Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор)

Статья представляет собой обзор базовых работ по проблеме согласования характеристик (consensus problem) в многоагентных системах и по устойчивости соответствующих процедур. Первая часть статьи посвящена задаче согласования мнений агентов (при рассмотрении технических приложений используется также термин «объекты»). Во второй части рассматриваются более общие задачи согласования и предполагается, что каждый агент характеризуется $2d$ параметрами в d-мерном евклидовом пространстве (как правило, это координаты и проекции скорости). Рассматриваются процедуры построения траекторий, согласованных с заданным курсом и выстраивающих (поддерживающих) предписанную конфигурацию группы объектов. При корректировке скорости каждый агент в качестве нового ее значения выбирает определенную функцию от значений характеристик своих «соседей» и собственных характеристик. Информационные связи между агентами определяют орграф коммуникаций. Для стабилизации используется линейная обратная связь. Устойчивость движения может быть исследована в терминах, характеризующих связность орграфа коммуникаций.

Ключевые слова: многоагентные системы, децентрализованное управление, граф коммуникаций, лапласовский спектр, устойчивость, управление

1 Основные определения

Решение многих задач управления многоагентными системами связано с исследованием спектров графов (орграфов) коммуникаций и их древесной структуры. В литературе используются различные матрицы соответствующих графов (см., например, [12, 21]). Пусть G взвешенный орграф. Обозначим через $w_{ij} > 0$ вес дуги орграфа G, направленной из вершины i в вершину j. *Лапласовская матрица* (или *строчная лапласовская матрица*) $L = L(G) = (\ell_{ij})$ порядка $N \times N$ для взвешенного орграфа G определяется следующим образом: $\ell_{ij} = -w_{ij}$ если $j \neq i$ и $\ell_{ii} = -\sum\limits_{k \neq i} \ell_{ik},\ i, j = 1, \ldots, N$. Нередко вместо лапласовской матрицы строится матрица Кирхгофа, которую обычно также обозначают $L = (\ell_{ij})$. Она определяется соотношениями $\ell_{ij} = -w_{ji}$, если $j \neq i$, и $\ell_{ii} = -\sum\limits_{k \neq i} \ell_{ik},\ i, j = 1, \ldots, N$. Некоторые авторы [39] именно ее называют *ориентированным лапласианом* орграфа. Классы матриц Кирхгофа и лапласовских матриц совпадают. Если граф коммуникаций – неориентированный, то соответствующую матрицу всегда называют лапласовской и обозначают через L.

Для орграфов коммуникаций, в которых направления дуг соответствуют направлениям информационных потоков, удобно использовать матрицы Кирхгофа. В то же время, в теории цепей Маркова для описания переходов между состояниями удобно пользоваться лапласовскими матрицами.

Неотрицательная матрица P называется *примитивной*[1], если она неразложима и имеет лишь одно собственное значение с максимальным модулем. *Стохастическая матрица* – это неотрицательная матрица с единичными строчными суммами. Цепь Маркова называют *ациклической*, если ее матрица переходов примитивна. Стохастическую матрицу P и соответствующую ей однородную цепь Маркова называют

[1] Далее в терминологии в основном следуем [5].

правильными, если у матрицы P нет собственных значений, отличных от единицы и равных по модулю единице. Если P – правильная и единица является ее однократным собственным значением, то P и соответствующую цепь называют *регулярными*[2]. Для регулярной цепи при $k \to \infty$ пределы элементов $p_{ij}^{(k)}$ матриц P^k существуют и не зависят от i, но, вообще говоря, зависят от[3] j. Регулярность эквивалентна понятию SIA (Stochastic, Indecomposable, Aperiodic)[4], часто используемому в англоязычной литературе. Говорят, что две матрицы являются *однотипными*, если все их ненулевые элементы находятся в одинаковых позициях.

Если у стохастической матрицы хотя бы один столбец целиком положителен, то ее называют *матрицей Маркова* (см., например, [11, 19]). Класс таких матриц обозначим через $\mathcal{M}$. Стохастическая матрица P регулярна тогда и только тогда, когда для некоторого натурального r P^r является матрицей Маркова.

2 Дискретные модели достижения консенсуса

2.1 Модель Де Гроота

Одна из первых моделей достижения консенсуса была предложена и изучена М. Де Гроотом. В [24] он рассмотрел задачу согласования субъективных оценок неизвестного параметра. Эти оценки сопоставлены членам группы, действующей как единая команда. В основе согласования мнений, т.е. получения единой оценки для всей группы, лежат итерации, последовательно сближающие мнения агентов. Если $s(0) = (s_0^1, \dots, s_0^N)^T$ – вектор начальных мнений членов группы, а $s(1) = (s_1^1, \dots, s_1^N)^T$ – вектор мнений на следующем шаге, то $s(1) = Ps(0)$, где P – стохастическая матрица, элемент которой p_{ij} задает степень влияния мнения j-го агента на мнение i-го. На k-м шаге получаем вектор мнений $s(k) = P^k s(0)$. Согласие достижимо, если при некотором $\bar{s} \in \mathbb{R}$ для всех i имеет место $\lim_{k\to\infty} s_k^i = \bar{s}$. Согласие достижимо при любых начальных мнениях в том и только том случае, если существует предельная матрица $\lim_{k\to\infty} P^k$, и все ее строки совпадают, иными словами, если матрица P регулярна. Таким образом, в модели Де Гроота достижение консенсуса определяется сходимостью степеней стохастической матрицы влияний.

В [24] приведены некоторые достаточные условия сходимости степеней P^k: одно из них – наличие положительного столбца в матрице P^k при некотором k, т.е. принадлежность P^k классу $\mathcal{M}$ матриц Маркова (теорема 1 в [24]); другое – взаимная достижимость всех состояний цепи Маркова, соответствующей матрице P, и ее апериодичность (в этом случае P примитивна) – теорема 2 в [24].

Вероятностный вектор[5] π называют *стационарным* для стохастической матрицы P, если имеет место $\pi^T P = \pi^T$. Стационарный вектор – левый собственный вектор P, соответствующий собственному значению 1.

Как отмечено в [24], согласие достигается тогда и только тогда, когда существует вектор $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)^T$, такой, что для всех i, j имеет место $\lim_{k\to\infty} p_{ij}^{(k)} = \pi_j$. Общее мнение в этом случае определяется формулой $\sum_{i=1}^N \pi_i s_0^i$.

Если (см. теорему 3 в [24]) согласие достижимо при любых начальных мнениях, и согласованное мнение равно $\pi^T s(0) = \sum_{i=1}^N \pi_i s_0^i$, то вектор π – единственный[6] стационарный вектор для P.

Если согласие достижимо и состояние i в цепи Маркова, определяемой P, невозвратно, то, как показано в

[2] А.Н. Колмогоров, рассмотрев эргодический принцип, показал [7, условие (22b)], что *эргодичность* цепи эквивалентна ее регулярности.

[3] В [10] введено понятие *положительно регулярной цепи*, т.е. цепи, для которой дополнительно пределы $p_{ij}^{(k)}$ при $k \to \infty$ все больше нуля.

[4] Стохастическая матрицы P является SIA, если $\lim_{m\to\infty} P^m = Q$, и все строки Q одинаковы.

[5] Вектор называется вероятностным, если все его компоненты неотрицательны и их сумма равна единице.

[6] В действительности, еще в [5] (§ 7 главы 13) отмечалось, что если P регулярна, то из уравнения $\pi = P^T\pi$ вектор π определяется однозначно и каждая строка матрицы предельных вероятностей совпадает с ним.

[24], $\pi_i = 0$ и мнение i-го агента не влияет на согласованное мнение. Например, если матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

то $\pi^T = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ и консенсус определяется формулой $\frac{1}{3}s_0^1 + \frac{2}{3}s_0^2$. Поскольку состояние, соответствующее третьему агенту, – невозвратное, при определении консенсуса его мнение не учитывается. Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

согласие, вообще говоря, не достигается. Но оно достижимо, в частности, при $s_0^1 + s_0^2 = s_0^3 + s_0^4$. Существенный вопрос о том, при каких начальных векторах $s(0)$ согласие достижимо в случае нерегулярной матрицы, в [24] не изучается. Мы рассмотрим его в одной из следующих работ. Отметим, что в связи с этим вопросом могут быть использованы модели информационного управления, рассмотренные в [3].

