УДК 681.5.015 + 519.246.25
ББК 22.17 + 22.18

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Карташов В.Я.[1]**, Новосельцева М.А.**[2]
(*ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», Кемерово*)

В статье предлагается метод дискретного моделирования стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией. Основной математический аппарат, используемый в работе, - теория непрерывных дробей. На основе непрерывных дробей разработан алгоритм моделирования случайного процесса, установлено соответствие между непрерывной и дискретной моделями случайного процесса, обоснован выбор шага дискретизации.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, корреляционная функция, непрерывная дробь, формирующий объект, белый шум, непрерывная передаточная функция, шаг дискретизации, дискретная передаточная функция, стохастическое разностное уравнение.

---

[1] *Владимир Яковлевич Карташов, заведующий кафедрой автоматизации исследований и технической кибернетики ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», доктор технических наук, профессор* (*kartash@kemsu.ru*).
[2] *Марина Александровна Новосельцева, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», кандидат технических наук, доцент* (*aanov@pochta.ru*).

При исследовании и проектировании систем контроля, диагностики, управления и обучения сложных объектов возникает необходимость исследования их функционирования под влиянием различных факторов. Особую сложность данная задача приобретает при наличии воздействия на объект случайных факторов. Проведение экспериментальных и теоретических исследований объекта зачастую затруднительно ввиду их сложности и затратности. Поэтому особое значение и актуальность приобретают работы, связанные с построением, использованием и совершенствованием моделей. Моделирование, являясь одним из инструментов научного познания, нашло широкое распространение в различных сферах жизнедеятельности.

При решении задач имитационного моделирования часто возникает необходимость в формировании дискретных последовательностей стационарных случайных процессов с заданным видом корреляционной функции. Обычно в таких ситуациях закон распределения случайного процесса не принимается во внимание [18, 19, 3].

В настоящее время разработаны различные методы цифрового моделирования стационарных случайных процессов $y(t)$ с заданной корреляционной функцией $R_{yy}(t)$. При имитации стационарного процесса осуществляется переход от его непрерывной модели к дискретной. Для осуществления этого перехода используется ряд алгоритмов. Численные методы дают методические ошибки при получении реализаций случайных процессов, величина которых определяется выбранным шагом интегрирования [28, 29], поэтому в данной работе они рассматриваться не будут.

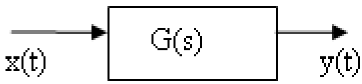


Рис. 1. Формирующий фильтр

Часто задача цифрового моделирования сводится к определению характеристик формирующего фильтра (линейного преобразователя) при известных характеристиках входного и выходного сигналов (рис. 1) [28, 19, 6, 18, 3]. Если линейный динамический объект с передаточной функцией $G(s)$ находится под воздействием непрерывного стационарного случайного сигнала $x(t)$, имеющего корреляционную функцию $R_{xx}(t)$, то на выходе данного объекта в установившемся режиме формируется непрерывный стационарный случайный сигнал $y(t)$ с корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ [18]. Связь между случайными процессами $x(t)$ и $y(t)$ выражается через передаточную функцию формирующего фильтра.

Известно, что спектральная плотность выходного сигнала $S_{yy}(\omega)$ формирующего фильтра определяется в соответствии с выражением [28, 19, 1, 18, 3]

(1) $$S_{yy}(\omega) = \left|G(j\omega)\right|^2 S_{xx}(\omega),$$

где $S_{xx}(\omega)$ - спектральная плотность входного сигнала, $\left|G(j\omega)\right|^2$ - квадрат модуля амплитудно-фазовой частотной характеристики системы с непрерывной передаточной функцией $G(s)$.

В качестве входного сигнала часто используют белый шум – стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_{xx}(t)=\delta(t)$. Если входное воздействие объекта – белый шум, то спектральная плотность реакции в установившемся режиме имеет вид [18, 20]

(2) $$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\pi}\left|G(j\omega)\right|^2 .$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой.

Одним из таких способов моделирования является метод скользящего суммирования [28, 19, 6, 3], в котором представление оператора линейного преобразования формирующего фильтра осуществляется в виде скользящей суммы с весовыми коэффициентами a_k

(3) $$y(n)=\sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k).$$

Существует ряд способов определения коэффициентов a_k на основе значений корреляционной функции выходного сигнала, например, с помощью решения нелинейной системы уравнений [19, 3]. Однако применение данного метода затруднительно из-за сложности решения указанной системы и большого количества вычислительных операций. Кроме того, данный метод имеет методическую погрешность ввиду ограниченности количества членов ряда N.

Другим способом получения весовых коэффициентов a_k является разложение функции спектральной плотности в ряд Фурье [3]. Способ предполагает большую подготовительную работу при вычислении интеграла по известной спектральной плотности моделируемого процесса и также имеет погрешность моделирования.

Способ получения весовых коэффициентов методом факторизации может быть использован при моделировании случайных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью [3]. Для использования данного метода по имеющейся корреляционной функции выходного сигнала $R_{yy}(t)$ необходимо найти непрерывную передаточную функцию формирующего фильтра $G(s)$. Порядок проведения факторизации следует из представления непрерывной передаточной функции (НПФ) линейного динамического объекта в модальной форме:

(4) $$G(s)=K\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-s_i^{н})}{\prod_{j=1}^{n}(s-s_j^{п})},$$

где s - переменная преобразования Лапласа, $s_1^{н},s_2^{н},\ldots,s_m^{н}$ - нули НПФ, $s_1^{п},s_2^{п},\ldots,s_n^{п}$ - полюса НПФ, K - коэффициент усиления, m

и n - целые положительные числа ($m \le n$). Выражая далее весовую функцию цифрового фильтра через полюсы НПФ и используя в форме скользящего суммирования (3) цифровое преобразование интеграла свертки [28, 19, 6, 18, 3]:

$$(5) \quad y(n) = \Delta t \sum_{k=1}^{N} h(n-k)x(k),$$

получаем искомый алгоритм формирования дискретной реализации случайного процесса, где $h(n)$ - весовая функция цифрового фильтра, Δt - шаг дискретизации, N – число значений весовой функции, зависящее от вида корреляционной функции. Однако данный способ является малоэффективным ввиду больших временных затрат. Кроме того, не ясен остается выбор N и Δt.

Более быстродействующим методом моделирования является рекуррентный алгоритм авторегрессии-скользящего среднего [28, 19, 6, 18]:

$$(6) \quad y(k) = \sum_{i=0}^{m} a_i x\left(\left(k-i\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i y\left(\left(k-i\right)\right),$$

где a_i, b_i,- коэффициенты модели авторегрессии со скользящим средним, m и n - целые положительные числа ($m \le n$). Данный метод не имеет методической погрешности [3, 27], а параметры моделирующего алгоритма выражаются в явном виде через параметры корреляционной функции.

Переход от непрерывной модели корреляционной функции к дискретной модели (6) может осуществляться различными способами. Авторы предлагают выбирать методы нахождения этих коэффициентов исходя из условия задачи. Например, к таковым относятся следующие: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые [28, 19, 18, 27, 3], прямые методы расчета в z-плоскости [19].

В работах [29, 9] проанализированы существующие методы перехода от непрерывной к дискретной модели (прямые и обратные разности Эйлера, билинейное преобразование, метод Смита на основе z-преобразования), указаны их недостатки. Кроме того, проведено исследование перехода от непрерывной модели к дискретной, установлено соответствие между непрерывными и дискретными моделями, определено влияние шага дискретизации на точность дискретного моделирования детерминированных объектов.

Метод преобразования аналоговых фильтров в цифровые основывается на определении полюсов передаточной функции [3]. На основе интеграла Дюамеля выводится рекуррентный алгоритм для формирования значений случайного процесса. Метод достаточно прост при наличии у передаточной функции простых действительных полюсов. Однако если передаточная функция имеет кратные полюса, вычисления получаются более громоздкими и не эффективными. Кроме того, при усложнении вида передаточной функции, в частности при наличии у нее комплексно сопряженных полюсов, необходимо вычисление ряда интегралов, что уменьшает быстродействие алгоритма.

В [27, 18] разработан достаточно эффективный метод моделирования случайных процессов на основе z-преобразования $z = e^{s\,\Delta t}$, который является точным при простом виде НПФ формирующего объекта (знаменатель НПФ – полином не выше 2-ой степени). Если же выражение НПФ сложное, то авторы предлагают осуществить переход к дискретной модели при помощи билинейного преобразования $s = \dfrac{2\,(z-1)}{\Delta t\,(z+1)}$. В работах [9, 29] подробно описаны все недостатки подстановочного метода билинейного преобразования. Подстановочные методы не обладают необходимой точностью моделирования. При усложнении объекта и увеличении шага дискретизации отклонение модельных значений от реальных существенно растет, более того, схема дискретного моделирования может стать неустойчивой. Кроме того, не устанавливается соответствие между непрерывной и дискретной моделью. Авторы [18, 27] сами отмечают, что при использовании билинейного преобразования метод моделирования становится приближенным.

Например, в [27] авторы приводят пример моделирования стационарного случайного процесса со спектральной плотностью

$$S_{yy}(\omega) = \frac{2}{\pi\left(4 + 5\omega^2 + \omega^4\right)}.$$

При использовании z-преобразования (шаг дискретизации равен 0.1) модель случайного процесса на выходе формирующего фильтра имеет вид:

$$y(k\Delta t) = 0.1218\,x(k-1) + 1.7235y(k-1) - 0.741y(k-2)\,.$$

Билинейное преобразование искажает структуру модели, и конечно-разностное уравнение принимает другой вид:

$$\begin{gathered} y(k\Delta t) = 0.003x(k) + 0.006\,x(k-1) + 0.003x(k-2) + \\ +1.7235y(k-1) - 0.741y(k-2) \end{gathered}.$$

Похожий метод цифрового моделирования на основе получения параметров рекуррентных алгоритмов методом факторизации приведен в [3]. В [19] метод на основе z-преобразования называется рекурсивной фильтрацией. Авторы дополнительно устанавливают зависимость между погрешностью восстановления корреляционной функции и величиной Δt, объемом выборки и числом модельных экспериментов.

Методы канонических и неканонических представлений [28] основаны на представлении модели случайного процесса в виде детерминированной функции случайных величин. Канонические представления основаны на выражении вида:

(7) $$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(t)\,,$$

где v_k - некоррелированные величины, φ_k - детерминированные функции, определяемые по корреляционной теории случайных процессов с помощью известных алгоритмов. Аппарат канонических разложений разработан В.С. Пугачевым в [20]. Используя в (7) обобщенные ряды Фурье, можно представить $y(t)$ в виде разложения по системе ортогональных функций с некоторым заданным весом. Однако при моделировании данным методом в разложениях учитывается конечное число членов, поэтому метод имеет методическую ошибку, зависящую от этого числа.

