

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.¹

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Рассматривается задача поиска критериев существования стабилизирующих статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных систем. Дело в том, что имеющиеся ранговые критерии существования статических регуляторов применимы только в тех случаях, когда одна из матриц входа или выхода имеет полный ранг. Во всех остальных случаях, как правило, чаще всего встречающихся на практике, эти критерии оказываются неприменимыми. Показано, что критерии для обратной связи по выходу также существуют и могут быть сформулированы в виде необходимых и достаточных условий. Основная идея состоит в приведении посредством невырожденного линейного преобразования матрицы выхода к определенному блочному виду. В результате получается параметрический ранговый критерий, схожий с критерием для статического регулятора по состоянию.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, стабилизируемость, линейное преобразование, матричные неравенства.

1. Введение

Управление в форме статической обратной связи по выходу представляет собой наиболее востребованный на практике способ стабилизации линейных систем [1, 4]. Очевидным преимуществом такого подхода к стабилизации по сравнению со стабилизацией по состоянию является то, что для ее реализации не требуется весь вектор состояния. Однако NP-трудность задачи [14], а также отсутствие критериев существования заметно усложняют синтез таких регуляторов [9, 12, 15, 16]. Изучены лишь некоторые частные случаи, в которых удастся сформулировать критерии в виде необходимых и достаточных условий (например, [15]).

Статья посвящена решению задачи о существовании статического регулятора по выходу. Для решения задачи, также как и

¹ Алексей Валерьевич Мухин, аспирант (muhin-aleksei@yandex.ru).

в [6, 7], использовался специальный класс матриц выхода, с помощью которого удастся сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов в общем случае. Для этого посредством невырожденного линейного преобразования матрицы замкнутой системы необходимо выбрать такой базис, в котором матрица выхода примет простой блочный вид, благодаря которому удастся получить простой параметрический ранговый критерий, подобный критерию для статического регулятора по состоянию.

Структура статьи стандартная. Во втором разделе сформулирована задача. В третьем разделе приведены используемые обозначения и показан выбор базиса, в котором матрица выхода принимает требуемый, блочно-однородный вид. Четвертый раздел содержит доказательство теоремы, в которой сформулирован критерий существования статического регулятора по выходу. Пятый раздел – примеры. Заключительные выводы даны в последнем разделе.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную стационарную систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}x + \hat{B}u, \quad x(0) = x_0, \\ y &= \hat{C}x, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – вход; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $\hat{A} \in R^{n \times n}$ – матрица системы; $\hat{B} \in R^{n \times m}$ – матрица входа; $\hat{C} \in R^{p \times n}$ – матрица выхода.

Будем считать, что относительно матриц $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются естественные ранговые условия

$$\begin{aligned} \text{rank}(\hat{B}) &= m, \\ \text{rank}(\hat{C}) &= p, \end{aligned}$$

где $m, p < n$.

В противном случае требуется сначала избавиться от избыточности в системе (1). Для стабилизации системы применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид:

$$(2) \quad u = Ky,$$

где $K \in R^{m \times p}$ – неизвестная матрица регулятора.

Тогда (1) с учетом (2) примет замкнутый вид

$$(3) \quad \dot{x} = (\hat{A} + \hat{B}K\hat{C})x = \hat{A}_c x.$$

Задача состоит в поиске критериев, позволяющих сделать вывод относительно существования матрицы K , обеспечивающей устойчивость матрицы замкнутой системы (3). Стандартная математическая формулировка задачи звучит так [9]: *существует ли такая матрица K , которая для заданных матриц $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ обеспечивает устойчивость матрицы замкнутой системы (3)?*

3. Преобразование базиса

Введем используемые обозначения. Правую комплексную полуплоскость будем обозначать $\mathbb{C}^+$, а левую полуплоскость – $\mathbb{C}^-$. Если $\lambda \in \mathbb{C}^-$, то $Re \lambda < 0$. Спектр квадратной матрицы $\mathcal{M}$, представляющий собой множество $\lambda \in \mathbb{C}$, будем обозначать $\sigma(\mathcal{M})$, а ее спектральную абсциссу, определяемую как $\max_{1 \leq i \leq n} \{Re \lambda_i(\mathcal{M})\}$, обозначим $spr(\mathcal{M})$. Это обозначение позаимствовано из [8]. Если $\mathcal{M}$ гурвицева, то $spr(\mathcal{M}) < 0$. Ядра матриц $\hat{B}^T$ и $\hat{C}$ будем обозначать $\mathcal{N}_{\hat{B}^T}$ и $\mathcal{N}_{\hat{C}}$ соответственно. Их можно определить из уравнений [11]

$$\hat{B}^T \mathcal{N}_{\hat{B}^T} = 0,$$

$$\hat{C} \mathcal{N}_{\hat{C}} = 0.$$

Для решения задачи введем вспомогательный класс матриц выхода, который обозначим $\mathcal{E}$. С этой целью выполним линейное преобразование системы (3) посредством невырожденной матрицы $S \in R^{n \times n}$ так, чтобы в новом базисе матрица выхода $\hat{C}$ приняла один из видов

$$(4) \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix},$$

$$(5) \quad C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n-p)} & I_p \end{pmatrix}.$$