2.2 Обобщения модели Де Гроота

Модель Де Гроота была обобщена в работе Чаттерджи и Сенеты [19], где матрица коммуникаций меняется на каждом шаге, и итеративный процесс задается произведением матриц:

(1) $\quad s(k) = P_k P_{k-1} \cdots P_1 s(0).$

Решение задачи согласования мнений в такой постановке сводится к исследованию сходимости неоднородных цепей Маркова. Базовые результаты в этой области принадлежат Дж. Хаджналу [25, 26]. Так, теорема 2 из [19] аналогична приводимой ниже теореме 3, полученной в [26]. Прежде чем перейти к результатам [25, 26], приведем более раннюю теорему [11].

Рассмотрим неоднородную цепь Маркова, характеризующуюся последовательностью стохастических матриц P_1, $P_2, \ldots$, и введем обозначение

(2) $\quad H_k = \prod_{i=1}^{k} P_i, \quad k = 1, 2, \ldots$

Заметим, что порядок умножения матриц P_i в (2) отличается от порядка умножения в (1).

Отметим также, что как для неоднородных цепей Маркова, так и в задачах достижения согласия не представляет интереса тривиальный случай $P_i = \mathbf{1}v^T$, где v^T – вероятностный вектор (см. стр. 91 в [19]). В этом случае для любой стохастической матрицы S верно $SP_i = P_i$, причем произведение P_iS – также матрица с одинаковыми строками. Таким образом, в модели (1), если хотя бы один сомножитель имеет одинаковые строки, то согласие уже достигнуто, и матрицы-множители, стоящие слева от матрицы с одинаковыми строками, не играют никакой роли.

Пусть $\mathcal{K}_1$ – множество всех примитивных матриц. В [11] отмечается, что это множество не замкнуто относительно умножения. В $\mathcal{K}_1$ выделим подмножество $\mathcal{K}_2$ следующим образом: $P \in \mathcal{K}_2$ тогда и только тогда, когда произведение P на любую матрицу из $\mathcal{K}_1$ – примитивная матрица. Нетрудно видеть, что если у примитивной матрицы все элементы главной диагонали положительны, то она принадлежит классу $\mathcal{K}_2$. Класс $\mathcal{M}$ также входит в $\mathcal{K}_2$.

Теорема 1 [11]. 1) *Если все матрицы последовательности H_k принадлежат классу $\mathcal{K}_2$ и наименьший элемент каждой матрицы не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, то цепь Маркова, определяемая этой последовательностью, является эргодической.* 2) *Если выполняется только второе условие, то для эргодичности цепи необходимо и достаточно, чтобы существовала бесконечная последовательность марковских стохастических матриц вида $M_{n_i,\,n_{i-1}} = P_{n_{i-1}+1}P_{n_{i-1}+2}\cdots P_{n_i}$, где $i = 1, 2, \ldots$ и $n_0 = 1$.*

Данная теорема весьма полезна при исследовании эргодичности неоднородных цепей Маркова.

Рассмотрим теперь результаты Хаджнала [25, 26], также применимые при решении задач согласования мнений в случае изменяющейся матрицы влияний.

В работе [25] рассматривается неоднородная цепь, матрица переходных вероятностей которой на каждом шаге регулярна. Автор вводит два специальных класса цепей Маркова и получает достаточные условия сходимости для каждого из них.

Пусть $U_i = \lim_{k\to\infty} P_i^k,\ i = 1,\, 2,\, \ldots$

Цепь Маркова с матрицами $H_k = \left(h_{is}^{(k)}\right)$ (см. (2)) называется *слабо эргодической*, если для всех $i, j, s = 1, \ldots, N$ имеет место $\left(h_{is}^{(k)} - h_{js}^{(k)}\right) \to 0$. Слабая эргодичность предполагает стремление к нулю разности между строками, но не предполагает существования предела матриц H_k. Цепь с матрицами H_k называют *сильно эргодической*, если для некоторого вероятностного вектора π

$$(3)\qquad \lim_{k\to\infty} H_k = \mathbf{1}\pi^T,$$

где $\mathbf{1}$ – вектор из единиц. Из основных результатов [25] вытекает

Следствие 1. *Если для неоднородной цепи Маркова*
1) *последовательность матриц $U_1,\, U_2,\, \ldots$ имеет предел U,*
2) *ряд $\sum(U_j P_{j+1} - U_j)$ абсолютно сходится и*
3) $\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} (1 - p_{\min}^{(j)}) = 0$, *где $p_{\min}^{(j)}$ – наименьший элемент матрицы P_j,*
то цепь Маркова с матрицами H_k является сильно эргодической.

Если выполняется только условие 3) следствия 1, то цепь – слабо эргодическая (теорема 2 в [25]).

Еще одно условие сильной эргодичности дает теорема 2.

Теорема 2 (теорема 3 в [25]). *Если в неоднородной цепи Маркова все матрицы переходных вероятностей образуют конечное коммутативное семейство регулярных матриц, то такая цепь – сильно эргодическая.*

Для неоднородной цепи Маркова, заданной последовательностью стохастических матриц $P_1,\, P_2, \ldots$, слабая эргодичность не влечет сильную. Но в модели согласования мнений Чаттерджи и Сенеты стохастические матрицы умножаются в обратном порядке, и можно показать, что аналоги слабой и сильной эргодичности эквивалентны. Несколько иначе обстоит дело, когда вместо последовательности $P_1,\, P_2, \ldots$ используется $P_r,\, P_{r+1}, \ldots$, где для данной цепи r может принимать любое натуральное значение. В этом случае для «обратного» порядка умножения стохастических матриц, как и для «прямого», сильная эргодичность не вытекает из слабой.

Пусть $H_{r,k} = (h_{ij}^{(r,k)})$ – стохастические матрицы, определяемые следующим образом [26]:

$$(4)\qquad H_{r,k} = \prod_{i=1}^{k} P_{r+i},$$

где P_i – исходные стохастические матрицы.

В [26] изучается сходимость последовательностей $H_{r,k}$ при $k \to \infty$. Как и ранее, для цепи, характеризующейся матрицами $H_{r,k}$, могут быть введены понятия слабой эргодичности, когда для всех $i, j, s = 1, \dots, N$ и $r \geqslant 0$ имеет место $(h_{is}^{(r,k)} - h_{js}^{(r,k)}) \to 0$, и сильной эргодичности, когда для всех $r \geqslant 0$ верно

$$(5) \quad \lim_{k\to\infty} H_{r,k} = \mathbf{1}\pi_r^T,$$

где π_r – некоторый вероятностный вектор, зависящий от r. При сильной эргодичности (из которой следует слабая эргодичность) мнения агентов не только сближаются, но и стабилизируются.

Даже если разности между строками матрицы $H_{r,k}$ не стремятся к нулю при $k \to \infty$, такое стремление при определенных условиях может быть обеспечено умножением $H_{r,k}$ слева на одну или несколько матриц, не являющихся эргодическими.

Известно, что произведение двух разложимых матриц может быть регулярной матрицей. И, наоборот, произведение регулярных матриц может быть разложимой матрицей. Практический интерес представляет класс регулярных матриц со следующими свойствами: 1) если матрицы принадлежат данному классу, то их произведение также ему принадлежит; 2) наличие у цепи, удовлетворяющей определенному естественному условию, бесконечного числа матриц из этого класса обеспечивает ее эргодичность.

Как следует из достаточных условий сходимости степеней P^k [24], в качестве такого класса может быть рассмотрено множество матриц, содержащих хотя бы один столбец из ненулевых элементов.

Матрицу P называют *матрицей сцеплений*, или *скремблирующей матрицей* (scrambling matrix), если для любых двух ее строк i и j существует хотя бы один столбец k, такой что $p_{ik} > 0$ и $p_{jk} > 0$.

В [26] введена *мера эргодичности* $\lambda(P)$ *для* стохастической матрицы:

$$(6) \quad \lambda(P) = \min_{i,\,j} \sum_k \min(p_{ik}, p_{jk}).$$

Легко убедиться, что P – скремблирующая матрица тогда и только тогда, когда $\lambda(P) > 0$.