В неканонических представлениях модель процесса задается в виде нелинейной функции от конечного числа случайных величин. Неканонические представления не обладают асимптотическим свойством, то есть оценка корреляционной функции по N измерениям не стремится к истинной корреляционной функции с ростом N [28].

Актуальным и малоисследованным вопросом цифрового моделирования является точностный анализ полученной модели случайного процесса. Помимо погрешностей расхождения истинной и рассчитанной по смоделированному случайному процессу корреляционных функций, необходимо устанавливать соответствие между непрерывной и дискретной моделью. Проблема установления соответствия между полученной дискретной моделью и исходной непрерывной моделью случайного процесса остается малоисследованной. В [19] для оценки качества моделирования предлагается использовать фазовые портреты. Авторы предлагают сравнивать фазовый портрет сгенерированной последовательности и эталонный фазовый портрет, полученный по истинной корреляционной функции процесса, на основе среднеквадратического отклонения ошибок. При этом необходим достаточно большой объем смоделированных данных (5000-10000 отсчетов). Вопрос установления соответствия дискретной и непрерывной моделей по-прежнему остается открытым.

При разработке методов моделирования постоянно подчеркивается значимость величины шага дискретизации моделируемого случайного процесса, однако не приводится конкретных правил по его выбору. Авторы обычно ограничиваются рекомендациями о его задании на основе сравнения с интервалом корреляции случайного процесса (шаг дискретизации должен быть значительно меньше интервала корреляции) [18]. Помимо этого для определения шага дискретизации предлагается анализировать составляющие корреляционной функции на предмет выявления ее характерных особенностей [18, 19], либо строго зафиксировать шаг дискретизации для каждого конкретного вида корреляционной функции случайного процесса [19]. Последнее предложение не всегда может удовлетворять условию практической задачи или совпадать с ней, что ограничивает область физической применимости данного метода. Кроме того, большинство методов дает хорошие результаты моделирования только лишь при малых шагах дискретизации ($\Delta t \to 0$).

Таким образом, задачей данной статьи является разработка и исследование способа перехода от непрерывной к *точной дискретной модели* в форме дискретной передаточной функции (ДПФ), причем предлагаемый способ должен восстанавливать как порядок, так и значения параметров дробно-рационального выражения для дискретной модели формирующего объекта. Под *точной цифровой моделью* понимается моделирующий цифровой алгоритм, не имеющий методической погрешности, то есть дискретные реализации, полученные с помощью ЭВМ, и последовательности выборочных значений процесса в точности совпадают при любом шаге дискретизации, если пренебречь погрешностью округления чисел в ЭВМ [29, 3].

Для цифрового моделирования стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ в данной работе будет использоваться теория непрерывных дробей [10].

Любой непрерывный стационарный процесс с корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ и спектральной плотностью

$$(8) \quad S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau\,,$$

которая является дробно-рациональной функцией от круговой частоты ω, можно рассматривать как реакцию непрерывного стохастического линейного динамического объекта (далее по тексту формирующего объекта) в установившемся режиме на входное воздействие $x(t)$ в форме белого шума [18]. Известно, что НПФ такого стохастического объекта будет иметь вид [18, 11]

$$(9)\quad G(s)=\frac{R_{xy}(s)}{R_{xx}(s)}=\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_0},$$

где m, n – целые положительные числа ($m \le n$), $a_m,\ldots, a_0$, $b_n,\ldots,b_0$ - постоянные коэффициенты, $R_{xx}(s)$, $R_{xy}(s)$ - преобразование Лапласа корреляционной функции входного сигнала и взаимной корреляционной функции входного и выходного сигналов соответственно.

В случае, если $x(t)$ - импульсное воздействие (функция Дирака), то его корреляционная функция имеет вид

$$(10)\quad R_{xx}(t)=\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}.$$

Тогда выражение (9) преобразуется к виду

$$(11)\quad G(s)=\frac{R_{xy}(s)}{L(\delta(t))}=\frac{R_{xy}(s)}{1}=R_{xy}(s).$$

Используя основное определение (9) и введя z-преобразование $z=e^{s\,\Delta t}$, можно оценить дискретную передаточную функцию (ДПФ) формирующего объекта [11]:

$$(12)\quad G(z)=\frac{R_{xy}(z)}{R_{xx}(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}R_{xy}(n\Delta t)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}R_{xx}(n\Delta t)z^{-n}}=$$

$$=\frac{R_{xy}(0)+R_{xy}(\Delta t)z^{-1}+\ldots+R_{xy}(n\Delta t)z^{-n}+\ldots}{R_{xx}(0)+R_{xx}(n\Delta t)z^{-1}+\ldots+R_{xx}(n\Delta t)z^{-n}+\ldots}.$$

Для определения z-преобразования δ-функции введена специальная функция, называемая функцией единичного отсчета, которая определяется следующим образом [23]:

$$(13)\quad \delta[n]=\delta^{*}(n\Delta t)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}.$$

Таким образом, z-преобразование функции единичного отсчета равно 1.

Тогда выражение (12) приобретает вид

$$(14)\ \ \mathrm{G(z)} = \frac{R_{xy}(0) + R_{xy}(\Delta t)z^{-1} + \ldots + R_{xy}(n\Delta t)z^{-n} + \ldots}{1 + 0\cdot z^{-1} + \ldots + 0\cdot z^{-n} + \ldots}$$

Модель ДПФ формирующего объекта в форме дробно-рационального выражения имеет вид:

$$(15)\ \ G(z) = \frac{a_m z^{-m} + \ldots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_n z^{-n} + \ldots + b_1 z^{-1} + 1} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i z^{-i}} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z)$, $Q_n(z)$ - полиномы от комплексной переменной z-преобразования, *m, n* – целые положительные числа – порядки этих полиномов.

Известно также другое определение ДПФ [11, 5] в виде

$$(16)\ \ G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t)z^{-n}}{\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)z^{-n}} =$$

$$= \frac{y(0) + y(\Delta t)z^{-1} + \ldots + y(n\Delta t)z^{-n} + \ldots}{x(0) + x(n\Delta t)z^{-1} + \ldots + x(n\Delta t)z^{-n} + \ldots},$$

где $X(z)$, $Y(z)$ – z-преобразование числовых последовательностей значений случайного входного $\{x(n\Delta t)_{n=0}^{\infty}$ и случайного выходного $\{y(n\,\Delta t)\}_{n=0}^{\infty}$ сигналов.

Благодаря операторным свойствам z-преобразования дискретную модель формирующего объекта можно представить как в форме *стохастического разностного уравнения*

$$(17)\ \ y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^{m} a_i x\big((k-i)\Delta t\big) - \sum_{i=1}^{n} b_i y\big((k-i)\Delta t\big),$$

относящегося к классу процессов авторегрессии со скользящим средним, так и в форме *детерминированного разностного уравнения*

$$(18)\ \ R_{xy}(k\,\Delta t) = \sum_{i=0}^{m} a_i R_{xx}\big((k-i)\Delta t\big) - \sum_{i=1}^{n} b_i R_{xy}\big((k-i)\Delta t\big).$$

Выражение (17), полученное на основе корреляционной функции $R_{yy}(t)$, позволяет осуществить цифровое моделирование случайного процесса $y(t)$, являющегося откликом формирующего объекта на воздействие $x(t)$ в виде белого шума с математическим ожиданием M_x=0 и дисперсией $D_x = \sigma_x^2$. Таким образом, для получения конечно-разностного уравнения (17) необходимо найти ДПФ формирующего объекта $G(z)$. В качестве аппарата для нахождения $G(z)$, то есть идентификации формирующего объекта, будем использовать теорию непрерывных дробей, в частности модифицированный метод В.Висковатова [8, 10].

Таблица 1. Типовые корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов

Корреляционная функция $R_{yy}(t)$	Спектральная плотность $S_{yy}(\omega)$
$\sigma_x^2\, e^{-\alpha\|t\|}$	$\sigma_x^2 \dfrac{2\alpha}{\pi\left(\omega^2+\alpha^2\right)}$
$\sigma_x^2\, e^{-\alpha\|t\|}\, \|t\|$	$\sigma_x^2 \dfrac{\left(\alpha^2-\omega^2\right)}{\pi\left(\omega^2+\alpha^2\right)^2}$
$\sigma_x^2\, e^{-\alpha\|t\|}\, t^2$	$\sigma_x^2 \dfrac{4\alpha\left(\alpha^2-3\omega^2\right)}{\pi\left(\omega^2+\alpha^2\right)^2}$
$\sigma_x^2\, e^{-\alpha\|t\|} \cos(\beta\, \|t\|)$	$\sigma_x^2 \dfrac{2\alpha\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\pi\left(\omega^2-(\alpha^2+\beta^2)\right)^2+4\alpha^2\omega^2}$

На основе корреляционной функции выходного сигнала $R_{yy}(t)$ будем определять спектральную плотность $S_{yy}(\omega)$ реакции в установившемся режиме. Чтобы получить выражение $S_{yy}(\omega)$ необходимо вычислить интеграл вида (8), либо воспользоваться уже готовыми таблицами соответствия, приводимыми, например, в [18]. В *Таблице 1* приведены типовые корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности случайных процессов.

Для цифрового моделирования стационарного случайного процесса $y(t)$ необходимо получить согласно (1) выражение для квадрата амплитудно-фазовой частотной характеристики формирующего объекта

(19) $\left|G(j\omega)\right|^2 = \pi S_{yy}(\omega)$.

Далее определяется НПФ формирующего объекта. Для этого можно воспользоваться формулами перехода [18], либо готовыми таблицами [19], либо методом факторизации [18].

Возможно получение НПФ $G(s)$ формирующего фильтра, необходимой для цифрового моделирования случайного процесса $y(t)$ с заданной корреляционной функцией $R_{yy}(t)$, без перехода от $R_{yy}(t)$ к спектральной плотности $S_{yy}(\omega)$ [18, 26]. Осуществить это возможно используя соотношение [18]

(20) $G(s)\,G(-s) = R_{yy}(s) + R_{yy}(-s)$.

Полученная таким образом НПФ будет полностью совпадать с $R_{xy}(s)$ - преобразованием Лапласа взаимной корреляционной функции вход-выходного сигналов формирующего объекта. Взяв обратное преобразование Лапласа от $G(s)$, получим весовую функцию $h(t)$ формирующего объекта.

Для нахождения ДПФ формирующего объекта воспользуемся методом SP-идентификации стохастического объекта [11, 12, 13].

