УДК 519.217.8
ББК 22.17

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ МАРКОВСКИМИ ЦЕПЯМИ

Ицков А.Г. [1] , Лыкосов И.В. [2]
(Ижевский Государственный технический университет, Ижевск)

Рассматривается задача выбора оптимального управления марковской цепи. Описывается способ сведения задачи к задаче максимизации функции. Приведены примеры приложений.

Ключевые слова: цепи Маркова, управление, принцип максимума, дискретный аналог.

Введение

Пусть имеется заданное множество "больших"текстов, отличных друг от друга, которые мы можем назвать "авторскими". Если дан некоторый "короткий"текст, состоящий из символов того же алфавита, то традиционно рассматривается задача обнаружения авторства "короткого"текста, как задача классификации или распознавания. В данной работе решается в некотором смысле обратная задача: как, сохраняя смысловое содержание "короткого"текста, написать его с использованием стилистики "авторских"текстов. С математической точки зрения каждый "авторский"текст является реализацией некоторой марковской цепи и ставиться задача оптимального управления марковской цепью на данном множестве "авторских текстов как пространства альтернатив.

[1] Александр Григорьевич Ицков, кандидат физико-математических наук, доцент (тел. (3412)59-47-80 pmi.istu@gmail.com).
[2] Илья Васильевич Лыкосов, студент (ilikosov@gmail.com).

Подобная постановка может найти применение в задачах поиска строк в тексте, распознавания авторства текста, выявления возможных грамматических ошибок.

1. Постановка задачи

Обозначим через A^* множество символов, которые могут использоваться в наших веб-приложениях, назовем это множество алфавитом. Через A_k обозначим множество всех последовательностей символов длины k, назовем такие последовательности словами. Пусть $A = \cup A_k$ – множество слов. Последовательность слов назовем текстом. Будем считать, что тексты различимы лишь стилистически, если:

1) Их длины совпадают.

2) Слова, стоящие на одинаковых местах в тексте либо совпадают, либо являются синонимами, т.е несут одинаковую смысловую нагрузку.

Качественно задачу можно сформулировать так: используя статистические зависимости между словами в "авторских"текстах, найти наиболее вероятные тексты, которые отличимы лишь стилистически от "короткого текста".

2. Математическая модель

Допустим, что зависимость между словами в тексте простейшая,т.е. появление в тексте нового слова зависит лишь от предыдущего слова. Поэтому тексты можно рассматривать в качестве реализаций некоторой марковской цепи. Рассмотрим некоторую теорию, связанную с цепями Маркова.

2.1. УПРАВЛЯЕМЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть некоторая система, находясь в одном из своих M возможных состояний, переходит на каждом шаге k многошагового процесса $(k = 1, 2, \dots, N)$ из i-го состояния в j-е

$(i, j = 1, 2, \ldots, M)$ в соответствии с матрицей переходных вероятностей P,

$$P = (p_{i,j})_{i,j=1}^{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix},$$

где p_{ij} – вероятность перехода системы из i-го состояния в j-е, и выполняются условия:

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1.$$

Пусть $x\,(k-1, i)$ – вероятность того, что система после $k-1$ шагов оказалась в i-том состоянии, $x\,(k, j)$ – вероятность того, что после k шагов она окажется в j-том состоянии. Функции $x\,(k, j)$ описываются рекуррентным соотношением

$$x\,(k, j) = \sum_{i=2}^{M} x\,(k-1, i)\, p_{ij},$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Пусть имеется множество переходных матриц $P_r = (p_{ij^r})_{ij=1}^{M}$, где $r = 1, 2, \ldots, S$. Будем называть это множество пространством альтернатив или пространством стратегий.

Рассмотрим процессы, в которых вероятность перехода p_{ij} может быть представлена выражением:

$$p_{ij} = \sum_{r=1}^{S} U\left(k,i,r\right) p_{ij}^{r},$$

где p_{ij}^{r} – вероятность перехода системы из i-го состояния в j-е при использовании стратегии r, а $U\left(k,i,r\right)$ – параметр управления, который можно трактовать как вероятность принятия решения под номером r на k-том шаге при i-том состоянии системы.

При этом должны выполняться условия:

$$0 \leqslant U\left(k,i,r\right) \leqslant 1, \quad \sum_{r=1}^{S} U\left(k,i,r\right) = 1.$$

В тех случаях, когда из физических или каких либо других соображений на выбор вероятностей $U\left(k,i,r\right)$ накладываются ограничения, при которых один из элементов вектора $U\left(k,i\right) = \left(U\left(k,i,1\right), U\left(k,i,2\right), \ldots, U\left(k,i,S\right)\right)$ равен единице, а остальные равны нулю. То есть управление представляется как выбор одной из альтернатив.

2.2. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим такую задачу

$$K(N) = K(N, x(k,i), U(k,i,r)) = \tag{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \left(x(k-1,i) \sum_{r=1}^{S} U(k,i,r) a(k,i,r) \right) \to \max.$$

Задача максимизации формулируется следующим образом: необходимо отыскать для каждого шага k вектор оптимального управления $\hat{U}(k)$, обеспечивающий максиму функционалу (1) при уравнениях связи и условиях:

(2) $$x(k,j) = \sum_{i=1}^{M} x(k-1,i) \sum_{r=1}^{S} U(k,i,r) p_{ij}^{r},$$

(3) $$k = 1,2,\ldots,N \quad i,j = 1,2,\ldots,M,$$

(4) $$0 \leqslant U\left(k,i,r\right) \leqslant 1, \quad \sum_{r=1}^{S} U\left(k,i,r\right) = 1.$$

Начальные значения вектора $x(0,i)$, матрицы P_r и функции $a(k,i,r)$ следует считать заданными.