Размахом $m(P)$ матрицы P называется величина

$$(7) \quad m(P) = \max_k \max_{i,j} |p_{ik} - p_{jk}|.$$

Дж. Хаджнал показал, что размах матрицы $H_k = \prod_{i=1}^k P_i$ связан с мерами эргодичности $\lambda(P_i)$ следующим неравенством (теореме 2 в [26]):

$$(8) \quad m(H_k) \leqslant \prod_{j=1}^{k} (1 - \lambda(P_i)).$$

Следует отметить, что $m(H_k) = 0$ тогда и только тогда, когда все строки H_k равны. Это утверждение вместе с неравенством (8) позволяет доказать следующее необходимое и достаточное условие эргодичности неоднородной цепи Маркова.

Теорема 3 [26]. *Неоднородная цепь Маркова эргодична тогда и только тогда, когда существует разбиение последовательности шагов (испытаний) на блоки, начинающиеся с шагов* $i_1 = 0, i_2, i_3, \dots$ *и такие, что* $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \lambda(H_{i_j,k_j})) = 0$, *где* $k_j = i_{j+1} - i_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Из теории рядов известно, что если $\lambda(H_{i_jk_j}) \neq 1$, $i = 1, 2, \dots,$ то $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \lambda(H_{i_jk_j})) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(H_{i_jk_j})$ расходится. С использованием этого факта доказывается

Следствие из теоремы 3. Если $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j)$ расходится, то цепь Маркова – эргодическая.

Кроме того, в [26] доказана

Лемма 1 [26]. *Неоднородная цепь Маркова является эргодической, если все переходные матрицы регулярны и однотипны.*

В задачах децентрализованного управления также часто используется следующий важный результат.

Теорема 4 [42]. *Пусть $P_1, \dots, P_k$ – стохастические матрицы одного порядка и для любого $w \in \mathbb{N}$ определена регулярная матрица H_w вида[7] $H_w = \prod_{i=1}^{w} P_{w_i}$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $\nu(\epsilon)$, что для любого H_w, где $w > \nu(\epsilon)$, выполняется $m(H_w) < \epsilon$.*

Таким образом, если каждая матрица $P_i,\ i = 1, \dots, k$, является регулярной, то при росте w разница между строками матриц H_w сходит на нет. В [42] отмечается, что одного лишь условия регулярности (SIA) матриц P_i для получения этого вывода недостаточно. Так, в следующем примере (где $*$ обозначает ненулевые элементы):

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приведенном в [11], произведение двух регулярных матриц не является примитивной матрицей.

Перейдем теперь к более сложным моделям согласования характеристик.

2.3 Дискретная модель согласованного движения по плоскости

В [40] была предложена следующая модель движения N автономных агентов по плоскости в разных направлениях. Направление движения (курс) каждого агента в дискретные моменты времени t усредняется им с направлениями движения $n_i(t)$ его соседей, находящихся на расстоянии не более r от него и составляющих множество $\mathcal{N}_i(t)$. В момент $t = 0$ положения агентов на плоскости произвольны; агенты имеют одинаковые по модулю и случайные по направлению скорости. Закон движения агентов имеет вид

$$(9) \quad x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t)\Delta t.$$

Скорость агента $v_i(t)$ имеет абсолютное значение v и направление, задаваемое углом $s(t)$. Закон изменения направлений движения сводится к усреднению:

$$(10) \quad s^i(t+1) = \frac{1}{1 + n_i(t)} \Big(s^i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} s^j(t) \Big),$$

где $n_i(t) = |\mathcal{N}_i(t)|$.

В [27] были получены условия сходимости для различных конфигураций группы агентов.

Занумеруем все простые графы (неориентированные, без петель, невзвешенные) на N вершинах. Пусть $\mathcal{P}$ – множество их индексов. Эти графы будем обозначать G_p, $p \in \mathcal{P}$. Обозначим через A_p и D_p матрицу смежности и диагональную матрицу валентностей (степеней вершин) графа G_p, где $p \in \mathcal{P}$. Тогда модель (10) в матричной форме имеет вид

$$(11) \quad s(t+1) = F_{\sigma(t)} s(t),$$

где $s(t) = [s_t^1, \dots, s_t^N]$ – вектор направлений движения агентов,

$$(12) \quad F_{\sigma(t)} = (I + D_{\sigma(t)})^{-1}(I + A_{\sigma(t)})$$

и $\sigma(t) : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ – функция, моменту t сопоставляющая индекс неориентированного графа коммуникаций в этот момент. В [27] функция $\sigma(t)$ названа *переключающим сигналом.* Сходимость каждого состояния $s^i(t)$ к

[7] Повторение матриц P_i в произведении допускается.

$\bar{s}$ равносильна сходимости $s(t)$ к $\bar{s}\mathbf{1}$. Однако процесс может и не сходиться, если, например, для некоторого агента i при любом $t \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{N}_i(t)$ пусто. В другом крайнем случае, если каждый агент взаимодействует со всеми остальными при всех t, то граф $G_{\sigma(t)}$ полон, и при любым начальном состоянии процесс сходится. Представляет интерес промежуточный случай, когда не для всех t графы $G_{\sigma(t)}$ полны. Исследованию этого случая и посвящена работа [27].

Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ – множество индексов всех связных графов. Из определения (12) матрицы F_p следует, что она стохастическая и ее диагональные элементы отличны от нуля.

Теорема 5 [27]. *Если для всех $t \in \mathbb{N}$ $\sigma(t) \in \mathcal{Q}$, то при любом $s(0)$ верно*

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \bar{s}\mathbf{1},$$

где число $\bar{s}$ зависит только от $s(0)$ и $\sigma(t)$.

Поскольку в [27] рассматриваются простые (т.е. неориентированные, невзвешенные, без петель) графы, в силу условия теоремы 5 каждая матрица F_p является примитивной, более того, принадлежит классу $\mathcal{K}_2$, и ее минимальный положительный элемент не меньше $\frac{1}{N+1}$. Поэтому теорема 5 есть частный случай пункта 1 теоремы 1, из которой следует, что аналог теоремы 5 верен также и для ориентированного графа.

Условие теоремы 5 может быть ослаблено. Для этого вводится понятие совместной связности совокупности графов. Графы $(G_1, \dots, G_m)$ *совместно связны*, если их объединение – связный граф. О *связности группы N агентов* на временном отрезке $[t, \tau]$ говорят, если графы $(G_{\sigma(t)}, G_{\sigma(t+1)}, \dots, G_{\sigma(\tau)})$ совместно связны.

Теорема 6 [27]. *Пусть начальное состояние $s(0)$ фиксировано и для функции $\sigma(t)$ имеется бесконечная совокупность последовательных непустых ограниченных интервалов $[t_i, t_{i+1})$, $i \geqslant 0$ такая, что на каждом из этих интервалов группа N агентов связна. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \bar{s}\mathbf{1},$$

где число $\bar{s}$ зависит только от $s(0)$ и $\sigma(t)$.

Доказательство этой теоремы основано на теореме Вольфовица (теорема 4 выше) и на результате (см. лемму 1 в [27]), согласно которому для любого множества индексов $\{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathcal{P}$, если $G_{p_1}, \dots, G_{p_m}$ – совместно связные графы, то произведение соответствующих стохастических матриц есть примитивная матрица.

Пусть P есть $(N-1)\times N$ матрица ранга $N-1$ с ядром, натянутым на вектор $\mathbf{1}$. Нетрудно доказать[8], что матричное уравнение

$$(13)\quad PF_p = \widetilde{F}_p P, \quad p \in \mathcal{P}$$

имеет единственное решение $\widetilde{F}_p$ с таким спектром $\mathrm{Sp}(\widetilde{F}_p)$, что $\mathrm{Sp}(\widetilde{F}_p) \cup \{1\} = \mathrm{Sp}(F_p)$, из чего следует

$$(14)\quad PF_{p_i}F_{p_{i-1}}\cdots F_{p_0} = \widetilde{F}_{p_i}\widetilde{F}_{p_{i-1}}\cdots \widetilde{F}_{p_0}P, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Сходимость произведения $F_{p_i}F_{p_{i-1}}\cdots F_{p_0}$ к $\mathbf{1c}^T$ равносильна сходимости $\widetilde{F}_{p_i}\widetilde{F}_{p_{i-1}}\cdots \widetilde{F}_{p_0}$ к нулевой матрице. Например, если p_0, $p_1, \dots$ – бесконечная последовательность индексов, принадлежащих $\mathcal{Q}$, то[9] в силу теоремы 4 выполняется

$$(15)\quad \lim_{i\to\infty} \widetilde{F}_{p_i}\widetilde{F}_{p_{i-1}}\dots\widetilde{F}_{p_0} = 0.$$

[8] Для этого, например, в соотношении (13) матрицу P можно заменить на квадратную, добавив к ней строку $[1 \dots 1]$, а $\widetilde{F}_p$ – на блочно-диагональную матрицу из двух блоков, один из которых равен $\widetilde{F}_p$, а другой – единичный.