Зададим шаг дискретизации Δt. Будем считать, что $h(0)\neq 0$. На основании (14) определяется идентифицирующая матрица:

(21) $$\begin{array}{r} (-1)-\textit{строка} \\ (0)-\textit{сторока} \\ 1-\textit{сторока} \\ \ldots \\ \ldots \\ m-\textit{сторока} \\ \ldots \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ h(0) & h(\Delta t) & h(2\Delta t) & \ldots & h(n\Delta t) & \ldots \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(\Delta t) & \alpha_1(2\Delta t) & \ldots & \alpha_1(n\Delta t) & \ldots \\ \alpha_2(0) & \alpha_2(\Delta t) & \alpha_2(2\Delta t) & \ldots & \alpha_2(n\Delta t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m(0) & \alpha_m(\Delta t) & \alpha_m(2\Delta t) & \ldots & \alpha_m(n\Delta t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

в которой (-1)-строка представляет собой импульсную функцию [23], (0)-строка содержит значения весовой функции $h(n\Delta t)$ формирующего объекта в моменты времени $\{n\Delta t\}_0^N$, тождественно совпадающие с взаимной корреляционной функцией вход-выходного сигналов $R_{xy}(k\Delta t)$. (-1)- и (0)-строки являются начальными условиями при построении матрицы, а элементы $\alpha_m(n\Delta t)$ последовательно определяются с помощью соотношения [12]:

$$(22)\quad \alpha_m(n\Delta t) = \frac{\alpha_{m-2}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-1}(0)},$$

где $\alpha_{-1}(n\Delta t) = \delta(n\Delta t)$, $\alpha_0(n\Delta t) = h(n\Delta t)$, m=1,2,3,..., а n=0,1,2,...
Тогда элементы первого столбца матрицы (21) порождают частные числители правильной С-дроби [10, 8], что и позволяет получить ДПФ формирующего объекта:

$$(23)\quad G(z) = \left[\frac{h(0)}{1};\frac{\alpha_1(0)\,z^{-1}}{1}\right]_1^\infty = \cfrac{h(0)}{1+\cfrac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1+\cfrac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1+\ldots}}}.$$

При аппроксимации дробно-рациональных функций конечного порядка частные числители в (23) обладают тенденцией уменьшения их величины. В модифицированном алгоритме В.Висковатова при аппроксимации дробно-рациональной функции конечного порядка в матрице (21) наблюдается появление нулевой строки, номер которой позволяет идентифицировать порядок функции.

Если в некоторой i-ой строке (i=0, 1, 2, ...) матрицы (21) конечное число k_i первых элементов равны 0, а последующие элементы отличны от нуля, то необходимо осуществить сдвиг влево на k_i элементов до появления в нулевом столбце ненулевого элемента и далее продолжить определение других элементов матрицы (21) по правилу (22). Для i-ой строки при восстановлении правильной С-дроби (23) элемент α_i (0) умножается на z^{-k_i}.

В этом случае от правильной С-дроби (23) переходим к обобщенной С-дроби [10] следующего вида:

$$(24)\quad G(z)=\left[\frac{\mathrm{h}(0)\,z^{-k_0}}{1};\ \frac{\alpha_{\mathrm{i}}(0)\,z^{-k_i}}{1}\right]_1^{\infty}.$$

Свернув непрерывную дробь вида (23), получим ДПФ формирующего объекта и далее перейдем к дискретной модели случайного процесса вида (17).

Для того, чтобы смоделировать случайный процесс на основе (17) с дисперсией равной D_y=$R_{yy}(0)$, необходимо рассчитать дисперсию $D_x=\sigma_x^2$ белого шума $x(t)$. Поскольку M_x=M_y=0, то для определения D_x можно воспользоваться равенством, полученным на основе (17):

$$(25)\quad M\left(y^2(k)\right)=M\left(\sum_{i=0}^{m}a_i x(k-i)-\sum_{i=1}^{n}b_i y(k-i)\right)^2.$$

Проведя несложные преобразования в (25), возможно получить формулу связи D_y и D_x через коэффициенты полученной модели.

Важным вопросом при цифровом моделировании случайных процессов на основе (17) является определение такого значения $k_{уст}$, начиная с которого случайный процесс $y(k\Delta t)$ можно считать стационарным, а режим воспроизведения – установившемся. Поэтому, необходимо отбросить искаженный участок моделируемого процесса $y(k\Delta t)$ [3], где k=0,…,($k_{уст}$ -1).

Если модель формирующего объекта устойчива, то весовая функция с ростом k стремится к нулю. Для определения времени переходного процесса в литературе используют различные методы, например, в [18] его определяют через корни характеристического уравнения цифровой модели и используя логарифмические частотные характеристики.

В данной работе временем переходного процесса $k_{уст}$ будем считать тот интервал, по истечении которого значения весовой функции не превысят заданное малое значение Δ [16, 25]

$$|h(k)|\le \Delta.$$

Значение Δ выбирают обычно равным Δ=0.05.

Далее будут проведены исследования данного алгоритма моделирования на стационарных случайных процессах с различными корреляционными функциями.

Пример 1.

При исследовании различных промышленных электроустановок и следящих систем [28, 15] возникают случайные процессы с корреляционной функцией вида

(26) $R_{yy}(t) = e^{-|t|}$.

Требуется осуществить цифровое моделирование случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26).

Находим по *Таблице 1* спектральную плотность, соответствующую корреляционной функции (26). Далее согласно (15) определяется выражение для квадрата амплитудно-фазовой частотной характеристики формирующего объекта

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{2}{\omega^2 + 1}.$$

По корням числителя и знаменателя, а также их коэффициентам [18] определяем НПФ формирующего объекта

(27) $G(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{s+1}$.

Используя обратное преобразование Лапласа, находим весовую функцию формирующего объекта, равную

(28) $h(t) = \sqrt{2}\, e^{-t}$.

Возьмем Δt=1, тогда идентифицирующая матрица в модифицированном алгоритме В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1.4142 & 0.5203 & 0.1914 & 0.0704 & 0.0259 & \dots \\ -0.3679 & -0.1353 & -0.0498 & -0.0183 & - & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Последняя строка матрицы содержит нулевые элементы, следовательно, производим останов вычислительной процедуры.

Тогда ДПФ формирующего объекта аппроксимируется элементами первого столбца полученной матрицы, порождающими конечную правильную С-дробь:

(29) $$G(z)=\frac{1.4142}{1-0.3679\,z^{-1}}\,.$$

ДПФ приводит к дискретной математической модели случайного процесса вида (17):

(30) $$y(k\Delta t)=1.4142\,x(k\Delta t)+0.3679y((k-1)\Delta t)\,.$$

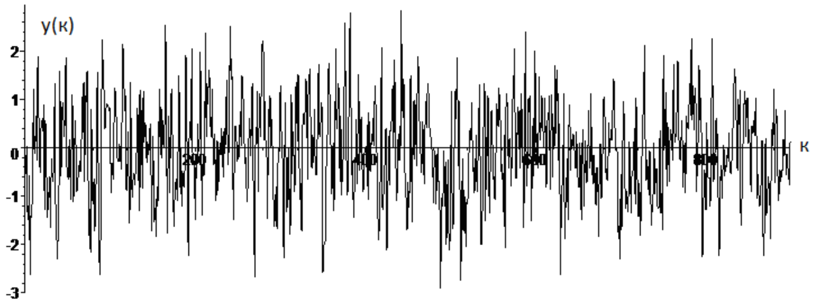


Рис. 2. График процесса y(kΔt) (30)

Определим длительность переходного процесса. Значение весовой функции $h(4)$=0.0259, следовательно $k_{уст}$=4.

Рассчитаем дисперсию, с которой необходимо моделировать белый шум $x(t)$ с учетом того, что дисперсия моделируемого процесса $D_y=R_{yy}(0)=1$. Тогда

$$M(y^2(k))=1.4142^{\,2}M(x^2(k))+0.3679^2M(y^2(k-1))\,,$$

$$D_y=1.4142^{\,2}D_x+0.3679^2D_y\,,$$

откуда D_x=0.4323. График процесса $y(k\Delta t)$ (k= 0, …, 900+ $k_{уст}$) приведен на рис. 2.

Отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию смоделированного процесса $y(k\Delta t)$ по формуле [21, 1]:

(31) $$R^{м}_{yy}(k\Delta t)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}y(i\Delta t)y((i+k)\Delta t)\,,$$

где N=900. Графики истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ приведены на рис. 3.

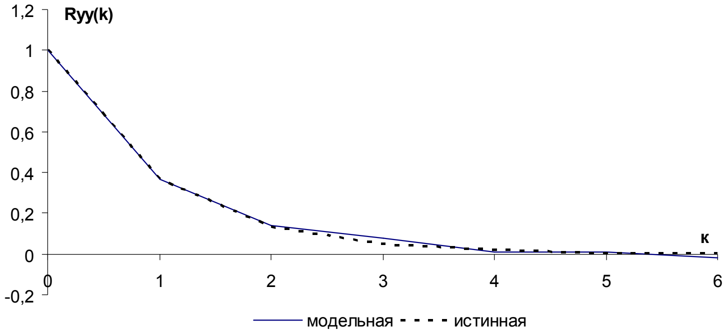


Рис. 3. Графики корреляционных функций к Примеру 1

Рассчитаем дисперсию расхождений между $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ и $R_{yy}(k\Delta t)$:

(32) $D_e = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}(e(k) - M_e)^2$,

где

$$e(k) = R_{yy}^{м}(k\Delta t) - R_{yy}(k\Delta t),$$

$$M_e = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} e(k),$$

m – число значений корреляционных функций. Таким образом, дисперсия расхождений D_e=0.0002, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования.

В [19] модель аналогичного случайного процесса с корреляционной функцией (26) была получена аппроксимацией на основе аналитического метода Ньютона с шагом дискретизации Δt=0.4, при этом погрешность расхождения D_e =0.0009, объем выборки который потребовался, равен 1000 значений $y(k\Delta t)$.

Исследуем возможности выбора величины шага дискретизации при цифровом моделировании случайных процессов, а также определим какое влияние он оказывает на восстановление ДПФ.

Рассмотрим с единых позиций влияние величины шага дискретизации Δt на взаимнооднозначное соответствие между НПФ и ДПФ. Начало таких исследований заложено в трудах [9, 29]. Следует отметить, что при переходе от НПФ к ДПФ трудна формализация определения дополнительных нулей и полюсов, появляющихся в ДПФ объекта.

