,5	1	2	5,5	3,5	3,5	21	12
8	3,5	3,5	3,5	6	3,5	1	21	60
9	5	5	1,5	3	5	1,5	21	30
10	5	3	1,5	5	5	1,5	21	30
11	3	3	3	1	5,5	5,5	21	30
12	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	21	210
13	1,5	4,5	1,5	4,5	4,5	4,5	21	66
14	1	2,5	2,5	5	5	5	21	30
15	4,5	2	4,5	6	2	2	21	30
S_k	56	42,5	40	71,5	58	47	315	888

На основании полученного результата специалисты службы медицины катастроф пришли к ошибочному выводу: «В связи с этим, полученные данные коэффициентов конкордации и вариации позволяют сделать вывод о том, что в настоящее время лидирующая группа лекарственных препаратов для остановки массивных кровотечений для использования на догоспитальном этапе в очаге поражения специалистами службы медицины катастроф отсутствует. Необходимы новые исследования по созданию новых гемостатических средств для местного и наружного применения». Теперь рассчитаем степень согласованности пятнадцати экспертов с помощью коэффициента $\mathcal{S}_Э$ (44) при чётности количества лекарств по формуле:

$$\mathcal{S}_Э = 1 - \frac{2}{mn^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left|r_j^{(k)} - q_k^*\right|, \text{ где } m = 15; n = 6.$$

Вычислив вектор медианы Кемени по формуле q_k^* (23) в шкале рациональных чисел

(48) $\vec{q}_* = (3{,}73; 2{,}83; 2{,}67; 4{,}77; 3{,}87; 3{,}13)$,

получим медиану ранжирования в виде

$$Q_*: L_4 \succ L_5 \succ L_1 \succ L_6 \succ L_2 \succ L_3,$$

В таблице 8 представлены расстояния между медианой Кемени и оценками экспертов в связанных рангах.

Таблица 8. Расстояния между ранжированиями в ранговой шкале и медианной Кемени

$Э_i$.	Лекарства						Σ	$\mathcal{S}_{(Q_*,P_i)}$
	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$L5$	$L6$		
1	0,77	0,33	0,67	0,23	0,63	0,63	3,27	0,82
2	0,23	0,67	0,67	0,23	0,37	0,37	2,53	0,86
3	1,27	0,83	0,67	0,23	1,87	1,87	6,73	0,63
4	0,73	0,17	0,33	1,23	0,87	0,13	3,47	0,81
5	1,23	0,33	2,33	1,23	1,37	0,63	7,13	0,60
6	1,27	1,83	0,17	0,23	1,13	0,63	5,27	0,71
7	1,77	1,83	0,67	0,73	0,37	0,37	5,73	0,68
8	0,23	0,67	0,83	1,23	0,37	2,13	5,47	0,70
9	1,27	2,17	1,17	1,77	1,13	1,63	9,13	0,49
10	1,27	0,17	1,17	0,23	1,13	1,63	5,60	0,69
11	0,73	0,17	0,33	3,77	1,63	2,37	9,00	0,50
12	0,23	0,67	0,83	1,27	0,37	0,37	3,73	0,79
13	2,23	1,67	1,17	0,27	0,63	1,37	7,33	0,59
14	2,73	0,33	0,17	0,23	1,13	1,87	6,47	0,64
15	0,77	0,83	1,83	1,23	1,87	1,13	7,67	0,57
$\vec{q}_*$	3,73	2,83	2,67	4,77	3,87	3,13	21	10,08

Отсюда оценка степени согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф по формуле (44):

$$\mathcal{S}_{Э} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}(R_*, P_i) = \frac{1}{15} \times 10{,}083 \approx 0{,}672 \ (67{,}2\ \%).$$

Поскольку $\bar{\mathcal{S}}_{Э} = 1 - \mathcal{S}_{Э} = 0{,}328$ и по критерию принятия гипотезы выполняется неравенство

$$\mathcal{S}_{Э} > \bar{\mathcal{S}}_{Э} \Leftrightarrow 0{,}672 > 0{,}328,$$

то гипотеза о применении лекарств может быть принята.