[9] В силу конечности N некоторые матрицы F_p повторяются.

Отметим, что (15) имеет место, если существует единственная положительно определенная матрица M (общая матрица Ляпунова), для которой все матрицы $\widetilde{F}_p^T M \widetilde{F}_p - M$, $p \in \mathcal{Q}$ являются отрицательно определенными (см., например, лемму П.19 в [9] для случая симметричных матриц).

Однако, как отмечается в [27, с. 992], все матрицы $\widetilde{F}_p$, $p \in \mathcal{Q}$ могут быть стабильными (т.е. иметь спектральный радиус, меньший единицы), но при этом может не существовать общей матрицы Ляпунова M. Поэтому подход авторов статьи, основанный на использовании метода Ляпунова для сходящейся последовательности, не является универсальным.

Преобразуем формулу (12):

$$
\begin{aligned}
(16)\quad F_{\sigma(t)} &= (I + D_{\sigma(t)})^{-1}(I + A_{\sigma(t)}) = (I + D_{\sigma(t)})^{-1}(I + D_{\sigma(t)} - (D_{\sigma(t)} - A_{\sigma(t)})) = \\
&= I - (I + D_{\sigma(t)})^{-1}(D_{\sigma(t)} - A_{\sigma(t)}) = I - (I + D_{\sigma(t)})^{-1} L_{\sigma(t)}.
\end{aligned}
$$

Согласно (16) модель (11) представима в виде

$$
(17)\quad s(t+1) = s(t) - (I + D_{\sigma(t)})^{-1} L_{\sigma(t)} s(t) = s(t) + u(t).
$$

В [27] величина $u(t) = -(I + D_{\sigma(t)})^{-1} L_{\sigma(t)} s(t)$ трактуется как *децентрализованное управление*.

Таким образом, здесь используется общая идея децентрализованного управления: для достижения выбранной цели (в данном случае – согласия) состояние каждого агента на каждом шаге корректируется с использованием «невязок» – разностей между характеристиками данного агента и его «соседей». Тем самым, управляющие воздействия формируются не централизованно, а каждым агентом отдельно – на основании его текущего состояния и информации, полученной от «соседей».

Теорема 6 остается верна, если в (11)–(12) заменить матрицу $I + D_{\sigma(t)}$ на диагональную матрицу gI, где $g > N$. Очевидно, что и в этом случае симметричная матрица (см. (16)) $F_p = I - \frac{1}{g} L_p$, $p \in \mathcal{P}$ остается стохастической.

Лидером называют агента i, для которого $\mathcal{N}_i = \emptyset$. Следуя [27], рассмотрим группу агентов $\{0, 1, \ldots, N\}$ с одним лидером; пусть, без ограничения общности, это агент 0. Предположим, как и ранее, что все агенты движутся с одинаковыми и постоянными по модулю скоростями, причем, в отличие от курсов других агентов, курс $\bar{s}$ лидера остается постоянным. Граф коммуникаций агентов обозначим через $\overline{G}_p$ (и множество индексов таких графов – через $\overline{\mathcal{P}}$), а граф, полученный из $\overline{G}_p$ удалением вершины 0 и всех инцидентных ей ребер, обозначим G_p. Для каждого агента $i \in \{1, \ldots, N\}$ закон изменения курса имеет вид

$$
(18)\quad s^i(t+1) = \frac{1}{1 + n_i(t) + b_i(t)} \Big(s^i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} s^j(t) + b_i(t)\bar{s} \Big),
$$

где $b_i(t) = 1$, если агент i связан ребром с лидером; в противном случае $b_i(t) = 0$.

Пусть B_p – диагональная матрица порядка N, у которой i-й диагональный элемент равен 1, если в графе $\overline{G}_p$ вершины i и 0 связаны ребром. В противном случае i-й диагональный элемент равен 0. Как и ранее, A_p – матрица смежности графа G_p.

Перепишем (18) в матричной форме:

$$
(19)\quad s(t+1) = (I + D_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)})^{-1}((I + A_{\sigma(t)})s(t) + B_{\sigma(t)} \mathbf{1} \bar{s}), \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
$$

Теорема об условиях сходимости курсов движения всех N агентов к курсу $\bar{s}$ лидера (теорема 4 в [27]) аналогична теореме 6. При этом если графы $\overline{G}_{\sigma(t)}, \overline{G}_{\sigma(t+1)}, \ldots, \overline{G}_{\sigma(\tau)}$, относящиеся к интервалу $[t, \tau]$, совместно связны, то говорят, что на этом интервале все N агентов *связаны с лидером*.

В моделях с одним лидером и *непрерывным* изменением графа коммуникаций часто наблюдается эффект «вибрации» (chattering) положения агентов. Чтобы ее избежать, предполагают, что агенты обмениваются информацией и корректируют свои параметры не постоянно, а через фиксированные интервалы времени $\tau_d > 0$. Тем самым задача сводится к дискретной, и для нее имеет место следующий результат: пусть τ_d, $s(0)$ и $\bar{s}$ фиксированы, $\sigma\colon [0,\infty) \to \overline{\mathcal{P}}_p$ – кусочно-постоянная функция с моментами «переключений» t_i, отстоящими не менее, чем на τ_d, и существует бесконечная последовательность ограниченных непересекающихся интервалов $[t_i, t_{i+1}]$, в пределах каждого из которых все N агентов связаны с лидером. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \bar{s}\mathbf{1}.$$

Следует отметить, что некоторые из перечисленных выше результатов [27] являются частными случаями теорем, полученных другими авторами задолго до этой работы. Так, модель, обобщающая (10), была изучена в работах Тситсиклиса и Бертсекаса (см., например, [38, 16]), что отмечено в их заметке [17].

Замечание 1. Теорема 6 доказана в [27] довольно рутинным методом. Но в силу симметричности матриц F_p этот результат может быть выведен из пункта 1 теоремы 1. Действительно, нетрудно доказать, что если $F_{\sigma(t_i)}$, $F_{\sigma(t_i+1)}$, …, $F_{\sigma(t_{i+1})}$ – симметричные матрицы, соответствующие совместно связным графам $G_{\sigma(t_i)}$, $G_{\sigma(t_i+1)}$, …, $G_{\sigma(t_{i+1})}$, то $T_i = \prod_{k=t_i}^{t_{i+1}} F_{\sigma(k)}$ – неразложимая матрица с положительными диагональными элементами и $T_i \in \mathcal{K}$. Поэтому согласно пункту 1 теоремы 1 соответствующая неоднородная цепь регулярна.

Рассмотрим теперь некоторые модели, в которых агенты корректируют как свои координаты, так и скорости, причем время непрерывно.

3 О непрерывных моделях согласования характеристик

3.1 Модель с коррекцией скоростей

В этом разделе мы обсудим основные результаты из [39, 28, 29, 18, 41], касающиеся процедур построения траекторий, согласованных с заданным курсом и выстраивающих (поддерживающих) предписанную конфигурацию группы объектов.

Предположим теперь, что каждый агент (объект) i из группы N объектов движется в d-мерном пространстве $\mathbb{R}^d$ и характеризуется $2d$-мерным вектором координат и проекций скорости. В реальных приложениях d равно 2 или 3.

Пусть $X = \{1,\dots,N\} \times \mathbb{R}^{2d}$. Каждый элемент $z \in X$ характеризуется $2dN$ действительными координатами. При этом первые $2d$ компонент задают положение и скорость первого агента, следующие $2d$ компонент – положение и скорость второго агента и т.д. Каждой нечетной компоненте соответствует координата агента, а четной – проекция его скорости на ту же ось. С помощью кронекерова произведения каждый элемент $z \in X$ представляется в виде

$$(20) \quad z = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes z_i,$$

где e_i – N-мерный вектор с единицей в i-ой позиции и нулями в остальных позициях, z_i – вектор координат и проекций скорости i-го агента, имеющий $2d$ компонент. Если $s^i = (s_1^i, \dots, s_d^i)^T$ – положение, а $v^i = (v_1^i, \dots, v_d^i)^T$ – скорость i-го агента, то z можно записать в виде

$$(21) \quad z = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \left(s^i \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v^i \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Каждому i-му агенту в группе ставится в соответствие свое *предписанное положение* (место) в группе, задаваемое в виде $h^i = (h_1^i, \dots, h_d^i) \in \mathbb{R}^d$.