Наиболее распространенным переходом от НПФ к ДПФ является преобразование $z=e^{s\Delta t}$ s-плоскости в z-плоскость. В работах [9, 29] был обоснован выбор z-преобразования в качестве основы для определения понятия соответствия между непрерывной и дискретной моделью при цифровом моделировании. Такое преобразование представляет собой периодическую функцию, которая отображает основную полосу $\left(-i\dfrac{\pi}{\Delta t}, i\dfrac{\pi}{\Delta t}\right)$ на всю z-плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 4).

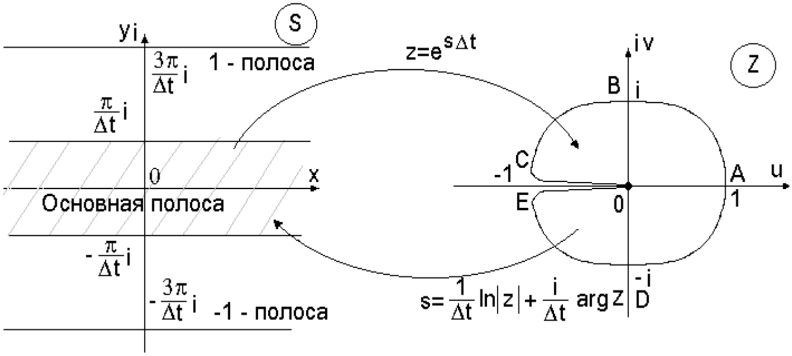


Рис. 4. Отображение s- и z-плоскостей.

Все дополнительные полосы отображаются в аналогичную z-плоскость и для взаимнооднозначности необходимо в z-плоскости рассматривать многолистную (риманову) поверхность, для которой "склеивание" отдельных листов осуществляется вдоль линии разрезов. При отображении основной полосы s-плоскости в z-плоскость отметим следующее: интервал $\left(-i\frac{\pi}{\Delta t}, i\frac{\pi}{\Delta t}\right)$ в s-плоскости отображается в единичную окружность EDABC; прямые $y = \pm i\frac{\pi}{\Delta t}$ отображаются на разрез $(-\infty, 0]$ вещественной оси z-плоскости; точки *s* с положительной вещественной частью, принадлежащие основной полосе, - во внешность единичного круга z-плоскости, а точки *s* с отрицательной вещественной частью, принадлежащие основной полосе - во внутренность единичного круга в z-плоскости (это обуславливает устойчивость линейных динамических объектов).

Наличие разреза нарушает взаимнооднозначное соответствие полуполосы s-плоскости и круга единичного радиуса z-плоскости, т.к. при обратном к $z=e^{s\Delta t}$ логарифмическом отображении в s-плоскость [9]

(33) $s = \frac{1}{\Delta t}\ln|z| + i\frac{1}{\Delta t}\arg z$

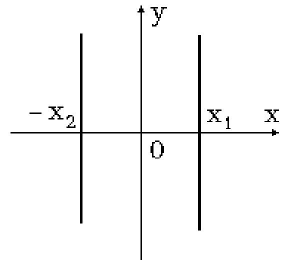
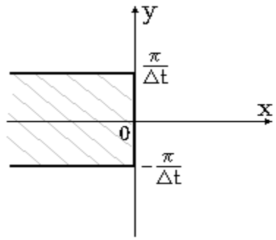
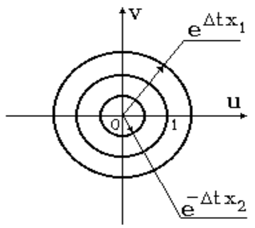
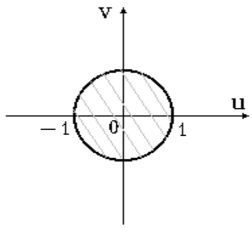
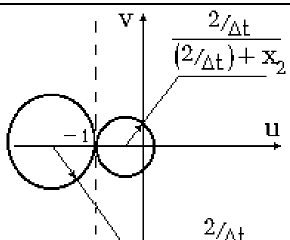
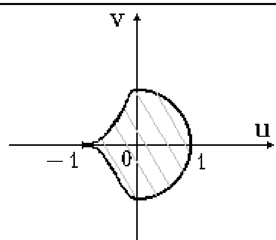
одной точке на этом разрезе соответствуют две точки на границе указанной полосы, т.к. $arg\, z = -\, arg\, z$ [14].

Как говорилось ранее, при решении задач моделирования для осуществления перехода от НПФ к ДПФ широко используются дробно-рациональные приближения, в частности, прямые и обратные разности Эйлера, билинейное преобразование [24, 9]. В *Таблице 2* приведены примеры аппроксимирующих преобразований, отображающие основные для данной работы элементы s-плоскости в z-плоскость. Сопоставление результатов *Таблицы 2* приводит к выводу [9], что приведенные и широко используемые аппроксимации преобразования $z=e^{s\Delta t}$ не обладают свойствами первоначального преобразования, связанными с понятиями многозначности, периодичности, однолистности и т. п., поэтому в дальнейшем в данной работе эти аппроксимации использоваться не будут.

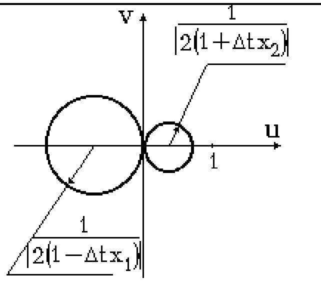
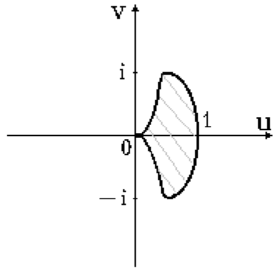
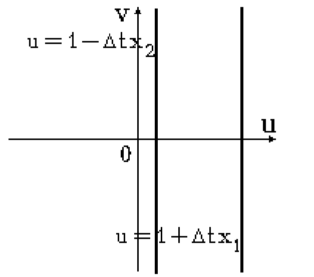
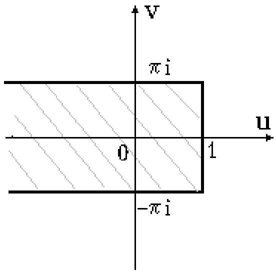
Таким образом, основным преобразованием в данной работе является $z=e^{s\Delta t}$, при котором s-плоскость представляется как объединение бесконечного числа периодических полос, ширина которых зависит от Δt .

Поскольку многие свойства преобразования $z=e^{s\Delta t}$ определяются шагом дискретизации и его изменениями, рассмотрим несколько случаев выбора шага Δt.

Таблица 2.Соответствия между s- и z-плоскостями

Некоторые элементы s-плоскости		
Собственное z-преобразование $z=e^{s\Delta t}$		
Билинейное z-преобразование $Z=\dfrac{2+\Delta ts}{2-\Delta ts}$		

Продолжение Таблицы 2.Соответствия между s- и z-плоскостями

Обратные разности $Z = \dfrac{1}{1 - \Delta t s}$		
Прямые разности $Z = 1 + \Delta t s$		

Случай 1

Предположим, что *Δt* выбран таким образом, что нули и полюса объекта не попали в основную полосу

$$\left(-i\frac{\pi}{\Delta t} < y < i\frac{\pi}{\Delta t}\right).$$

В таком случае структура дискретной модели соответствует непрерывной, однако параметры модели, определяемые через нули и полюса формирующего объекта, будут соответствовать их проекциям в основную полосу [9]. Таким образом, происходит параметрическое искажение модели.

Для получения точной цифровой модели формирующего объекта необходимо уменьшить шаг дискретизации *Δt* до такого значения, при котором нули и полюса объекта попадут в основную полосу, причем дальнейшее уменьшение *Δt* не будет влиять на расположение нулей и полюсов, - они будут оставаться на своих местах.

Случай 2

Шаг дискретизации Δt выбран так, что нули и полюса полученной ДПФ попали на границу основной полосы. При таком шаге дискретизации ни структура, ни параметры модели не будут определены верно [11]. Происходит структурно-параметрическая подмена модели (рис. 5).

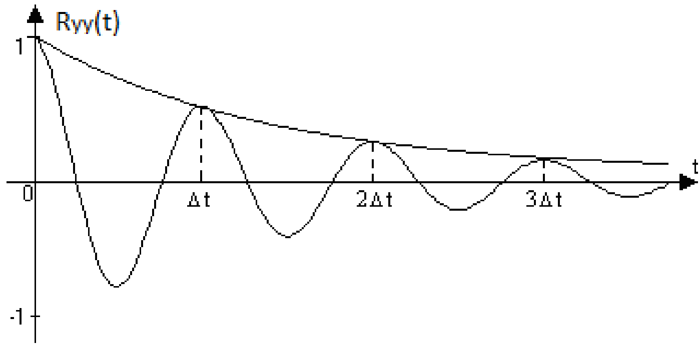


Рис. 5. Изменение структуры корреляционной функции при увеличении шага дискретизации

Согласно достаточному *условию структурно-параметрической идентифицируемости* [9], взаимнооднозначное соответствие между непрерывной и дискретной моделями объекта возможно установить только при уменьшении шага Δt и только для тех Δt, при которых основная полоса в s-плоскости покрывает истинные нули и полюса объекта. Так, если кроме действительных нулей и полюсов существуют пары комплексно-сопряженных нулей и полюсов НПФ, то максимальный шаг дискретизации, при котором выполняется условие структурно-параметрической идентифицируемости, выбирается из следующего соотношения [29]:

$$(34)\quad \Delta t \cdot \max_{i} \left| \operatorname{Im}\left(s_1^{н},\dots,s_m^{н},s_1^{n},\dots,s_n^{n}\right)\right| < \pi\,.$$

Случай 3

Выбор шага дискретизации Δt соответствует случаю попадания нулей и полюсов в основную полосу $\left(-i\dfrac{\pi}{\Delta t} < y < i\dfrac{\pi}{\Delta t}\right)$. Структурно-параметрическое соответствие между ДПФ и НПФ установлено, и при дальнейшем уменьшении Δt ширина основной полосы увеличивается, однако нули и полюса в s-плоскости остаются на прежних местах [9]; при этом соответствующие образы нулей и полюсов в z-плоскости продолжают перемещаться внутри единичного круга, стремясь к точке (1, 0) (рис. 6).