Матрица $C \in \mathcal{E}$, если она имеет вид (4) или (5). В новом базисе матрица замкнутой системы будет равна

$$(6) \quad A_c = S(\hat{A} + \hat{B}K\hat{C})S^{-1} = A + BKC.$$

В силу подобия спектры матриц $\widehat{A}_c$ и A_c совпадают [11]. Матрица преобразования может быть найдена из совместной системы уравнений

$$(7) \quad \widehat{C}S^{-1} = C.$$

Отметим, что если $C \in \mathcal{C}$, то и $\mathcal{N}_C^T \in \mathcal{C}$. Заметим также, что

$$CC^T = I_p,$$

$$\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C = I_{n-p}.$$

Таким образом, всегда можно выбрать такой базис, в котором $C \in \mathcal{C}$. Иначе говоря, любую матрицу выхода всегда можно привести к любому из видов (4) или (5). Произведение матриц CB является инвариантным по отношению к выбранному базису. В общем случае ранг произведения матриц CB заключен в следующий диапазон:

$$0 \leq \text{rank}(CB) \leq \min\{m, p\}.$$

Равенство $\text{rank}(CB) = 0$ реализуется в некоторых частных случаях, когда, например, C имеет вид (4), а B^T – вид (5). Пусть матрица выхода приведена к виду (4). В соответствии с (6) матрицу входа в новом базисе можно представить в виде

$$(8) \quad B = S\widehat{B} = \begin{pmatrix} CB \\ \mathcal{N}_C^T B \end{pmatrix},$$

а матрицу системы в виде

$$(9) \quad A = S\widehat{A}S^{-1}.$$

Введем новую матрицу

$$K_n = \begin{pmatrix} K & 0_{m \times (n-p)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу (6) можно переписать в виде:

$$(10) \quad A_c = A + BK_n.$$

В силу (4) матрицу (10) можно также записать следующим образом:

$$A_c = \begin{pmatrix} CA_cC^T & A_{12} \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^T BK & \mathcal{N}_C^T A\mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\widehat{A}_c$ в исходном базисе устойчива, то в силу подобия матрица A_c также устойчива. Аналогичную матрицу замкнутой системы можно получить и в случае, когда матрица выхода приведена к (5).

4. Необходимые и достаточные условия существования статического регулятора по выходу

Напомним, что система с обратной связью по состоянию, определяемая парой произвольных матриц $(\hat{A}, \hat{B})$ стабилизируема, если (например, [3]):

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\lambda I - \hat{A} \quad \hat{B}) = n.$$

Стабилизируемость системы является необходимым и достаточным условием существования статического регулятора по состоянию [4, 13]. Разобьем множества размерностей m и p

$$1 \leq m, p < n$$

на два подмножества

$$m, p = n - 1,$$

$$1 \leq m, p < n - 1.$$

Покажем, что задача синтеза статического регулятора по выходу в первом случае имеет простое решение:

Лемма. Для существования статического регулятора по выходу, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы (3) в базисе, в котором C удовлетворяет виду (4) при условии $p = n - 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

$$\begin{cases} N_C^T A N_C^T < 0 \\ (A, B) \text{ стабилизируема} \end{cases}.$$

Доказательство. Известно (см. например, [3]), что для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система линейных матричных неравенств

$$(11) \mathcal{N}_C^T (Y^{-1} A + A^T Y^{-1}) \mathcal{N}_C < 0,$$

$$\mathcal{N}_{B^T}^T (AY + Y A^T) \mathcal{N}_{B^T} < 0.$$

Так как C удовлетворяет виду (4) и $p = n - 1$, то в качестве ядра такой матрицы можно взять

$$\mathcal{N}_C^T = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1).$$

Тогда система (13) примет вид

$$2y_{11} N_C^T A N_C^T < 0,$$

$$\mathcal{N}_{B^T}^T (AY + Y A^T) \mathcal{N}_{B^T} < 0,$$

где y_{11} – верхний диагональный элемент матрицы Y^{-1} .