Пусть

$$z = (z^1, \ldots, z^N)^T, \quad z^i = (s_1^i, v_1^i, \ldots, s_d^i, v_d^i)^T, \quad h_s = (h^1, \ldots, h^N)^T,$$

где верхний индекс задает номер агента.

Определение 1. 1. *Вектором конфигурации* группы агентов называют вектор $h \in X$, определяемый следующим образом [39, 28]:

$$h = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes h^i \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

2. Орбита $\phi : \mathbb{R} \to X$ группы *поддерживает конфигурацию* (*formation*), если для некоторого

$$\alpha = p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } q = \frac{dp}{dt},$$

она представляется в виде

$$\phi(t) = h + \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \alpha = h + \mathbf{1}_N \otimes \alpha.$$

3. Группа *сходится к заданной конфигурации*, если существуют вектор-функции $q(\cdot), w(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, для которых имеет место $s^i(t) - h^i - q(t) \to 0$ и $v^i(t) - w(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, N$.

Каждый агент следит за характеристиками своих «соседей»; отношение соседства не меняется. Он непрерывно усредняет (с весами) значения координат соседей, сравнивает результаты усреднения с собственными координатами и полученные разности сравнивает с предписанными значениями. Например, если соседями агента i являются агенты j и k, и веса, с которыми учитываются координаты j и k, равны, то агент i вычисляет d-мерный вектор $(s^i - h^i) - 1/2((s^j - h^j) + (s^k - h^k))$ и d-мерный вектор $v^i - 1/2(v^j + v^k)$. На основании полученных результатов производится коррекция движения агента посредством «тяги», усилия (thrust).

В общем случае для i-го агента с множеством соседей $\mathcal{N}_i$ закон движения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{s}_1^i = v_1^i \\ \dot{v}_1^i = a v_1^i + f \sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} \Big((s_1^i - h_1^i) - (s_1^j - h_1^j) \Big) + g \sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} \Big(v_1^i - v_1^j \Big) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{s}_d^i = v_d^i \\ \dot{v}_d^i = a v_d^i + f \sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} \Big((s_d^i - h_d^i) - (s_d^j - h_d^j) \Big) + g \sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} \Big(v_d^i - v_d^j \Big) \end{cases} \tag{23}$$

или, в матричной форме,

$$\dot{z} = (I_N \otimes A) z + (I_N \otimes K)(L_N \otimes I_{2d})(z - h), \tag{24}$$

где L_N – матрица Кирхгофа орграфа коммуникаций на N вершинах. Элемент $\ell_{ij} < 0$ тогда и только тогда, когда i-й агент получает информацию непосредственно от j-го агента, т.е. последний является его соседом. В этом случае орграф коммуникаций, соответствующий данной матрице, содержит дугу (j, i). Поскольку для квадратных матриц A и B соответственно порядка m и n имеет место тождество $(I_m \otimes B)(A \otimes I_n) = A \otimes B$, (24) определяет более компактное выражение

$$\dot{z} = (I_N \otimes A) z + (L_N \otimes K)(z - h). \tag{25}$$

В работе [41] разности между параметрами i-го агента и его соседей задаются матрицей $(L_N \otimes I_{2d})(z - h)$, а матрица $I_N \otimes K$ рассматривается как линейный фильтр, с помощью которого может быть обеспечена сходимость к заданной конфигурации.

В данной модели матрица A имеет вид

$$(26) \quad A = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right),$$

а в более общем случае

$$(27) \quad A = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}^d & a_{22}^d \end{pmatrix}\right)$$

и

$$(28) \quad K = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_d & g_d \end{pmatrix}\right).$$

В случае $f_1 = \ldots = f_d$ и $g_1 = \ldots = g_d$ эти величины обозначаем f и g.

Определение 2. *Достижимым множеством* $\mathcal{R}(v)$ для вершины v орграфа называют множество, полученное объединением v со всеми вершинами, достижимыми из v. *Охват*[10] R – максимальное достижимое множество.

Очевидно, если орграф сильно связен, то он имеет лишь один охват R.

Далее будем использовать следующую декомпозицию матриц A и K порядка $2d$:

$$(29) \quad A = \sum_{i=1}^{4} A_i \otimes J_i, \quad K = \sum_{i=1}^{4} K_i \otimes J_i,$$

где $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем компоненты A_1 и K_1 задают связи позиционных элементов с позиционными, A_2 и K_2 – связи позиционных элементов с компонентами скорости и т.д. При этом из физических соображений можно заключить, что $A_1 = 0$ и $A_2 = I_d$.

Введем новую переменную y:

$$(30) \quad y = z - h - \mathbf{1}_N \otimes \left(p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Пусть

$$h = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \left(\xi^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta^i \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

т.е., в отличие от (22), задаются не только положения, но и скорости.

Предложение 1 (предложение 4.2 в [39]). *Пусть орграф коммуникаций группы из N агентов фиксирован. Тогда*: 1) *система, описываемая уравнением* (25), *поддерживает заданную конфигурацию тогда и только тогда, когда в* (29) $A_3 = 0$; *при этом можно положить* $\eta_k = 0$ *для всех* k;
2) *При заданных конфигурации и скоростях группы имеет место* $\dot{p} = q$ *и* $\dot{q} = A_4 q$.

[10]Не путать с *обхватом* в теории графов.

3.2 Задача устойчивости

Следующее определение основано на классической связи между устойчивостью системы (сходимостью ее траекторий) и отрицательностью действительных частей собственных значений матрицы, соответствующей закону ее движения.

Определение 3 [41]. Система, заданная уравнением (25), называется *устойчивой*, если при некоторой матрице K для каждого ненулевого λ из спектра L_N все собственные значения матрицы $A+\lambda K$ имеют отрицательные действительные части.

Теорема 7 [41]. *Пусть система* (25) *устойчива при некоторой матрице управления* K. *Тогда каждая орбита асимптотически сходится к некоторой орбите в* $h+\mathcal{V}$, *где* $\mathcal{V}$ *– подпространство, порождаемое линейными комбинациями векторов* $\{\gamma_i \otimes \rho_j\}$ *при всех* $i \in \{1,\dots,k\}$ *и* $j \in \{1,\dots,2d\}$, γ_i *– векторы, образующие базис ядра* L_N, ρ_j *– независимые решения уравнения* $\dot{\rho}_i = A\rho_i$.

Определение 4. Непустое подмножество вершин $K \subseteq V(G)$ орграфа G называют его *базовой бикомпонентой*, если все вершины, принадлежащие K, взаимно достижимы и нет дуг (w_j, w_i), где $w_i \in K$, $w_j \in V(G)\backslash K$.

В качестве примера рассмотрим группу из 5 агентов, орграф коммуникаций G которой имеет множество дуг $E(G) = \{(1,2), (1,3), (3,4), (4,3), (5,4)\}$. В G две базовых бикомпоненты: $\{1\}$ и $\{5\}$. Предположим, что $A_4 = aI_4$ и $h = (0,1,2,3,4)^T \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. В качестве базиса ядра матрицы L_N возьмем $\gamma_1 = (1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$ и $\gamma_2 = (0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$.

Поскольку $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & a\end{pmatrix}$, общее решение уравнения $\rho' = A\rho$ при $a \neq 0$ имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a}e^{at}\\0 & e^{at}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}.$$

При начальных условиях $\rho(0) = (p_0, q_0)$ подпространство $\mathcal{V}$ порождается кронекеровыми произведениями указанных выше векторов γ_1 и γ_2 на систему независимых частных решений из полного множества решений

$$(31) \quad \left\{(p_0 - \frac{q_0}{a})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{q_0}{a}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}e^{at}\right\}$$

уравнения $\rho' = A\rho$.

Поскольку порядок матрицы A равен двум, число линейно независимых решений вида (31) равно двум. Поэтому размерность пространства устойчивых решений задачи равна четырем.