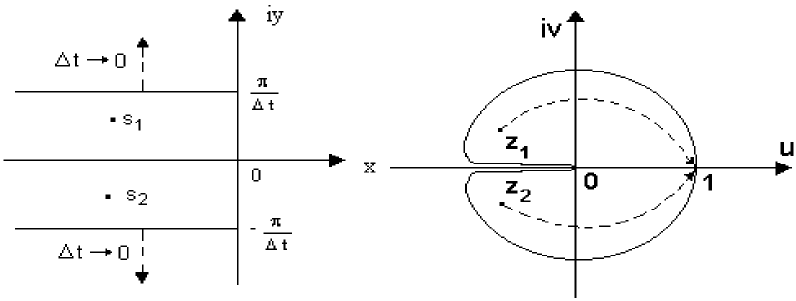


Рис. 6. Траетории движения нулей и полюсов в z-плоскости при уменьшении Δt

Случай 4

Шаг дискретизации $\Delta t\to 0$. При этом отсчеты корреляционной функции отражают лишь ее начало, на котором ярко не выражены ее особенности. Как показано на рис. 6, все нули и полюса объекта в z-плоскости при $\Delta t\to 0$ стремятся к точке (1,0), т.е. попадают в ε-окрестность точки (1, 0) и становятся неразличимы с некоторой заданной погрешностью ε (порог неразличимости).

Задав некоторую ε-окрестность точки (1, 0), можно оценить шаг дискретизации $\Delta t_{кр}$, при котором все нули и полюса объекта в z-плоскости становятся неразличимы с заданной погрешностью ε:

(35) $$\Delta t_{кр} < \frac{\ln\left(1+\varepsilon\right)}{\left|s_{\max}\right|},$$

где через s_{max} обозначен нуль или полюс НПФ, который соответствует нулю или полюсу ДПФ, максимально удаленному от точки (1, 0) z-плоскости.

При цифровом моделировании стационарных случайных процессов необходимо также учитывать условие

(36) $$\Delta t_{кр} < \Delta t < \tau_{кор},$$

где $\tau_{кор}$ - интервал корреляции процесса. При невыполнении условия ($\Delta t > \tau_{кор}$) измерения процесса становятся некоррелированными и получить дискретную модель формирующего объекта невозможно. Согласно [21, 4], на практике интервал корреляции определяют как такое значение аргумента нормированной корреляционной функции

$$r_{yy}\left(\tau\right) = R_{yy}(\tau) \big/ R_{yy}(0),$$

начиная с которого выполняется соотношение

(37) $$\left|r_{yy}\left(\tau\right)\right| \le 0.05 \quad \text{для всех } \tau \ge \tau_{кор}.$$

Таким образом, на начальном этапе цифрового моделирования необходимо выбирать Δt следующим образом.

На основе НПФ определяются все нули и полюса формирующего объекта. Свойства z-преобразования позволяют сразу определить величину шага дискретизации, при котором дискретная модель будет соответствовать непрерывной. Если среди нулей и полюсов есть комплексно - сопряженные, то необходимо выбрать шаг дискретизации исходя из условия структурно - параметрической идентифицируемости.

Если у НПФ нет комплексно сопряженных полюсов и нулей, то шаг дискретизации можно варьировать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность моделирования. С одной стороны, это означает, что прообразы дискретных полюсов (нулей) формирующего объекта совпадут с требуемой точностью с истинными значениями полюсов (нулей) НПФ. А с другой стороны, корреляционная функция смоделированного процесса должна совпадать с истинной корреляционной функцией с заданной погрешностью.

Если при выбранном Δt в ДПФ появляется полюса или нули, попадающие на разрез $(-\infty,0]$ вещественной оси z-плоскости, то в НПФ соответствующие им конечные полюса (нули) отсутствют [29].

Таким образом, цифровой метод моделирования должен при фиксированном шаге дискретизации Δt восстанавливать все нули и полюса дискретной модели, включая и возникающие на разрезе [29]. Этот эффект отсутствует при моделировании подстановочными методами - прямыми и обратными разностями Эйлера и с помощью билинейного преобразования.

Пример 2.

В *Примере 1* был выбран шаг дискретизации Δt=1. Оценим интервал корреляции случайного процесса. Поскольку нормированная корреляционная функция полностью совпадает с (26), $R_{yy}(3) \approx 0.05$, то $\tau_{кор}$ =3. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t<\tau_{кор}$. Кроме того, Δt=1 соответствует ***Случаю 3*** выбора шага дискретизации, следовательно, он может быть использован при цифровом моделировании.

Определим значение истинного полюса НПФ (27): s^n=-1. ДПФ (29) имеет полюс z^n=0.3679, который согласно (33), соответствует полюсу НПФ s^n=-1, совпадающему с полюсом истинной НПФ (27). Абсолютная ошибка восстановления непрерывного полюса равна нулю.

Проведем аналогичные расчеты цифрового моделирования случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26) с другим шагом Δt=2. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t<\tau_{кор}$ и соответствует ***Случаю 3***.

Идентифицирующая матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1.4142 & 0.1913 & 0.0259 & 0.0035 & \ldots \\ -0.1353 & -0.0183 & -0.0024 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ДПФ формирующего объекта аппроксимируется элементами первого столбца матрицы, порождающими конечную правильную С-дробь:

$$(38)\quad G(z) = \frac{1.4142}{1 - 0.1353\, z^{-1}}.$$

ДПФ (38) имеет полюс z^n=0.1353, который соответствует полюсу НПФ s^n=-1, полностью совпадающему с полюсом истинной НПФ (27).

Дискретная математическая модель случайного процесса имеет вид:

$$(39)\quad y(k\Delta t) = 1.4142\, x(k\Delta t) + 0.1353 y((k-1)\Delta t).$$

Значение весовой функции $h(2)$=0.0259, следовательно $k_{уст}$=2 определяет время переходного процесса.

Аналогично *Примеру 1* рассчитаем дисперсию, с которой необходимо моделировать белый шум $x(t)$. Тогда

$$D_x = \frac{D_y\left(1 - 0.1353^2\right)}{1.4142^{\,2}} = 0.4908.$$

Смоделируем случайный процесс $y(k\Delta t)$ (k=0, …, 900+ $k_{уст}$), отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию смоделированного процесса $y(k\Delta t)$ по формуле (31). Графики истинной корреляционной функции (26) и модельной $R^{м}_{yy}(k\Delta t)$ приведены на рис. 7.

Дисперсия расхождений (32) De=0.0002, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования.

Необходимо отметить, что в [19] для цифрового моделирования случайного процесса с корреляционной функцией (26) шаг дискретизации однозначно зафиксирован и равен Δt =0.4. Это ограничение связано с точностью моделирования. В методе цифрового моделирования на основе непрерывных дробей шаг дискретизации возможно варьировать в описанных ранее пределах.

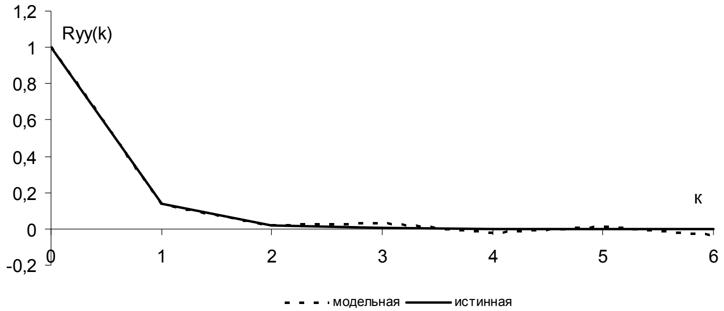


Рис. 7. Графики корреляционных функций к Примеру 2 (Δt = 2)

Получим цифровую модель случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26) и шагом Δt = 0.4. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t<\tau_{кор}$ и соответствует ***Случаю 3.***

Идентифицирующая матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1.4142 & 0.9480 & 0.6354 & 0.4259 & \dots \\ -0.6703 & -0.4493 & -0.3012 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ДПФ формирующего объекта

(40) $$G(z)=\frac{1.4142}{1-0.6703\,z^{-1}}.$$

Полюс ДПФ z^n =0.6703 соответствует полюсу НПФ s^n =-1, полностью совпадающему с полюсом истинной НПФ (27).

Тогда дискретная математическая модель случайного процесса имеет вид:

(41) $y(k\Delta t) = 1.4142\,x(k\Delta t) + 0.6703y((k-1)\Delta t)$.

Значение весовой функции $h(9)$=0.0386. Можно принять $k_{уст}$=10.

Дисперсия белого шума $x(t)$ на входе равна

$$D_x = \frac{D_y\left(1 - 0.6703^2\right)}{1.4142^2} = 0.2753.$$

После моделирования $y(k\Delta t)$ произведем сравнение истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ (*Таблица 3*).

Дисперсия расхождений (32) D_e =0.0002. Сравнение истинных и модельных значений корреляционной функции позволяет сделать вывод о получении точной дискретной модели случайного процесса (с точностью до вычислительных погрешностей).

Таким образом, приведенные расчеты дискретной модели случайного процесса с корреляционной функцией (26) с различными шагами дискретизации подтверждают эффективность предлагаемого метода моделирования.

Таблица 3. Значения истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ к Примеру 2 (Δt = 0.4)

Моменты времени k	0	1	2	3	4	5
$R_{yy}(k\Delta t)$	1	0.6703	0.4493	0.3012	0.2019	0.1353
$R_{yy}^{м}(k\Delta t)$	1.0019	0.6756	0.4569	0.3225	0.2130	0.1517

Пример 3.

Требуется осуществить цифровое моделирование случайного процесса с корреляционной функцией вида [3, 19]

(42) $R_{yy}(t) = e^{-|t|}(1 + |t|)$,

имеющего спектральную плотность

(43) $S_{yy}(\omega) = \dfrac{4}{\pi\left(\omega^2 + 1\right)^2}$.

Найдем НПФ формирующего объекта, определив предварительно квадрат амплитудно-фазовой частотной характеристики,

(44) $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2}$.

Тогда весовая функция формирующего объекта равна (рис. 8)

(45) $h(t) = 2t\,e^{-t}$.

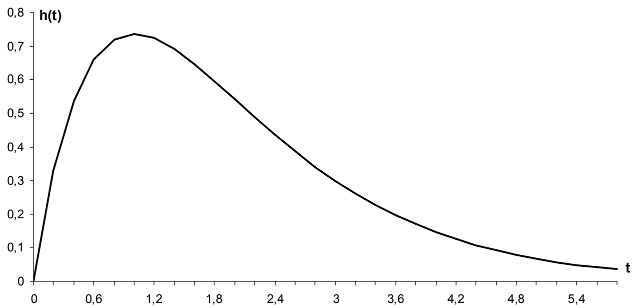


Рис. 8. Весовая функция (45)

Далее необходимо задать шаг дискретизации. Оценим интервал корреляции случайного процесса. Нормированная корреляционная функция совпадает с (42), $R_{yy}(4.8)\approx 0.048$. Тогда $\tau_{кор}$=4.8. У НПФ нет комплексно сопряженных полюсов и нулей, поэтому согласно ***Случаю 3*** выбора шага дискретизации зададим Δt=0.9.

Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0.7318 & 0.5951 & 0.3629 & 0.1967 & 0.1000 & 0.0488 & \ldots \\ -0.8131 & -0.4959 & -0.2688 & -0.1366 & -0.0666 & - & \\ 0.2033 & 0.1653 & 0.1008 & 0.0546 & - & & \\ -0.2033 & -0.1653 & -0.1008 & - & & & \\ 0 & 0 & - & & & & \end{pmatrix}.$$

4-ая строка матрицы содержит нулевые элементы. Элементы первого столбца матрицы определяют конечную правильную С-дробь

$$G(z)=\cfrac{0.7318}{1+\cfrac{-0.8131z^{-1}}{1+\cfrac{0.2033z^{-1}}{1-0.2033z^{-1}}}}.$$

Определим ДПФ формирующего объекта

$$(46)\quad G(z)=\frac{0.7318z^{-1}}{1-0.8131z^{-1}+0.1653z^{-2}}.$$

ДПФ (46) имеет полюса $z^n_{1,2}=0.4066$, которые согласно (33), соответствует полюсам НПФ $s^n_{1,2}$=-1, совпадающим с полюсами истинной НПФ (44).

ДПФ (46) приводит к дискретной математической модели случайного процесса вида (17):

$$(47)\quad y(k)=0.7318\,x(k-1)+0.8131y(k-1)-0.1653y(k-2).$$

Значение весовой функции $h(6)$=0.0488, поэтому можно принять длительность переходного процесса $k_{уст}$=10.

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе

$$M\left(y^2(k)\right)=M\left(0.7318\,x(k-1)+0.8131y(k-1)-0.1653y(k-2)\right)^2.$$

Откуда

$$D_x=\frac{D_y\left(1-0.8131^2-(-0.1635)^2\right)-2*0.8131*(-0.1653)}{0.7318^{\,2}}=0.9693.$$

На основе (47) смоделируем процесс $y(k\Delta t)$, график которого (k=0, …, 1000+ $k_{уст}$) приведен на рис. 9.

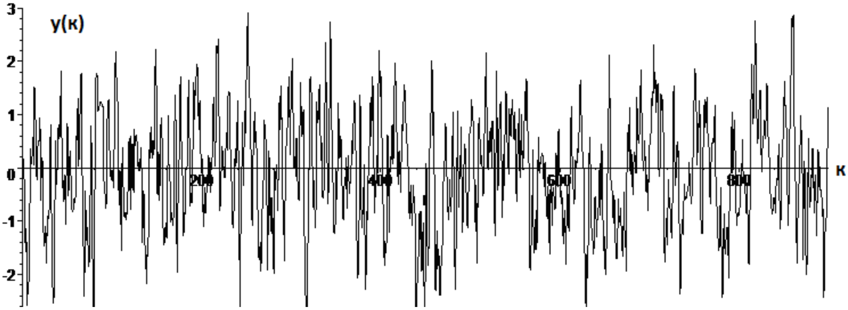


Рис. 9. График процесса (47)

Отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию процесса $y(k\Delta t)$ согласно (31). Графики истинной корреляционной функции (42) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ приведены на рис. 10.

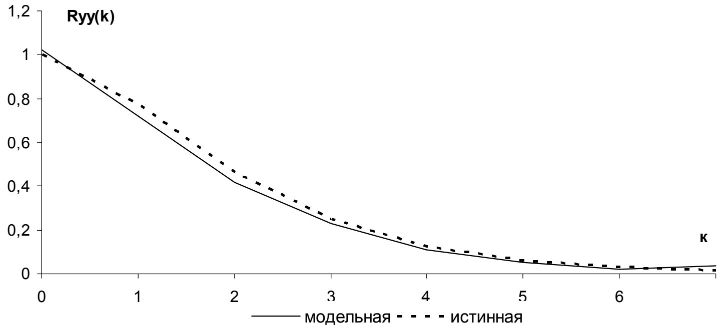


Рис. 10. Графики истинной корреляционной функции (42) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ к Примеру 3

Дисперсия расхождений (32) D_e =0.0005, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования.

Пример 4.

Случайный процесс имеет корреляционную функцию вида [3, 19, 28]

(48) $R_{yy}(t) = 0.5 e^{-|t|} \cos 2t$.

Например, подобный вид имеют корреляционные функции, описывающие случайные процессы типа турбулентности атмосферы.

Найдем НПФ формирующего объекта

(49) $G(s) = \dfrac{s + \sqrt{5}}{s^2 + 2s + 5}$.

НПФ имеет нуль $s^н$=-2.2361 и 2 полюса $s^n_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Весовая функция формирующего объекта имеет вид

(50) $h(t) = e^{-t} \cos 2t + \left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) e^{-t} \sin 2t$.

Интервал корреляции случайного процесса равен $\tau_{кор}$=2. Зададим шаг дискретизации, удовлетворяющий условию SP-идентифицируемости, которое для данного примера примет вид:

$$\Delta t \cdot \left| \operatorname{Im}\, s^n_{1,2} \right| < \pi .$$

Так как $\operatorname{Im}\, s^n_{1,2} = 2$, то граница основной полуполосы отстоит от оси ординат s-плоскости на величину

$$\frac{\pi}{\left| \operatorname{Im}\, s^n_{1,2} \right|} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708 .$$

При этом шаг дискретизации должен удовлетворять неравенству Δt<1.5708.

Зададим Δt=0.05. Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 1.0052 & 0.9979 & 0.9795 & 0.9511 & 0.9142 & \ldots \\
-1.0052 & -0.9979 & -0.9795 & -0.9511 & -0.9142 & - & \\
0.0124 & 0.0235 & 0.0332 & 0.0416 & - & & \\
-0.9002 & -1.7040 & -2.4111 & - & & & \\
0 & 0 & - & & & &
\end{pmatrix}.
$$

Получаем конечную правильную С-дробь:

$$G(z) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{-1.0052z^{-1}}{1 + \cfrac{0.0124z^{-1}}{1 - 0.9002z^{-1}}}}.$$

После сворачивания дроби получим ДПФ формирующего объекта:

$$(51)\quad G(z) = \frac{1 - 0.8879z^{-1}}{1 - 1.8929z^{-1} + 0.9048z^{-2}}.$$

ДПФ (51) имеет полюса $z^n_{1,2} = 0.9465 \pm i0.0950$, которые согласно (33), соответствуют полюсам НПФ $s^n_{1,2} = -1 \pm 2i$, совпадающие с полюсами истинной НПФ (49). Кроме того, ДПФ (51) имеет нуль $z^н$=0.8879, которому в s-плоскости соответствует значение $s^н$=-2.3805. Абсолютная погрешность в определении нуля составляет 0.1444. Численные эксперименты, проведенные на тестовых объектах [28, 8] показали, что погрешность в восстановлении нуля гораздо меньше влияет на результаты дискретного моделирования, чем наличие погрешности восстановления полюсов. Покажем это, построив стохастическое конечно-разностное уравнение случайного процесса:

$$(52)\quad y(k) = x(k) - 0.8879x(k-1) + 1.8929y(k-1) - 0.9048y(k-2).$$

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе формирующего объекта. Запишем модель (52) в общем виде:

$$(53)\quad y(k) = a_0x(k) + a_1\, x(k-1) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2).$$

Возьмем квадрат математического ожидания от обоих частей равенства (53):

$$M\left(y^2(k)\right)=M\left(a_0x(k)+a_1\ x(k-1)+b_1y(k-1)+b_2y(k-2)\right)^2 .$$

Тогда

$$\begin{aligned}D_y &= M\left(a_0^2x^2(k)+a_1^2x^2(k-1)+2a_0a_1x(k)x(k-1)\right)+\\ &+2M(a_0b_1x(k)y(k-1)+a_0b_2x(k)y(k-2)+\\ &\quad+a_1b_1x(k-1)y(k-1)+a_1b_2x(k-1)y(k-2))+\\ &\quad+M\left(b_1^2y^2(k-1)+b_2^2y^2(k-2)+2b_1b_2y(k-1)y(k-2)\right)=\\ &\quad=a_0^2D_x+a_1^2D_x+2a_1b_1M\left(x(k-1)y(k-1)\right)+\\ &\qquad+b_1^2D_y+b_2^2D_y+2b_1b_2R_{yy}(1).\end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание произведения $M(x(k\text{-}1)y(k\text{-}1))$:

$$\begin{aligned}&M\left(x(k-1)y(k-1)\right)=\\ &=M(a_0x^2(k-1)+a_1x(k-1)x(k-2)+\\ &\quad+b_1x(k-1)y(k-2)+b_2x(k-1)y(k-3))=a_0D_x.\end{aligned}$$

Подставив полученное математическое ожидание, будем иметь

$$D_y=a_0^2D_x+a_1^2D_x+2a_1b_1a_0D_x+b_1^2D_y+b_2^2D_y+2b_1b_2R_{yy}(1),$$

откуда

(54) $$D_x=\frac{D_y\left(1-b_1^2-b_2^2\right)-2b_1b_2R_{yy}(1)}{a_0^2+a_1^2+2a_1b_1a_0}.$$

На основе (54) получаем, что дисперсия входного процесса D_x=0.0508.

Время переходного процесса $k_{уст}$=50. На рис. 11 представлен график процесса $y(k\Delta t)$, полученного на основе дискретной модели (52) (объем реализации равен 1500 значений). Графики истинной корреляционной функции (48) и модельной $R_{yy}^{м}\left(k\Delta t\right)$ приведены на рис. 11. Дисперсия расхождений (32) равна D_e=0.0006.

