ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ОБЪЕКТОВ РКТ

Андриенко А.Я., Тропова Е.И.
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*
vladguc@ipu.rssi.ru

Применительно к проблеме управления безопасностью объектов ракетно-космической техники (РКТ) в их жизненном цикле излагается метод целочисленной оптимизации управления обобщённым риском.

Ключевые слова: управление безопасностью, целочисленная оптимизация.

Введение

Проблема управления безопасностью в жизненном цикле объектов РКТ [1] порождает ряд задач теории управления, явно отличающихся от известных своих аналогов в общей теории оптимальных систем. Эти отличия вытекают, во-первых, из высокой сложности объекта оптимизации, составляемого из многих (десятков, сотен и даже тысяч) разнородных управляемых компонентов, и, во-вторых, из специфики используемого здесь обобщенного критерия, учитывающего важнейшие характеристики объекта РКТ с приоритетом требований по безопасности.

В данной статье рассматривается одна из таких задач – операционная задача [2] целочисленного управления по критерию, в котором непосредственно учитываются только требования по безопасности и экономичности исполнения этапа жизненного цикла объекта РКТ. Пояснения физического смысла отдельных формализмов проводятся на примере принятия проектно-производственных решений при разработке космической ракеты-носителя (КРН).

1. *Постановка задачи*

Рассматривается технический объект РКТ (например, КРН), состоящий из J компонент (двигатели, баки, командные приборы и проч.), и подлежащий совершенствованию в результате выполнения планируемой операции A по повышению общей надёжности действия и экологичности системы (её безопасности $F_{без}$) с возможно меньшими затратами $F_{зат}$.

Имеется банк данных о возможных мероприятиях по повышению безопасности $F_{без}$ – набор из S типов управляющих факторов u_{sj} (резервирование, испытания на АЦК, огневые испытания и др. j-го компонента объекта РКТ, $s = 1,2,\ldots,S$, принимающих целочисленные значения $u_{sj} = 0,1,\ldots,k,\ldots$ (без резервирования, одно-, … , k-кратное резервирование; без испытаний, одно, …, k испытаний и т.д.). Считаются известными нормирующе-весовые коэффициенты c_j, $j = 1,2,\ldots,J$, с помощью которых показатели безопасности F_j, $j = 1,2,\ldots,J$, отдельных компонент объекта РКТ свёртывается в общий показатель

$$F_{без} = \sum_{j=1}^{J} c_j F_j \ ,$$

а также зависимости безопасности F_j компонент от управляющих факторов u_{sj}:

$$(1) \quad F_j = W_j\left(\sum_{s=1}^{S} m_{sj}\, l_{sj}\, u_{sj}\right), \quad j = 1,2,...,J \ ,$$

где m_{sj} ,$s = 1,2,\ldots,S,$, – положительные коэффициенты матрицы $M = \left\| m_{sj} \right\|$, характеризующие относительную эффективность проведения мероприятия s-го типа применительно к j-му компоненту объекта РКТ по сравнению с реализацией некоторого эталонного мероприятия; l_{sj} , $s = 1,2,\ldots,S,$ – элементы матрицы применимости $L = \left\| l_{sj} \right\|$, принимающие два значения:

$l_{sj} = 0$, если управление u_{sj} либо не может быть физически реализовано (например, испытание реального двигателя на АЦК), либо при реализации наносит существенный ущерб характеристикам объекта РКТ (например, резервирование основных двигателей приводит к недопустимому снижению грузоподъёмности КРН);

$l_{sj} = 1$ в противном случае.

Из физического содержания показателей безопасности $W_j(x_j)$, j = 1,2,…,J, следует, что они должны быть возрастающими, выпуклыми (вверх) функциями аргументов $x_j = \sum_{s=1}^{S} m_{sj}\, l_{sj}\, u_{sj}$ и, следовательно, неубывающими функциями от u_{sj}, s = 1,2,…,S, j = 1,2,…,J (например, $W_j(x_j) = 1 - q_j^{x_j}$, $0 < q_j < 1$, $x_j > 0$).