По формуле ε-приближения оценим значение коэффициента конкордации с почти точным значением коэффициента согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф:

$$\frac{|\mathcal{S}_E - W|}{\mathcal{S}_E} = \frac{0{,}672 - 0{,}175}{0{,}672} \approx 0{,}7396 \ (73{,}96\ \%).$$

Поскольку отклонение значения коэффициента конкордации отличается от почти точного значения коэффициента согласованности более чем на 50 %, то оно не может считаться удовлетворительным и применяться при решении прикладных задач.

7. Заключение

Задача нахождения медианы ранжирований объектов представленных матрицами бинарных отношений по матричному критерию относится к классу комбинаторных *NP*-полных задач. В настоящее время не существует оптимального метода нахождения результирующего ранжирования по матричному критерию. Обоснованность перехода от постановки задачи построения медианы Кемени-Снелла по матричному критерию к постановке задачи по критерию близости между ранжированиями в ранговой шкале связана с тем, что между ранжированиями, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов и ранжированиями в ранговой шкале, как обосновано в данной статье, существует взаимнооднозначное соответствие.

Изложенные методы оценки согласованности экспертных ранжирований объектов в ранговой шкале измерения по сравнению с методами ранговой корреляции позволяют точнее оценивать согласованность как парных так и групповых ранжирований экспертами.

Преимуществом предложенных методов заключается в том, что в коэффициенте согласованности учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – В. 3. – С. 127-133.
2. АВЧУХОВА Е.В. *Оценка согласованности экспертов при отборе персонала* // Вестник Самарской гуманитарной академии. Серия «Психология» 2018. № 1(23). – С. 136–150.
3. АНОХИН А.Н. *Методы экспертных оценок*. – Обнинск: ИАТЭ, 1996. . 148 с.
4. БЕЛОУС В.В., СПИРИДОНОВ С.Б., ПОСТНИКОВ В.М. *Подход к ранжированию контрольных мероприятий по дисциплинам направления «Информатика и вычислительная техника» и оценке вариантов их проведения* // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №2 (2017).
http://naukovedenie.ru/PDF/102TVN217.pdf
5. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
6. ГОРСКИЙ В.Г., ГРИЦЕНКО А.А., ОРЛОВ А.И. *Метод согласования кластеризованных ранжировок* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 159-167.
7. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
8. ГУЦЫКОВА С.В. *К вопросу согласованности экспертных оценок профессионально важных качеств* // Знание. Понимание. Умение. №4. – 2009. – С. 200–204.
9. ДАНЕЛЯН Т.Я. *Формальные методы экспертных оценок* // Прикладная информатика. – 2015.– № 1. – С. 183–187.
10. КАБАНОВ В.А., КОМАРОВА Е.С. *Использование метода конкордации в оценке уровня согласованности экспертных мнений* // Реакция региональной экономики на внешние вызовы: материалы межвузовской научно-практической конференции 18

ноября 2016 г. – Владимир: Владимирский филиал РАНХиГС, 2016. – С. 39–42.
11. КЕМЕНИ Д., СНЕЛЛ Д. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
12. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции*. М.: Мир, 1975. – 216 с.
13. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функции и функционального анализа.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.
14. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации.* – М.: Высшая школа, 2007. – С. 271–274.
15. КОРНЕЕНКО В.П. *Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения* // Управление большими системами. Выпуск 82. – М.: ИПУ РАН. – 2019. С. 44–60.
16. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
17. МАНУСОВ В.З., КРЮКОВ Д.О., АХЬЁЕВ ДЖ.С. С*огласование экспертных оценок при диагностике текущего технического состояния высоковольтного электрооборудования //* Доклады АН ВШ РФ, № 1(34). – 2017. – С. 72–84.
18. МЕЛЬНИКОВА О.А., ПЕТРОВ А.Ю., ХАФИЗОВА А.В. *Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф* // Успехи современного естествознания, № 6. – 2013. – С. 54–57.
19. МАГНУС Я.Р., КАТЫШЕВ П.К., ПЕРЕСЕЦКИЙ А.А. *Эконометрика. Начальный курс*. – М.: Дело, 2007. – 504 с.
20. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
21. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т.79. – №4. – С.3–4.
22. ОРЛОВ А.И. *Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных* // Теория активных систем: Труды международной научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том I. / Под общ. ред. В.Н. Буркова, Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 172–176. URL: http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/114.pdf

23. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование. Ч. 2 : Экспертные оценки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.
24. ОРЛОВ А.И. *Анализ экспертных упорядочений*. // Научный журнал КубГАУ, № 112 (08). – 2015.– С. 1–31.
URL: http://ej.kubagro.ru/2015/08/pdf/02.pdf
25. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ, № 89 (05). – 2013.–
URL: http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf
26. ПАДЕРНО П. И. БУРКОВ Е. А., ЕВГРАФОВ В. Г. *Критерий согласованности парных сравнений* // Информационно-управляющие системы. № 3(52). – 2011. – С. 57-60.
27. ПЕТРИЧЕНКО Г.С., ПЕТРИЧЕНКО В.Г. *Экспертное оценивание при выборе эффективного мероприятия* // Научные ведомости Белгородского университета. – 2015 № 13 (210). Выпуск 35/1. – С. 122–127.
28. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений* . – М.: Мир, 1976. – 247 с.
29. РУГОЛЬ Л.В., МЕНЬШИКОВА Л.И., СОН И.М. *Применение метода экспертных оценок для обоснования мероприятий по совершенствованию организации работы центральных районных больниц* // Профилактическая медицина. №25(4). 2022. – С. 19-28.
30. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Экспертное прогнозирование* (*Expert prognosyication*). М.: Доброе слово, 2018. – 248 с.
31. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
32. ШМЕРЛИНГ Д.С., ДУБРОВСКИЙ С.А., АРЖАНОВА Т.Д., ФРЕНКЕЛЬ А.А. *Экспертные оценки. Методы и применения* // Статистические методы анализа экспертных оценок. Ученые записки по статистике. Том 29 – М.: Наука, 1977. – С. 290–382.
33. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач стратегического планирования*. М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
34. ШМЕРЛИНГ Д.С. *О проверке согласованности мнений экспертов* // Статистические методы анализа экспертных оценок. – М.: Наука, 1977. – С. 77–83.

35. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences.* – New York, University of Michigan. – 1962. – 168 p.
36. JACKSON, B. N., SCHNABLE, P. S., ALURU, S. *Consensus Genetic Maps as Median Orders from Inconsistent Sources* // IEEE/ACM Transactions on computational biology and bioinformatics. – 2008. – Vol. 5, № 2. – P. 161-171.
37. ISHIZAKA A., LABIB A. *Analytic hierarchy process and Expert Choice: benefits and limitation* // ORinsight. — 2009. – Vol. 24. — P. 201—220.

METHODS FOR SELECTING THE MEDIAN RANKING AND EVALUATING THE CONSISTENCY OF EXPERT ASSESSMENTS BY THE PROXIMITY CRITERION

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

*Abstract: In the development of the theory of expert assessments, the exceptional role of the position and the median of ranking, known as the Kemeny median, has been revealed. However, there is no optimal solution method for finding the median of the rankings represented by the matrices of binary relations according to the distance matrix criterion. The validity of the optimal solution to the problem of choosing the median in the space of the rank scale of measurement is due to the fact that there is a one-to-one correspondence between the rankings represented by binary relation matrices on a set of pairs of objects and the rankings in the rank scale. It is also an important task to check the consistency of the opinions of the expert group. The existing statistical methods and methods of rank correlation do not measure the consistency of expert opinions, if by which we mean the measure of proximity between expert assessments of objects.. The article shows by concrete examples that the Kendal concordance coefficient, which is still found in the works of some authors, does not allow for a realistic assessment of the consistency of expert rankings, which can lead to erroneous management decisions. A method is proposed for evaluating the opinions of both a pair of experts and a group of experts, in the form of an average agreement of experts with respect to the median of rankings presented in the ranking scale.*Keywords: consistency of expert opinions, rank scale of measurement, median of Kemeny, criterion of proximity of rankings.

Keywords: rank scale, related (rational) ranks, median ranking of objects, matrix criterion, consistency of expert opinions.

УДК 519.8
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2019.82.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...