В силу того, что $Y^{-1} > 0$, то и $y_{11} > 0$. Лемма доказана.

Приступим теперь к решению общей задачи. Введем понятие стабилизируемости по выходу применительно к случаю, когда C удовлетворяет виду (4): систему с обратной связью по выходу (10) будем называть стабилизируемой по выходу, если в соответствующей матрице Хаутуса

$$(\lambda I - A \quad B),$$

существует хотя бы одна квадратная подматрица $\mathcal{A}_i^n(\lambda)$ размерности $n \times n$, состоящая из последовательно расположенных столбцов, начиная со второго столбца, определитель которой обращается в ноль только при значениях $\lambda \in \mathbb{C}^-$.

Количество таких подматриц равно m . Первый столбец опускается, так как подматрица $(\lambda I - A)$ не устойчива. Из стабилизируемости по выходу следует, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\mathcal{A}_i^n(\lambda)) = n,$$

откуда вытекает стабилизируемость пары (A, B) . Таким образом, из стабилизируемости по выходу следует стабилизируемость пары (A, B) . Обратное, вообще говоря, неверно. Считая, что ни одна из величин m и p не равна $n - 1$, сформулируем и докажем основной результат в виде теоремы:

Теорема. Для существования статического регулятора по выходу, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы (3) необходимо и достаточно, чтобы в базисе, в котором $C \in \mathcal{V}$ система (10) была стабилизируемой по выходу.

Доказательство. Необходимость. В соответствии с формулой Бине-Коши [11] определитель произведения двух матриц

$$(\lambda I - A \quad B) \begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$$

равен сумме произведения всевозможных миноров порядка n матрицы $(\lambda I - A \quad B)$ на соответствующие миноры такого же порядка матрицы $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$:

$$(12) \det \left((\lambda I - A \quad B) \begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{N_0} \det(\mathcal{A}_i^n(\lambda)) \det(K_i^n),$$

Верхний предел N_0 есть не что иное, как число сочетаний из $(n + m)$ по n :

$$N_0 = \frac{(n+m)!}{m!n!}.$$

Так как матрица K_n содержит нулевой блок, то количество ненулевых миноров в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ будет меньше N_0 . Запишем матрицу $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_{m \times (n-p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{m1} & -k_{m2} & \dots & -k_{mp} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $k_{ij} \neq 0$.

Количество невырожденных $n \times n$ подматриц, состоящих из последовательно расположенных строк, начиная со второй строки при условии, что $m, p < n - 1$, равно

$$(13) N = \min\{m, p\} < n - 1,$$

а все остальные $n \times n$ подматрицы будут вырожденными. С учетом этого перепишем (12) в виде суммы многочленов:

$$(14) P^n(\lambda) + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} P_i^{n_i}(\lambda) \det(K_i^n) = 0,$$

в которой:

$$P^n(\lambda) = \det(\lambda I - A) - \text{многочлен степени } n;$$

$$P_i^{n_i}(\lambda) = \det(\mathcal{A}_i^n(\lambda)) - \text{многочлены степени } n_i \leq n - 1.$$

Многочлены $P_i^{n_i}(\lambda)$ появляются из уравнений определителей $\det(\mathcal{A}_i^n(\lambda))$, которые находятся в соответствии с определителями $\det(K_i^n)$. Перегруппируем слагаемые в (14) и приведем его к единому многочлену:

$$(15) a_n \lambda^n + \left(a_{n-1} + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} \alpha_{i(n-1)} \det(K_i^n) \right) \lambda^{n-1} + \dots + \left(a_0 + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} \alpha_{i0} \det(K_i^n) \right) = 0,$$

где $\alpha_{i(n-j)}$ — элементы многочленов $P_i^{n_i}(\lambda)$.

Будем считать, что $a_n = 1$. В соответствии с теоремой Стодолы [10], для устойчивости многочлена (15) необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительными. Для определенности

положим, что $\min\{m, p\} = p$ и запишем необходимое условие устойчивости многочлена (15) в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1(n-1)} \\ a_{1(n-2)} \\ \dots \\ a_{10} \end{pmatrix} \det(K_1^n) + \dots + \begin{pmatrix} a_{p(n-1)} \\ a_{p(n-2)} \\ \dots \\ a_{p0} \end{pmatrix} \det(K_p^n) > 0.$$

Эти неравенства можно переписать в компактном виде:

$$(16) \ a^0 + a^1 \det(K_1^n) + \dots + a^p \det(K_p^n) > 0.$$

В силу того, что $p < n - 1$, то для разрешимости (16) необходимо, чтобы хотя бы один из векторов был положительным. В противном случае добиться выполнения такого неравенства невозможно. Предположим, что условие теоремы не выполняется. Это означает, что среди многочленов в (14) нет ни одного устойчивого. Следовательно, среди векторов в (16) нет ни одного положительного. Таким образом, если условие теоремы не выполняется, то статический регулятор по выходу не существует.