3.3 Условия устойчивости

Согласно предложению 1, приведенному выше, для управления движением группы агентов может быть использована подходящая матрица A в (25). Покажем, как с помощью матриц K_3 и K_4 система может быть стабилизирована (т.е. сделана устойчивой) при заданной матрице A.

Пусть

$$\epsilon = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(L)\backslash\{0\}} \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

Предположим, что A не меняется со временем. Диагональные элементы матриц A_4, K_3 и K_4 обозначим соответственно через a_m, f_m и g_m, где $1 \leqslant m \leqslant d$.

Предложение 2 (предложение 5.1 в [39]). *Для заданной матрицы* A_4 *система всегда может быть стабилизирована; для этого достаточно выбрать* $(g_k,\, f_k)$ *такими, чтобы выполнялось* $f_k < 0,\, g_k < 0,\, f_k > -g_k(\epsilon g_k + a_k)$ *для всех* $k \in \{1, \dots, d\}$ $\big($*эквивалентное условие*: $f_k < 0,\, g_k < 0$ *и* $\epsilon > \max\{-(f_k + a_k g_k)/g_k^2,\, 0\}\big)$.

Критерий устойчивости системы (25) имеет более сложный вид [28]; см. подраздел 3.5.

В силу приведенных выше результатов для коррекции скоростей агентов может быть использована матрица A_4. Так, средние скорости системы q_0 и q_1 в моменты $t = 0$ и $t = 1$ связаны соотношением $q_1 = e^{A_4} q_0$. Отметим, что для диагональной матрицы A_4 отдельные проекции скорости не могут при данном подходе менять знак. Кроме того, использование (31) ограничивается тем фактом, что физические характеристики лишь краткосрочно могут расти экспоненциально.

В заключение этого подраздела приведем пример, в котором система с заданной конфигурацией может менять направление движения. Предположим, что $d = 2$, $K_3 = fI_d$, $K_4 = gI_d$, и система движется по окружности на плоскости.

Теорема 8 (теорема 5.2 в [39]). *Пусть* $a_0 > 0$ *фиксировано,* $f_k < 0$, $g_k < 0$ *и* $f_k > -g_k(\epsilon g_k + a_0)$. *Если* $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix}$ *и* $|m| \leqslant 2\sqrt{|\epsilon f + \epsilon^2 g_k^2|} \neq 0$, *то группа устойчиво движется по окружности кривизны* $\kappa = m/v_0$ *с постоянной скоростью* $v_0 \neq 0$.

3.4 Оценивание скорости сходимости к заданной конфигурации

Согласно определению 3 система, заданная уравнением (25), может не быть устойчивой даже при чисто действительном спектре матрицы L_N. Это происходит, если собственные значения некоторых диагональных $(2{\times}2)$-блоков матрицы $A + \lambda_i K$ при действительных λ_i, принадлежащих спектру L_N, имеют неотрицательные действительные части.

Среди собственных значений матрицы системы (25) могут быть комплексные. Характеристический многочлен системы равен произведению квадратных трехчленов

(32) $x^2 - (a_{22} + \lambda g)x - \lambda f,$

где f, g – элементы матрицы управления K. Дискриминант уравнения $x^2 - (a_{22} + \lambda g)x - \lambda f = 0$ есть

(33) $D = (a_{22} + \lambda g)^2 + 4\lambda f.$

Чтобы не допустить приближения[11] к 0 действительной части собственного значения соответствующего диагонального блока, f при фиксированном g подбирают так, чтобы дискриминант (33) был отрицателен и соотношение

(34) $\dfrac{(a_{22} + \lambda g)^2}{4\lambda} < -f$

выполнялось для всех λ из спектра L_N.

Таким образом (см. утверждение 6.1 в [28]) действительные части корней (32) равны $(a_{22} + \lambda g)/2$, и показателем качества сходимости может служить величина $(a_{22} + \lambda_1 g)/2$, где λ_1 – наименьшее собственное значение матрицы L_N с действительным спектром.

Спектр матрицы L_N для симметричного орграфа коммуникаций всегда действителен. Но изложенный подход применим не только к симметричным орграфам, но и ко всем другим орграфам коммуникаций, имеющим действительный спектр соответствующей матрицы. Отметим, что известный прием, состоящий в увеличении скорости сходимости за счет колебаний, в этой задаче не всегда применим.

[11] Это приближение привело бы к замедлению (за счет корня (32), в запись которого дискриминант входит со знаком +) сходимости к заданной конфигурации.

3.5 Необходимое и достаточное условие устойчивости

В этом подразделе мы рассмотрим критерий устойчивости системы с ориентированным графом коммуникаций между агентами.

В [29] показано, что если при некоторой матрице управления K для любой заданной конфигурации h каждое решение системы уравнений (25) сходится к h, то для матрицы A верно $a^i_{21} = 0,\ i = 1, \ldots, d$.

Как было отмечено в [28] (замечание 4.3), если нуль – собственное значение L_N с алгебраической кратностью 1, то агенты поддерживают заданную конфигурацию h тогда и только тогда, когда $(L_N \otimes I_{2d})(x - h) = 0$. Действительно, ядро матрицы L_N натянуто на вектор $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$, а ядро $L_N \otimes I_{2d}$ – на векторы $\mathbf{1} \otimes \mathbf{e}_i$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{2d}$.

Если нуль – простое собственное значение матрицы L_N орграфа коммуникаций (или, эквивалентно, если орграф коммуникаций содержит входящее корневое дерево для случая, когда дуги проводятся от лидеров и строится лапласовская матрица или же содержит исходящее корневое дерево, если дуги проводятся к лидеру и строится матрица Кирхгофа [1, 21, 12]), то, как показано в [28] (теорема 4.4), устойчивость матрицы $A+\lambda K$ для всех ненулевых λ эквивалентна[12] сходимости процесса, описываемого (25), к вектору заданной конфигурации h.

Матрица $A + \lambda K$ блочно-диагональна и каждый ее блок, повторяющийся d раз, имеет размерность 2. Заметим, что определитель каждого такого блока выражается трехчленом $\varphi(x) = x^2 - (a_{22} + \lambda g)x - \lambda f$, коэффициенты которого в общем случае комплексны. Если $u = u_1 + u_2 i$ – корень $\varphi(x)$, то $\bar{u} = u_1 - u_2 i$ – корень многочлена $\bar{\varphi}(x) = x^2 - (a_{22} + \bar{\lambda} g)x - \bar{\lambda} f$. Многочлен $\varphi(x)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчив многочлен $\varphi(x)\bar{\varphi}(x)$. Последний многочлен имеет четвертую степень и действительные коэффициенты. Для проверки его устойчивости в [28] используется критерий Рауса-Гурвица. Напомним, что согласно этому критерию для того, чтобы действительные части всех корней многочлена были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы все последовательные главные миноры матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов многочлена, были положительны. Для нахождения значений f и g (элементов матрицы K), гарантирующих устойчивость многочлена $\varphi(x)\bar{\varphi}(x)$, согласно утверждению 4.5 из [28] нужно решить следующую систему из четырех неравенств[13] относительно f и g (все остальные параметры постоянны и $\lambda = \alpha + \beta i$):

$$(35)\quad \begin{cases} -a_{22} - \alpha g > 0 \\ -2\alpha f + (a_{22} + \alpha g)^2 + \beta^2 g^2 > 0 \\ a_{22}\alpha f + (\alpha^2 + \beta^2) f g > 0 \\ -\alpha f (a_{22} + \alpha g)^2 - \beta^2 f g (a_{22} + \alpha g) - \beta^2 f^2 > 0 \end{cases} .$$

В [41] показано, что если в системе уравнений движения группы на плоскости матрица A задается как[14]

$$(36)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

то при действительном спектре матрицы коммуникаций устойчивость матрицы $A + \lambda K$ (т.е. отрицательность всех действительных частей спектра) не зависит от m, и для нее достаточно, чтобы числа f и g были отрицательными.

[12] Эта теорема в одну сторону доказана в [29] (предложение 4.3), где установлено, что если нуль – простое собственное значение матрицы L_N орграфа коммуникаций, то из устойчивости матрицы $A + \lambda K$ для всех ненулевых λ следует $L(x - h) \to 0$. Однократность нуля как собственного значения L_N в формулировку предложения 4.3 не входит, но, судя по доказательству, неявно предполагается.