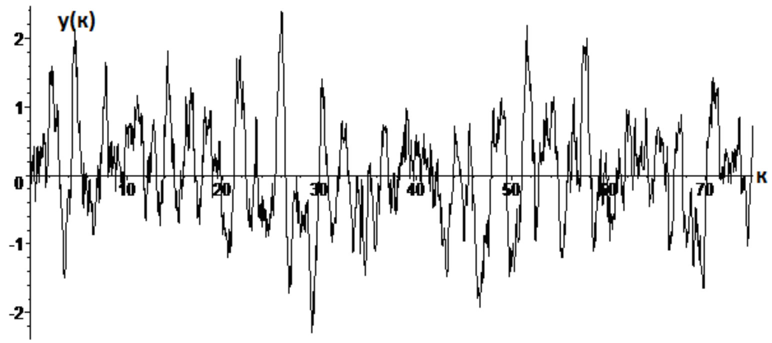


Рис. 11. График процесса (52)

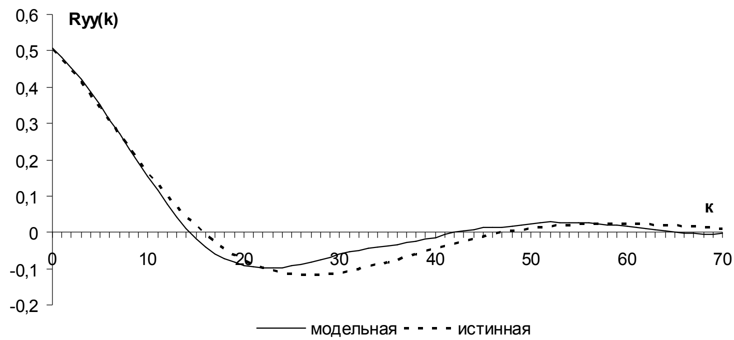


Рис. 12. Графики истинной корреляционной функции и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ к Примеру 4 (шаг дискретизации Δt = 0.05)

Посмотрим, что произойдет с моделью формирующего объекта (49) при шаге дискретизации $\Delta t=\pi/2$. Его задание соответствует ***Случаю 2*** выбора шага дискретизации. Построим идентифицирующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -0.2079 & 0.0432 & -0.0090 & \dots \\ 0.2079 & -0.0432 & 0.0090 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда ДПФ объекта аппроксимируется элементами первого столбца полученной матрицы, порождающими конечную правильную С-дробь:

$$(55)\ \ G(z) = \frac{1}{1 + 0.2079 z^{-1}}.$$

ДПФ (55) имеет полюс z^n=-0.2079, который соответствует полюсу НПФ s^n=-1. Произошла структурно-параметрическая подмена модели.

Проследим изменения дискретной модели, взяв шаг дискретизации, не удовлетворяющий условию SP-идентифицируемости. Пусть Δt = 2 соответствует ***Случаю 1*** выбора шага дискретизации. Идентифицирующая матрица В.Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -0.1518 & 0.0085 & 0.0013 & -0.0004 & 0.0000 & \dots \\ 0.1518 & -0.0085 & -0.0013 & 0.0004 & -0.0000 & - & \\ -0.0955 & 0.0169 & -0.0012 & -0.0001 & - & & \\ 0.1207 & -0.0213 & 0.0016 & - & & & \\ 0 & 0 & - & & & & \end{pmatrix}.$$

После сворачивания дроби получим ДПФ формирующего объекта:

$$(56)\ \ G(z) = \frac{1 + 0.0252 z^{-1}}{1 + 0.1769 z^{-1} + 0.0183 z^{-2}}.$$

ДПФ (56) имеет полюса $z_{1,2}^n = -0.0885 \pm i0.1024$, которые соответствуют полюсам НПФ $s_{1,2}^n = -1 \pm 1.1416i$. Значения полюсов не совпадают с полюсами истинной НПФ (49), а соответствуют их проекциям в основную полосу. Кроме того, ДПФ (56) имеет нуль $z^{н}$=-0.0252, который в s-плоскости отсутствует. Таким образом, происходит параметрическое искажение модели.

Приведенные расчеты дискретных моделей формирующего объекта (49) и выходного случайного процесса с корреляционной функцией (48) на основе различных шагов дискретизации подтверждают ранее сделанный вывод о том, что при наличии в НПФ объекта комплексно сопряженных нулей или полюсов шаг дискретизации нужно выбирать из условия SP-идентифицируемости.

Пример 5.

Корреляционная функция случайного процесса имеет вид [18]:

(57) $R_{yy}(t) = 0.4\, e^{-0.9|t|} + 0.6\, e^{-0.8|t|} \cos(1.25|t|)$.

Тогда НПФ формирующего объекта

(58) $G(s) = \dfrac{12.96\left(s^2 + 2.11s + 1.76\right)}{\left(s^2 + 1.6s + 2.2\right)\left(10s + 9\right)}$

имеет 2 нуля $s_{1,2}^{H} = -1.0550 \pm 0.8043i$ и 3 полюса $s_{1,2}^{n} = -0.8000 \pm 1.2490i$, $s_3^n = -0.9$.

Весовая функция формирующего объекта имеет вид

(59) $$\begin{aligned} h(t) &= 0.5539e^{-0.9t} + 0.7421e^{-0.8t}\cos(1.2490t) + \\ &+ 0.4698e^{-0.8t}\sin(1.2490t) \end{aligned}.$$

Интервал корреляции случайного процесса равен $\tau_{кор} \approx 2.4$. Зададим шаг дискретизации, удовлетворяющий условию SP-идентифицируемости:

(60) $\Delta t \cdot \max\left|\operatorname{Im}\left(s_{1,2}^{н}, s_{1,2}^{n}\right)\right| < \pi$.

Таким образом, шаг дискретизации должен удовлетворять неравенству $\Delta t < \dfrac{\pi}{1.2490} \approx 1.5153$.

Зададим Δt=0.1. Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1.2960 & 1.2300 & 1.1744 & 1.1013 & 1.0229 & 0.9408 & 0.8570 & \dots \\
-0.9568 & -0.9061 & -0.8498 & -0.7893 & -0.7260 & 0.6612 & & \\
0.0097 & 0.0179 & 0.0249 & 0.0305 & 0.0348 & & & \\
-0.9110 & -1.6873 & -2.3316 & -2.8487 & & & & \\
0.0058 & 0.0160 & 0.0293 & & & & & \\
-0.8936 & -2.4554 & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & &
\end{pmatrix}.
$$

Свернув конечную правильную С-дробь, получим ДПФ формирующего объекта:

(61) $$G(z) = \frac{1.296 - 2.3186z^{-1} + 1.0439z^{-2}}{1 - 2.7458z^{-1} + 2.5264z^{-2} - 0.7788z^{-3}}.$$

ДПФ (61) имеет полюса

$$z_{1,2}^{n} = 0.9159 \pm i0.01150 \text{ и } z_{3}^{n} = 0.9140,$$

которые соответствует полюсам НПФ

$$s_{1,2}^{n} = -0.7999 \pm 1.2490i \text{ и } s_{3}^{n} = -0.8997,$$

совпадающие с полюсами истинной НПФ (58) с точностью до погрешностей вычислений.

ДПФ (61) также имеет нули:

$$z_{1,2}^{н} = 0.8945 \pm 0.0726i, \; z_{3}^{н} = 0.$$

В s-плоскости $z_{3}^{н} = 0$, попадающий на разрез, отсутствует. Значениям комплексно-сопряженных полюсов в s-плоскости соответствуют:

$$s_{1,2}^{н} = -1.0816 \pm 0.8103i.$$

Примем за абсолютную ошибку определения нулей величину [29]

(62) $$\varepsilon = \left| s_1^{и} - s_1^{м} \right| + \left| s_2^{и} - s_2^{м} \right|,$$

где $s_1^{и}$, $s_2^{и}$ - нули (58), $s_1^{м}$, $s_2^{м}$ - нули, полученные по модели (61). Тогда

$$\varepsilon = 2\left|-1.055 + 0.8043i + 1.0816 - 0.8103i\right| = \\ = 2\left|0.0266 - 0.006i\right| = 2 \cdot 0.0007 = 0.0014.$$

Таким образом, ошибка в определении нулей составила 0.14%.

Стохастическое конечно-разностное уравнение случайного процесса на основе (61) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y(k) &= 1.2960x(k) - 2.3186x(k-1) + 1.0439x(k-2) + \\ &+ 2.7458y(k-1) - 2.5264y(k-2) + 0.7788y(k-3). \end{aligned} \tag{63}$$

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе формирующего объекта. Модель (63) в общем виде:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \\ &+ b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3y(k-3). \end{aligned} \tag{64}$$

Возьмем квадрат математического ожидания от обоих частей равенства (64):

$$\begin{aligned} M\left(y^2(k)\right) &= M(a_0x(k) + a_1\, x(k-1) + a_2\, x(k-2) + \\ &+ b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3y(k-3))^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_y = {} & M(a_0^2x^2(k) + a_1^2x^2(k-1) + a_2^2x^2(k-2) + \\ & + 2a_0a_1x(k)x(k-1) + 2a_0a_2x(k)x(k-2) + \\ & + 2a_2a_1x(k-2)x(k-1)) + \\ & + 2M(a_0b_1x(k)y(k-1) + a_0b_2x(k)y(k-2) + \\ & + a_0b_3x(k)y(k-3) + a_1b_1x(k-1)y(k-1) + \\ & + a_1b_2x(k-1)y(k-2) + a_1b_3x(k-1)y(k-3) + \\ & + a_2b_1x(k-2)y(k-1) + a_2b_2x(k-2)y(k-2) + \\ & + a_2b_3x(k-2)y(k-3)) + \\ & + M(b_1^2y^2(k-1) + b_2^2y^2(k-2) + b_3^2y^2(k-3) + \\ & + 2b_1b_2y(k-1)y(k-2) + 2b_1b_3y(k-1)y(k-3) + \\ & \quad + 2b_2b_3y(k-2)y(k-3)) = \end{aligned}$$

$$= a_0^2 D_x + a_1^2 D_x + a_2^2 D_x + b_1^2 D_y + b_2^2 D_y + b_3^2 D_y +$$
$$+ 2b_1 b_2 R_{yy}(1) + 2b_1 b_3 R_{yy}(2) + 2b_2 b_3 R_{yy}(1) +$$
$$+ 2a_1 b_1 M\big(x(k-1)y(k-1)\big) + 2a_2 b_1 M\big(x(k-2)y(k-1)\big) +$$
$$+ 2a_2 b_2 M\big(x(k-2)y(k-2)\big).$$

Найдем математическое ожидание произведения $M(x(k\text{-}1)y(k\text{-}1))$:

$$M\big(x(k-1)y(k-1)\big) =$$
$$= M(a_0 x^2(k-1) + a_1 x(k-1)x(k-2) + a_2 x(k-1)x(k-3) +$$
$$+ b_1 x(k-1)y(k-2) + b_2 x(k-1)y(k-3) +$$
$$+ b_3 x(k-1)y(k-4) = a_0 D_x.$$

Математическое ожидание произведения $M(x(k\text{-}2)y(k\text{-}1))$:

$$M\big(x(k-2)y(k-1)\big) =$$
$$= M(a_1 x^2(k-2) + a_0 x(k-1)x(k-2) + a_3 x(k-2)x(k-3) +$$
$$+ b_2 x(k-2)y(k-3) + b_3 x(k-2)y(k-4) + b_1 x(k-2)y(k-2) =$$
$$= a_1 D_x + b_1 M(x(k-2)y(k-2)).$$

Математическое ожидание произведения $M(x(k\text{-}2)y(k\text{-}2))$:

$$M\big(x(k-2)y(k-2)\big) =$$
$$= M(a_0 x^2(k-2) + a_1 x(k-3)x(k-2) + a_2 x(k-2)x(k-4) +$$
$$+ b_2 x(k-2)y(k-4) + b_3 x(k-2)y(k-5) +$$
$$+ b_1 x(k-2)y(k-3) = a_0 D_x.$$

Подставив полученные математические ожидания, будем иметь

$$D_y = a_0^2 D_x + a_1^2 D_x + a_2^2 D_x + + b_1^2 D_y + b_2^2 D_y + b_3^2 D_y +$$
$$+ 2a_1 b_1 a_0 D_x + 2b_1 b_2 R_{yy}(1) + 2b_1 b_3 R_{yy}(2) + 2b_3 b_2 R_{yy}(1) +$$
$$+ 2a_2 b_1^2 a_0 D_x + 2a_2 b_1 a_1 D_x + 2a_2 b_2 a_0 D_x.$$

Окончательно

$$(65)\quad D_x = \frac{D_y\big(1 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\big) - \big(2b_1 b_2 + b_3 b_2\big)R_{yy}(1) - 2b_1 b_3 R_{yy}(2)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 b_1 a_0 + 2a_2 b_1^2 a_0 + 2a_2 b_1 a_1 + 2a_2 b_2 a_0}.$$

На основе (65) получаем, что дисперсия входного процесса D_x =0.0963.