Достаточность. Пусть теперь условие теоремы выполняется. Покажем, что существует матрица K , которая обеспечит выполнение $\text{spa}(A_c) < 0$. Для этого зададим матрицу входа, например, в виде $B = C^T$. Запишем соответствующую матрицу Хаутуса

$$\begin{pmatrix} \lambda I - CAC^T & -A_{12} & I_p \\ -A_{21} & \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C & 0 \end{pmatrix},$$

и будем считать, что условие теоремы реализуется в подматрице

$$\mathcal{A}_m^n(\lambda) = \begin{pmatrix} -A_{12} & I_p \\ \lambda I - \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что $\text{spa}(\mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C) < 0$. Запишем матрицу замкнутой системы

$$(17) \ A_c = \begin{pmatrix} CAC^T + K & A_{12} \\ A_{21} & \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$

Применим аппарат линейных матричных неравенств [3]. Если (17) устойчива, то существует матрица $Y > 0$, которая обеспечивает разрешимость матричного неравенства

$$(18) \ A_c Y + Y A_c^T = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0.$$

Зададим Y в виде

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} > 0,$$

и покажем, что неравенство (18) с матрицей (17) разрешимо. В силу того, что $\text{spa}(\mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C) < 0$, то существуют матрицы $Y_{11} > 0$, $Y_{22} > 0$ и K , которые обеспечивают отрицательную определенность блоков Ψ_{11} и Ψ_{22} . Воспользуемся леммой Шура (например, [3]) и перепишем (18) в виде:

$$\Psi_{11}(Y_{11}, K) < \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T(Y_{11}, Y_{22}).$$

Откуда видно, что разрешимости последнего при некоторых матрицах $Y_{11} > 0$ и $Y_{22} > 0$ можно добиться матрицей K . Следовательно, статический регулятор по выходу существует. Теорема доказана.

Следует осветить еще один вопрос, связанный с выбором матрицы преобразования в (7). Для перехода к новому базису, в котором $C \in \mathcal{C}$, существует, вообще говоря, множество невырожденных матриц $S \in R^{n \times n}$. Так вот, если матрица A_c устойчива, то условие теоремы будет выполняться независимо от матрицы преобразования S . Действительно, пусть при некоторой матрице преобразования S_i из (7) матрица A_c устойчива. Возьмем любую другую невырожденную матрицу S_j , также как и S_i обеспечивающую условие $C \in \mathcal{C}$. В силу подобия устойчивой будет и любая другая матрица $\widetilde{A}_c$ в базисе, определяемом матрицей S_j . Таким образом, условие теоремы не зависит от выбора матрицы преобразования S .

5. Примеры

Рассмотрим статическую стабилизацию тела, вешенного в электромагнитном подвесе [2]. Тело находится в поле действия силы тяжести и силы магнитного притяжения, действующей со стороны электромагнита. Если геометрическая сумма сил равна нулю, то тело покоится. Матрица, описывающая уравнения линеаризованной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу выхода в виде

$$C = (1 \quad 0 \quad 0),$$

а матрицу входа в виде

$$B^T = (0 \quad 0 \quad 1),$$

и покажем, что задача статической стабилизации по выходу неразрешима. Матрица Хаутуса в (12) примет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda + 7.5 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В такой матрице существует только одна невырожденная 3×3 подматрица, не считая единичной. Соответствующая подматрица в матрице Хаутуса будет равна

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 7.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы равен единице $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Откуда следует, что система не является стабилизируемой по выходу, хотя пара (A, B) стабилизируема. Следовательно, условие теоремы не выполняется. Убедимся, что задача действительно неразрешима. Запишем соответствующую матрицу замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -7.5 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид:

$$\lambda^3 + 7.5\lambda^2 - k - 7.5 = 0.$$

С помощью теоремы Стодолы [10] видим, что данный многочлен невозможно сделать устойчивым ни при каком значении k . Следовательно, статический регулятор не существует. Этот пример показывает, что неправильная комбинация матриц C и B может привести к неразрешимости задачи, хотя, как будет показано ниже, при тех же размерностях задача разрешима. Зададим теперь матрицу входа в виде

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу выхода оставим в прежнем виде. Матрица Хаутуса в данном случае будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda + 7.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ сохраняет прежний вид. Рассмотрим соответствующую квадратную подматрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda + 7.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы обращается в ноль при $\lambda = -7.5$, что обеспечивает выполнение условия теоремы. Соответствующая матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_{11} + 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7.5 \end{pmatrix},$$

а ее характеристический многочлен

$$\lambda^3 + 7.5\lambda^2 - k\lambda - 7.5(k + 1) = 0.$$

При $k < -1$ получаем устойчивый многочлен, а значит, и $\text{spa}(A_c) < 0$.