[13] Левые части этих неравенств есть определители Гурвица.

[14] В этом случае группа объектов движется по окружности с кривизной m/v_0, где v_0 – скорость группы.

Для сходимости системы при не полностью действительном спектре L_N кроме отрицательности f и g требуется выполнение следующих дополнительных условий (см. утверждение 4.4 в [41]):

$$-\frac{f}{g} < \frac{\alpha}{\beta^2}(\alpha^2+\beta^2);$$

$$|m| < \frac{-f|\beta|}{g\alpha} - \frac{g(\alpha^2+\beta^2)}{|\beta|}$$

для всех не действительных собственных значений $\lambda = \alpha + i\beta$ матрицы коммуникаций.

3.6 Группа с независимыми лидерами

В этом подразделе рассмотрим поведение группы, члены которой следят за *лидерами* (т.е. агентами l, для которых $\mathcal{N}_l = \emptyset$), чьи орбиты – заданные функции времени. Такие лидеры называются *независимыми*. Лидер, не являющийся независимым, называется *зависимым*. Движение зависимого лидера l, положение и скорость которого обозначим через x_l и v_l, определяется уравнениями

$$(37)\quad \dot{x}_l = v_l, \quad \dot{v}_l = A_4 v_l.$$

По определению, каждое максимальное исходящее дерево орграфа коммуникаций может содержать не более одного лидера. Предположим, что хотя бы один из лидеров является независимым, т.е. имеет заданную априори орбиту

$$z_l(t) \equiv \psi_l(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \dot{\psi}_l(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Пусть имеется $N+k$ агентов, из которых k – независимые лидеры. Множество вершин, соответствующих независимым лидерам, обозначим через $\mathcal{L}$. Для каждого $l \in \mathcal{L}$ положим $h^l = 0$, т.е. положения лидеров без ограничения общности предполагаются равными нулю (вообще говоря, h^l определяется из (22)). Из соответствующей матрицы L_{N+k} размерности $N+k$ удалим все строки, которые соответствуют независимым лидерам. Через L^i обозначим i-й столбец матрицы порядка $N\times(N+k)$. Наконец, пусть $P = P_N$ – матрица, полученная из матрицы порядка $N\times(N+k)$ удалением столбцов, соответствующих независимым лидерам. Как и ранее, z – вектор положения-скорости для агентов $1,\dots,N$. Установлена следующая

Лемма 2 (лемма 6.2 в [39]). *Движение группы с множеством $\mathcal{L}$ независимых лидеров описывается уравнением*

$$(38)\quad \dot{z} = (I_N\otimes A)z + (P_N\otimes K)(z-h) + \sum_{l\in\mathcal{L}} L_l \otimes (Kz_l(t)).$$

Проведя замену переменных $y = z - h$, получаем

$$(39)\quad \dot{y} = (I_N\otimes A + P_N\otimes K)y + g(t) = My + g(t).$$

Пусть $G = \bigcup_{i=1}^k R_i$ – представление графа в виде объединения всех охватов R_i. Проиндексируем множество охватов и определим множество $\mathcal{I}$ следующим образом: $i \in \mathcal{I} \Leftrightarrow$ (R_i не содержит независимого лидера).

Предположим, что $\{\gamma_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ – множество линейно независимых собственных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям матрицы L_N.

Теорема 9 (теорема 6.4 в [39]). *Пусть матрица управления K обеспечивает устойчивость системы. Предположим, что $y_p(t)$ – произвольное частное решение системы* (39). *Тогда каждая орбита асимптотически сходится к орбите вида $h + y_p(t) + \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – линейная оболочка векторов $\{\gamma_i \otimes \rho_j\}_{i\in\mathcal{I},\, j\in\{1,\dots,2d\}}$, γ_i принадлежит ядру L_{N+k}, а $\rho_1,\dots,\rho_{2d}$ есть $2d$ линейно независимых решений системы уравнений $\dot{\rho}_j = A\rho_j$.*

Как известно, общий вид

$$y(t) = e^{Mt}y(0) + e^{Mt}\int_0^t e^{-Mt}g(s)dt$$

решения системы уравнений (39) есть сумма любого частного решения и общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = (I_N \otimes A + P_N \otimes K)y = My.$$

Тем самым, теорема 9 может быть доказана тем же способом, что и теорема 7.

Устойчивость при децентрализованном управлении группой объектов, движение которых описывается уравнением

$$\dot{z} = (I_N \otimes A)z + (L_N \otimes K)(z - h), \tag{40}$$

обеспечивается [39, 28] выбором матрицы управления K. После замены переменных и приведения матрицы $I_N \otimes A + (L_N \otimes K)$ к блочно-диагональному виду [28] необходимое и достаточное условие устойчивости может быть получено применением критерия Рауса-Гурвица к диагональным блокам вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_i f_1 & a_{22} + \lambda_i f_2 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где λ_i – ненулевые собственные значения (не обязательно действительные) матрицы Кирхгофа орграфа коммуникаций. Как следует из предложения 4.5 в [28], действительность собственных значений λ_i существенно упрощает условие устойчивости и оставляет бóльшую свободу выбора элементов матрицы управления K, действующей однородно по отношению ко всем агентам. Необходимое и достаточное условие действительности спектра для одного специального класса орграфов (а именно, для орграфов с кольцевой структурой) получены в [15]. Ряд характеристик переходных процессов системы таких, как затухание, степень устойчивости, колебательность (см., например, [13, с. 211]) в децентрализованном управлении также связаны с спектром матрицы L_N орграфа коммуникаций. Как следует из [28], для отсутствия колебаний необходима действительность спектра орграфа коммуникаций. При этом условии скорость сходимости группы к заданной конфигурации зависит как от элементов матрицы K, так и от минимального ненулевого собственного значения матрицы L_N (см. предложение 6.1 в [28]). Достаточное условие устойчивости, выполнение которого зависит от величины минимальной действительной части собственного значения L_N, дано в предложении 6.1 в [39].

4 Заключение

В настоящем обзоре основное внимание было уделено двум направлениям в литературе по децентрализованному управлению многоагентными системами. Это, во-первых, работы, где анализ дискретных моделей согласования характеристик опирается на классические результаты теории цепей Маркова и стохастических матриц, и, во-вторых, работы по управлению совместным движением объектов в евклидовом пространстве с выстраиванием (поддержанием) заданной конфигурации.

Никоим образом не претендуя на полноту (только за последние 10 лет опубликованы многие тысячи работ по теоретико-графовым моделям децентрализованного управления), в заключение упомянем некоторые другие существенные исследования (см. также обзор в [12]).

В начале 2000-х годов проблема децентрализованного управления группой движущихся объектов со структурой информационных связей, задаваемой графом, изучалась в [22, 23]. В [30] исследовалась проблема достижения согласия при фиксированной и меняющейся (посредством переключений) топологии коммуникаций. Рассмотрены протоколы согласования без временной задержки и с временной задержкой, и для обоих случаев получены условия сходимости. При этом специальное внимание уделено случаю, когда орграф коммуникаций сбалансирован. Отметим, что в указанной работе авторы «переоткрывают» некоторые результаты по алгебраической теории ориентированных графов, полученные в [1, 2] и известные им по переписке с авторами настоящего обзора (подробнее см. в [20]).

Исследуя алгебраическую связность в сетях «малого мира» (small-world networks) Р. Олфати-Сабер [31] рассматривает способы существенного увеличения этого показателя, что, в свою очередь, значительно ускоряет процесс достижения консенсуса. В работе также изучено соотношение между связностью сети и ее устойчивостью по отношению к неисправностям узлов и линий связей. Упомянем также работу [32], где приведен обзор исследований по проблемам достижения согласия и кооперации в сетевых многоагентных системах.

Еще в одном обзоре [33], посвященном информационному согласию в многоагентном кооперативном управлении, рассматриваются задачи сходимости процедур согласования характеристик при фиксированной и меняющейся структуре связей, а также асинхронные процедуры с временной задержкой обмена данными. Последний раздел этой работы посвящен синтезу алгоритмов согласования. Проблема консенсуса для дискретных и непрерывных моделей с меняющейся структурой связей была также исследована в [34]. Результаты этой работы пересекаются с результатами [27], которые частично обсуждались выше. В частности, речь идет о теореме, согласно которой для достижения согласия в системе с меняющейся структурой связей достаточно, чтобы в определенных временных интервалах объединение графов коммуникаций содержало остовное дерево на множестве всех вершин, соответствующих агентам.