Введем дополнительную функцию:

(5) $$x_0(k) = \sum_{i=1}^{M} x(k-1,i) \sum_{r=1}^{S} U(k,i,r) a(k,i,r)$$

Введем также вспомогательные (сопряженные) функции по числу переменных системы (2) – $\phi(k,i)$, $i = 1,2,\ldots,M$, и вспомогательную функцию $\phi_0(k)$, соответствующую $x_0(k)$, такие что

(6) $$\phi(N,i) = 0, \; i = 1,2,\ldots,M,$$

(7) $$\phi_0(k) = 1, \; k = 1,2,\ldots,N.$$

Оптимальным по отношению к функционалу (1) управлениями являются также векторы управления $\hat{U}(k)$, которые доставляют на каждом шаге максимум вспомогательной функции (гамильтониану):

$$H^k\left(x(k-1),\phi(k),U(k)\right)=H^k\left(x(k-1,i),\phi(k,i),U(k,i,r)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\phi(k,j)x(k,j)+\phi_0(k)x_0(k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\phi(k,j)\sum_{i=1}^{M}x(k-1,i)\sum_{r=1}^{S}U(k,i,r)p_{ij}^r+$$

$$+\phi_0(k)\sum_{i=1}^{M}x(k-1,i)\sum_{r=1}^{S}U(k,i,r)a(k,i,r),$$

$$k=1,2,\ldots,N,\quad i,j=1,2,\ldots,M,\quad r=1,2,\ldots,S.$$

С учетом равенства (6) преобразуем гамильтониан к виду:

$$H^k\left(x(k-1),\phi(k),U(k)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{M}x(k-1,i)\sum_{r=1}^{S}U(k,i,r)\left(\sum_{j=1}^{M}\phi(k,j)p_{ij}^r+a(k,i,r)\right).$$

Запишем выражение для максимума гамильтониана:

$$\hat{H}^k\left(x(k-1),\phi(k),U(k)\right)=\max_{U(k)}H^k\left(x(k-1),\phi(k),U(k)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{M}x(k-1,i)\max_{U(k)}\sum_{r=1}^{S}U(k,i,r)\left(\sum_{j=1}^{M}\phi(k,j)p_{ij}^r+a(k,j,r)\right).$$

Вспомогательные функции находятся из системы:

$$\phi(k-1,i) = \frac{\partial H^k\left(x(k-1),\phi(k),\hat{U}(k)\right)}{\partial x(k-1,i)},$$

которую решаем при начальных условиях (6) и получаем на каждом шаге оптимальное значение вектора $\hat{U}(k)$.

В силу линейности максимум по U гамильтониана достигается на границе области, а силу ограничений (4)следует утверждение:

В векторах $\hat{U}(k)$ всегда один из элементов равен единице, а остальные нулю.

3. Марковская модель ошибок

Для определения модели необходимо:

1) Определить альтернативы, стратегии поведения.

2) Определить состояния цепи.

3) Найти оценки переходных матриц.

Поскольку мы можем выделить множества текстов $A_1, A_2, \ldots, A_S$, то стратегией будет считаться использование слов из сопутствующего множества.

Состояния определяются в зависимости от точности результатов и от затратности вычислений. Если выбирать как состояние несколько слов, то у нас будут матрицы переходных вероятностей большого размера. Однако, если брат за состояние слоги, то уменьшаем точность. Причем синонимы в различных стратегия отвечают за одно и тоже состояние.

Для каждого теста A_r оценкой переходной вероятности из i-го состояния в j-е, будет частота появления в тексте сопутствующей пары.

Допустим, что любой текст, имеющий тот же смысл, что и строка поиска и ту же структуру слов, является реализацией цепи Маркова, доставляющей максиму следующему функционалу:

$$K(N) = \sum_{k=1}^{N} x(k, i_k), \tag{8}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_N$ – наша строка запроса. Физический смысл функционала таков, что мы с максимальной вероятностью пытаемся повторить структуры нашей строки запроса.

То есть необходимые нам результаты поиска есть наиболее вероятные реализации процесса, доставляющего максимум данному функционалу.

Распишем наш функционал, используя формулу:

$$K(N) = \sum_{k=1}^{N} x(k, i_k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} x(k-1, i) \sum_{r=1}^{S} U(k, i, r) p^r_{ii_k}. \tag{9}$$

Как мы видим он совпадает с функционалом вида (1) при

$a(i, k, r) = \frac{p^r_{ii_k}}{p^r_{ij}}$, что дает нам возможность найти оптимальный

процесс, используя дискретный аналог принципа максимума.

После нахождения оптимального процесса можно составить некоторые его реализации и уже искать не только строку запроса, но и полученные реализации, тем самым улучшая результат поиска.

Литература

1. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. Оптимальное управление случайными процессами. //М.:Наука, - 1973г.
2. КЕМЕНИ ДЖ. Конечные цепи Маркова //М.:Наука - 1970г.
3. КЕМЕНИ ДЖ. Кибернетические модели. Некоторые модели. //М.:Советское ралио, - 1972г.

4. КОНДРАТЕНКО Г.С. Прикладные модели управления случайными процессами. //М.:Машиностроение, - 1993г.

ARTICLE TITLE

Alexander Itskov, Izhevsk State technical university, Izhevsk, Cand.Sc., assistant professor (тел. (3412)59-47-80 pmi.istu@gmail.com).
Ilia Likosov,Izhevsk State technical university, Izhevsk, student(ilikosov@gmail.com).

Abstract: In this article the problem of optimal control of Markov chain is examined. The method of reduction this problem in the problem of function maximization is described. The examples of applications are given.

Keywords: Markov chains, control, maximum principle, discrete analog.