Рассмотрим еще один пример – статическую стабилизацию по выходу двухзвенного перевернутого маятника. Матрица такой системы равна [3]

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу входа в виде

$$\hat{B}^T = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0),$$

а матрицу выхода в виде

$$\hat{C} = (-18.0248 \quad 19.9613 \quad -4.0071 \quad 10.5928).$$

Приведем $\hat{C}$ к виду (4). В качестве матрицы преобразования можно взять

$$S = \begin{pmatrix} -18.0248 & 19.9613 & -4.0071 & 10.5928 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате матрица входа и матрица системы в новом базисе, определяемые по формулам (8) и (9) соответственно, будут равны

$$B^T = (-4.0071 \quad 0 \quad 0 \quad 1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.8844 & 4.7663 & -12.4226 & -10.4737 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0944 & 1.7016 & -1.8844 & 0.3783 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Хаугуса:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1.8844 & -4.7663 & 12.4226 & 10.4737 & -4.0071 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -0.0944 & -1.7016 & \lambda + 1.8844 & -0.3783 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующую квадратную подматрицу

$$\begin{pmatrix} -4.7663 & 12.4226 & 10.4737 & -4.0071 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1.7016 & \lambda + 1.8844 & -0.3783 & 0 \\ -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция определителя этой подматрицы, описывается многочленом

$$\lambda^3 + 4.5\lambda^2 + 3.29\lambda + 0.967 = 0.$$

Вес коэффициенты этого многочлена положительные и, кроме того, удовлетворяют условиям теоремы Гурвица [5]. Приходим к выводу, что все корни такого многочлена расположены в $\mathbb{C}^-$. Следовательно, статический регулятор по выходу существует. При $K = 1$ получаем $\text{spa}(A_c) < 0$.

6. Заключение

В статье показано, что с помощью использования матрицы выхода блочно-однородного вида можно сформулировать критерий существования статического регулятора по выходу в виде параметрического рангового условия. Проверка такого условия проста и может быть выполнена стандартными методами линейной алгебры. Таким образом, найденный критерий можно считать решением фундаментальной задачи о существовании статического регулятора по выходу.

Автор благодарен Дмитрию Владимировичу Баландину за ценные советы.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.А. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Наука, 1976.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения* // Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.
3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007.
4. КВАКЕРНААК Х, СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М.: Мир, 1977.
5. МАЛКИН И.Г. *Теория устойчивости движения*. – М.: Наука, 1966.
6. МУХИН А.В. *О существовании статических регуляторов по выходу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 16–30.
7. МУХИН А.В. *Пресечение множеств решений матричных неравенств в задачах синтеза статических регуляторов* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 100. – С. 107–119.
8. ПЕРОВ А.И., КОСТРУБ И.Д. *О спектральной абсциссе и логарифмической норме* // Математические заметки. – 2017. – №101. – С. 562–575.
9. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
10. ПОСТНИКОВ М.М. *Устойчивые многочлены*. – М.: Наука, 1981.
11. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989.
12. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
13. HAUTUS M.L.J. *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems* // Nedert. Acad. Wetensch. – 1969. – Proc. Ser. A72. – P. 443–448.

14. NEMIROVSKII A.A. *Several NP-hard problem arising in robust stability analysis* // Math. Control, Signals, Systems. – 1994. – Vol.6. – P. 99–105.
15. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. – Vol.42. – P. 11–26.
16. SYRMOS V.L., ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. – Vol.33, №.2. – P. 125–137.

THE STATIC OUTPUT FEEDBACK EXISTENCE CRITERION

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of finding criteria for the existence of stabilizing static output feedback for linear continuous stationary systems is considered. The fact is that the existing rank criteria for the existence of static state feedback are applicable only in cases where one of the input or output matrices has full rank. In all other cases, as a rule, frequent in practice, these criteria are not applicable. It is shown that the criterion for static output feedback also exists and can be formulated as necessary and sufficient conditions. The main idea is to reduce the output matrix by means of a non-degenerate linear transformation to a certain block form. The result is a parametric rank criterion similar to the criterion for a static state feedback.

Keywords: static output feedback, Hurvitz matrix, stabilizability, linear transformation, matrix inequalities.

УДК 517.977

ББК 22.18

DOI:

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...