В недавней работе [35] был предложен вычислительный алгоритм для согласования траекторий при ограничениях, наложенных на управление. Этот алгоритм обеспечивает согласование траекторий в случае, когда лидеры группы и структура связей меняются. Алгоритм был применен для согласования траекторий движения роботов. Реализации протоколов согласования траекторий агентов посвящена и работа [36]. Отметим также монографию [37], которая подытоживает исследования по децентрализованному управлению, проведенные до 2008 г. активно работающей научной группой из государственного университета штата Юта в США.

Среди русскоязычных работ по различным аспектам управления групповым движением упомянем здесь [4, 6, 8, 14]. Разумеется, отечественные исследования по данной проблематике, практически неизвестные на Западе, требуют отдельного рассмотрения и изложения в ведущих международных изданиях. В противном случае не подозревающим об их существовании западным авторам придется постепенно переоткрывать все полученные них работах результаты.

Список литературы

[1] АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и Телемеханика. –2000. –№ 9. –С. 15–43.

[2] АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Остовные леса орграфа и их применение* // Автоматика и Телемеханика. –2001. –№ 3. –С. 108–133.

[3] БАРАБАНОВ И.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Динамические модели информационного управления в социальных сетях* // Автоматика и Телемеханика. –2010. (в печати).

[4] ГАБАСОВ Р., ДМИТРУК Н.М., КИРИЛЛОВА Ф.М. *Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов* // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. –2008. –Vol. 48, № 4. –С. 593–609.

[5] ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц.* –3-е изд. –М.: Наука, 1988. –576 с.

[6] ЗОЛОТУХИН Ю.Н., КОТОВ К.Ю., НЕСТЕРОВ А.А. *Децентрализованное управление подвижными объектами в составе маневрирующей группы* // Автометрия. –2007. –Vol. 43, № 3. –С. 31–39.

[7] КОЛМОГОРОВ А.Н. *Об аналитических методах в теории вероятностей* // Успехи математических наук. –1938. –№ 5. –С. 5–41.

[8] КУРЖАНСКИЙ А.Б. *Задача управления групповым движением. Общие соотношения* // Доклады Академии РАН. –2009. –Vol. 426, № 1. –С. 20–25.

[9] ПОЛЯК Б.Т. *Робастная устойчивость и управление* / П.С. Щербаков. –М.: Наука, 2002. –303 с.

[10] РОМАНОВСКИЙ В.И. *Дискретные цепи Маркова.* –М.–Л.: Гостехиздат, 1949. –436 с.

[11] САРЫМСАКОВ Т.А. *Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова* // Доклады Академии Наук СССР. –1953. –Т. 90, № 1. –С. 25–28.

[12] ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и Телемеханика. –2009. –№ 3. –С. 136–151.

[13] ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Методы теории автоматического управления* / А.Г. Бутковский. –М.: Наука, 1971. –744 с.

[14] ФУНАСИ Р., АРАКОВА М., ТСУДА Ю., Кавагучи ДЖ. *Децентрализованное управление группой спутников с учетом информационного обмена* // Электронный журнал «ТРУДЫ МАИ». 2009. –№ 9.

[15] AGAEV R.P. *Which digraphs with ring structure are essentially cyclic?* / R.P. Agaev, P.Y. Chebotarev // Advances in Applied Mathematics. doi:10.1016/j.aam.2010.01.0052010 (в печати).

[16] BERTSEKAS D.P. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods* / D.P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis // Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989. Способ доступа: http://hdl.handle.net/1721.1/3719.

[17] BERTSEKAS D.P. *Comments on "Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules"* / D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis // IEEE Transactions on Automatic Control, –2007. –Vol. 52, № 5. –P. 968–969.

[18] CAUGHMAN J.S. *Kernels of directed graph Laplacians* / J.S. Caughman, J.J.P. Veerman // The Electronic Journal of Combinatorics. –2006. –Vol. 13. № 1. R39.

[19] CHATTERJEE S. *Towards consensus*: *Some convergence theorems on repeated averaging* / S. Chatterjee, E. Seneta // J. Appl. Probab. –1977. –Vol. 14. –P. 89–97.

[20] CHEBOTAREV P. *On graph theoretic results underlying the analysis of consensus in multi-agent systems* // Proc. IEEE, In press.

[21] CHEBOTAREV P., AGAEV R. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // Linear Algebra Appl. –2002. –Vol. 356. –P. 253–274.

[22] FAX J.A. *Graph Laplacians and Stabilization of Vehicle Formations* / J.A. Fax, R.M. Murray // Proc. 15th IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelona, Spain. –2002.

[23] FAX J.A. *Information flow and cooperative control of vehicle formations* / J.A. Fax, R. M. Murray // IEEE Transactions Automatic Control, –2003. –Vol. 49, № 9. –P. 1465–1476.

[24] DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. –1974. –Vol. 69, №. 345. –P. 118–121.

[25] HAJNAL J. *The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. –1956. –Vol. 52. –P. 67–77.

[26] HAJNAL J. *Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. –1958. –Vol. 54. –P. 233–246.

[27] JADBABAIE A. *Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules* / A. Jadbabaie, J. Lin, A. S. Morse // IEEE Transaction on Automatic Control. –2003. –Vol. 48, № 6. –P. 988–1001.

[28] LAFFERRIERE G. *Decentralized control of vehicle formations* / G. Lafferriere, A. Williams, J.S. Caughman, J.J.P. Veerman // Sys. Control Lett. –2005. –Vol. 54, № 9. –P. 899–910.

[29] LAFFERRIERE G. *Graph theoretic methods in the stability of vehicle formations* / G. Lafferriere, J.S. Caughman, A. Williams // Proc. of American Control Conference ACC2004, July 2004, –P. 3729–3734.

[30] OLFATI-SABER R.M. *Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays* / R.M. Olfati-Saber, R.M. Murray // IEEE Transactions Automatic Control, –2004. –Vol. 49, № 9. –P. 1520–1533.

[31] OLFATI-SABER R.M. *Ultrafast consensus in small-world networks* // Proc. American Control Conference, –2005. –P. 2371–2378.

[32] OLFATI-SABER R.M. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems* / R.M. Olfati-Saber, J.A. Fax, R.M. Murray // Proc. IEEE, –2007. –Vol. 95, № 1. –P. 215–233.

[33] REN, W. *Information consensus in multivehicle cooperative control* / W. Ren, R. W. Beard, E. M. Atkins // IEEE Control Syst. Magazin, –2007. –Vol. 27, № 2. –P. 71–82.

[34] REN W. *Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies* / W. Ren, R. W. Beard // IEEE Transactions Automatic Control, –2005. –Vol. 50, № 5. –P. 655–661.

[35] REN W. *Consensus tracking under directed interaction topologies: Algorithms and experiments* // Transactions Control Systems Technology, –2010. –VOL. 18, №. 1. –P. 230–237.

[36] REN W. *Experimental Validation of Consensus Algorithms for Multivehicle Cooperative Control* / W. Ren, H. Chao, W. Bourgeous, N. Sorensen, Y.Q. Chen // Transactions Control Systems Technology, –2010. –VOL. 16, №. 4. –P. 745–752.

[37] REN W. *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control* / W. Ren, W R.W. Beard. –London: Springer-Verlag. –2008.

[38] TSITSIKLIS J.N. *Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms* / J.N. Tsitsiklis, D.P. Bertsekas, M. Athans // IEEE Transactions Automatic Control, –1986. –Vol. AC-31, № 9. –P. 803–812.

[39] VEERMAN J.J.P. *Flocks and formations* / J.J.P. Veerman, G. Lafferriere, J.S. Caughman, A. Wiiliams // J. Statistical Physics. –2005. –Vol. 121, № 5–6. –P. 901–936.

[40] VICSEK T. *Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles* / T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben Jacob, I. Cohen, O. Schochet // Phys. Rev. Lett. –1995. –Vol. 75. –P. 1226–1229.

[41] WILLIAMS A. *Stable Motions of Vehicle Formations* / A. Williams, G. Lafferriere, J.J.P. Veerman // Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, December 2005, –P. 72–77.

[42] WOLFOWITZ J. *Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices* // Proc. Amer. Mathematical Soc. –1963. –Vol. 15. –P. 733–736.