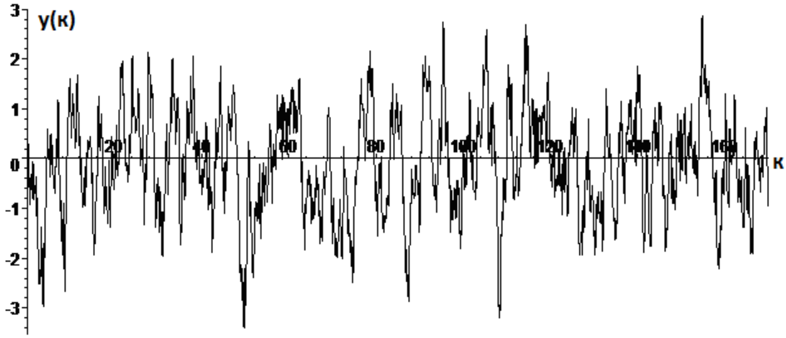


Рис. 13. График процесса (63)

Время переходного процесса $k_{уст}$=30. На рис. 13 представлен график процесса $y(k\Delta t)$, (объем реализации равен 1700 значений).

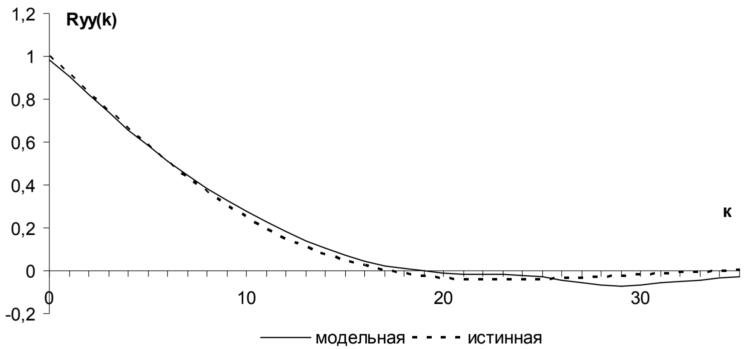


Рис. 14. Графики истинной корреляционной функции и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ *к Примеру 5*

Графики истинной корреляционной функции (57) и модельной $R_{yy}^{м}(k\Delta t)$ приведены на рис. 14. Дисперсия расхождений (32) равна D_e =0.0007.

Таким образом, метод дискретного моделирования позволяет построить дискретную модель случайного процесса с заданной корреляционной функцией с помощью аппарата непрерывных дробей. Приведем последовательность шагов, которые необходимо сделать, чтобы воспользоваться этим методом.

1. Задание корреляционной функции $R_{yy}(t)$ моделируемого случайного процесса.

2. Определение НПФ формирующего стохастического объекта $G(s)$, ее нулей и полюсов.

3. Нахождение весовой функции $h(t)$ формирующего стохастического объекта как обратное преобразование Лапласа от $G(s)$.

4. Оценка интервала корреляции согласно (37).

5. Задание шага дискретизации Δt, удовлетворяющего условию SP-идентифицируемости (34) и неравенству (36).

6. Построение идентифицирующей матрицы В.Висковатова (21), получение ДПФ формирующего объекта $G(z)$.

7. Нахождение нулей и полюсов $G(z)$, а также определение соответствующих им нулей и полюсов в s-плоскости. Сравнение полученных результатов с истинными нулями и полюсами НПФ формирующего стохастического объекта $G(s)$, полученными в пункте 1 (*1-й критерий определения точности моделирования*).

8. Расчет дисперсии D_x входного белого шума.

9. Моделирование стационарного случайного процесса на основе полученного конечно-разностного уравнения вида (17).

10. Отсечение переходного процесса на основе определения времени переходного процесса $k_{уст}$.

11. Расчет модельной корреляционной функции согласно (31).

12. Определение точности моделирования на основе дисперсии расхождений (32). (2-ой *критерий определения точности моделирования*).

Приведенные модельные и теоретические исследования позволяют утверждать, что предложен достаточно эффективный и простой в реализации переход к дискретному представлению стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией.

Литература

1. БЕНДАТ, ДЖ. *Прикладной анализ случайных процессов* / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 464 с.
2. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных систем.* – М.: Наука, 1968. – 356 с.
3. БЫКОВ В.В. *Цифровое моделирование в статистической радиотехнике*. – М.: «Советские радио», 1971. – 328 с.
4. ВОЛГИН, В.В. *Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления* / В.В. Волгин, Р.Н. Каримов. – М.: Энергия, 1979. – 80 с.
5. ДЕЙЧ А.М. *Методы идентификации динамических объектов.* – М.: Наука, 1985. – 240 с.
6. ЕМЕЛЬЯНОВ В. Ю. *Методы моделирования стохастических систем управления:* учеб. пособие. – СПб.: изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2004. - 168 с.
7. ЖОВИНСКИЙ, А.Н. *Инженерный экспресс-анализ случайных процессов* / А.Н. Жовинский, В.Н. Жовинский. - М.: Энергия, 1979. – 112 с.
8. КАРТАШОВ В. Я. *Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно - параметрической идентификации динамических объектов* // Препринт № 22. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 40 с.
9. КАРТАШОВ, В.Я. *Влияние периода дискретизации на структурно-параметрическое взаимосоответствие между непре-*

рывной и дискретной по времени моделями линейного динамического объекта // Препринт №15 / В.Я. Карташов, О.Н. Инденко, А.В. Александров. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 36 с.
10. КАРТАШОВ В.Я. *Непрерывные дроби (определения и свойства).* – Кемерово: Изд-во Кемеровского госуниверситета, 1999. – 88 с.
11. КАРТАШОВ, В.Я. *Идентификация стохастических объектов*: учебное пособие / В.Я. Карташов, М.А. Новосельцева. – Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2008. – 104 с.
12. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Способ идентификации линейного объекта* // Патент РФ №2146063. 2000. Бюл. № 6.
13. КАРТАШОВ, В.Я. *Структурно-параметрическая идентификация стохастических объектов с использованием непрерывных дробей* / В.Я. Карташов, М.А. Новосельцева // Управление Большими системами. – 2008. – Выпуск 21. – С. 27-48.
14. КОРН, Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
15. ЛИВШИЦ, Н.А. *Вероятностный анализ систем автоматического управления* / Н.А. Ливщиц, В.Н. Пугачев. – М.: Сов. Радио, 1963. – 896 с.
16. МАКАРОВ, И.М. *Линейные автоматические системы* / И.М. Макаров, Е.М. Менский. – М.: Машиностроение, 1982. – 464 с.
17. МАКС Ж. *Метода и техника обработки сигналов при физических измерениях.* – М.: Мир, 1983. Том 1. – 312с.
18. *Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-измерительных системах* / А.Н. Лебедев, Д.Д. Недосекин, Г.А. Стеклова, Е.А. Чернявский. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ие, 1988. – 64 с.

19. *Прикладной анализ случайных процессов*. Под ред. С.А. Прохорова. – СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
20. ПУГАЧЕВ В.С. *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.* – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. Лит-ры, 1963. – 884 с.
21. РОМАНЕНКО, А.Ф. *Вопросы прикладного анализа случайных процессов* / А.Ф. Романенко, Г.А. Сергеев. – М.: Советское радио, 1968. – 247 с.
22. САМАРСКИЙ, А.А. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры* / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
23. СИБЕРТ У. М. *Цепи, сигналы, системы*. – М.: Мир, 1988. Том 1. – 510 с.
24. СМИТ ДЖОН М. *Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей.* – М.: Машиностроение, 1980. – 271 с.
25. СОЛОДОВНИКОВ, В.В. *Основы теории и элементы систем автоматического регулирования*: учебное пособие для вузов / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
26. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.*– М.: Наука, 1966. Том 2. – 800 с.
27. *Цифровое моделирование систем стационарных случайных процессов* / Е.Г. Гридина, А.Н. Лебедев, Д.Д. Недосекин, Е.А. Чернявский. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 144 с.
28. ШАЛЫГИН, А.С. *Прикладные модели статистического моделирования* / А.С. Шалыгин, Ю.И. Палагин. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
29. ЩЕКОЧИХИНА С.Г. *Разработка метода дискретного моделирования в задачах диагностики сложных объектов горной техники:* дис. канд. тех. наук. – Кемерово, 1999. – 279 с.
30. ШЕННОН Р. *Имитационное моделирование систем – искусство и наука.* – М.: Мир, 1978. – 420 с.

DIGITAL DESIGN OF STATIONARY CASUAL PROCESSES WITH THE SET CROSS-CORRELATION FUNCTION ON BASIS OF THE CONTINUED FRACTIONS

Vladimir Kartashov, manager by the department of automation of researches and technical cybernetics of the Kemerovo state university, doctor of engineering sciences, professor (kartash@kemsu.ru).
Marina Novoseltseva, associate professor of department of automation of researches and technical cybernetics of the Kemerovo state university, candidate of engineering sciences, associate professor (aanov@pochta.ru).

Abstract: *In the article the method of discrete design of stationary casual processes is offered with the set cross-correlation function. A basic mathematical vehicle, used in-process, is a theory of the continued fractions. On the basis of the continued fractions the algorithm of design of casual process is worked out, accordance is set between continuous and discrete the models of casual process, the choice of quantization interval is reasonable.*

Keywords: stationary casual process, cross-correlation function, continued fraction, forming object, white noise, continuous transmission function, quantization interval, discrete transmission function, stochastic difference equation.