Полагаются известными стоимости $p_{sj} > 0$, s = 1,2,…,S, j = 1,2,…,J, реализации единицы каждого управления u_{sj}, на основе которых определяются затраты на реализацию операции A:

(2) $$F_{зат} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{s=1}^{S} p_{sj}\, l_{sj}\, u_{sj} .$$

Общую эффективность операции A будем оценивать, следуя популярному за рубежом подходу, скалярным критерием R в виде отношения $F_{без} / F_{зат}$ показателей «позитивной» (безопасность) и «негативной» (затраты) составляющих жизненного риска объекта РКТ при линейных ограничениях

(3) $$\sum_{j=1}^{J} u_{sj} = U_s , \quad s = 1,2,...,S ,$$

определяемыми теми ресурсами $U_s > 0$, s = 1,2,…,S, (производственными мощностями и т.д.), которые выделяются на проведение операции.

Замечание 1. В отличие от обычных задач целочисленной оптимизации, когда условие типа (3) представляется неравенством, здесь в обеспечение приоритета требования по безопасности ограничение (3) задаётся строгим равенством, предусматривающим обязательную мобилизацию всех ресурсов для предельно возможного увеличения $F_{без}$ – неубывающей, как уже отмечалось, функции от управления u_{sj}.

Задача состоит в том, чтобы определить матрицу управления $U = \| u_{sj} \|$, с целочисленными неотрицательными элементами u_{sj}, максимизирующую критерий

$$(4) \quad R = \frac{\sum_{j=1}^{J} c_j W_j \left(\sum_{s=1}^{S} m_{sj} \, l_{sj} \, u_{sj} \right)}{\sum_{j=1}^{J} \sum_{s=1}^{S} p_{sj} \, l_{sj} \, u_{sj}}$$

при выполнении ограничений (3) и при заданных матрицах $M = \|m_{sj}\|$, $P = \|p_{sj}\|$, с положительными элементами m_{sj}, p_{sj} и матрице применимости $L = \|l_{sj}\|$, $l_{sj} = 0$ или $l_{sj} = 1$, не содержащей нулевых строк и столбцов.

Замечание 2. Очевидно, что не следует учитывать нулевых строк и столбцов матрицы L, так как такие строки и столбцы не оказывают влияния на риск R. Поэтому в постановку задачи и вводится соответствующее условие, предусматривающее отказ от рассмотрения «неуправляемых» компонент объекта РКТ и тех видов управления, которые неприменимы ни к одному компоненту.

2. Решение задачи

Наиболее сильный результат при решении задачи (3), (4) получен применительно к важному для практических применений случаю $p_{sj} = p_j$, $m_{sj} = m_j$, $s = 1,2,\ldots,S$.

Решение задачи (3), (4) проводилось в два этапа. На первом этапе решается *вспомогательная задача* целочисленной оптимизации по критерию $F_{без}$, представляющему собой сумму выпуклых нелинейный функций $r_j(x_j) = c_j W_j(x_j)$, $x_j = \sum_{s=1}^{S} m_{sj} \, l_{sj} \, u_{sj}$ – см. (1).

В частном случае $s = 1$, когда матрица управления U вырождается в строку $(u_1, u_2, \ldots, u_J)$, известно решение вспомогательной задачи в виде критерия оптимальности Гросса [2]:

– необходимое и достаточное условие того, что вектор с неотрицательными компонентами $u = (u_1, u_2, \ldots, u_J)$ максимизирует выражение $\sum_{j=1}^{J} r_j(u_j)$, где r_j – выпуклые функции, при ограничении $\sum_{j=1}^{J} u_j = U_1$, где $U_1 > 0$ – целое число, состоит в том, что

$$\max_{j\in J^*}[r_j(u_j+1)-r_j(u_j)] \le \min_{j\in J(U)}[r_j(u_j)-r_j(u_j-1)],$$

$$J^* \overset{\Delta}{=} \{1,2,...,J\}, \quad J(U) \overset{\Delta}{=} \left\{ j\in J^* \big/ u_j > 0 \right\}.$$

Это условие можно переформулировать следующим образом:

$$r_j(u_j+1)-r_j(u_j) \le r_i(u_i)-r_i(u_i-1)$$

$$\forall j \in J^*, \quad \forall i \in J(U).$$

Найдём условия оптимальности для более общего случая $s > 1$ и заданной матрицы применимости L, составленной из нулей и единиц.

Для этого определим следующие множества.

$J^* \overset{\Delta}{=} \{1,2,...,J\}$ – множество всех индексов столбцов матриц применимости и управления;

$J(j) \overset{\Delta}{=} \{J^* / \exists s: \ l_{sj} = l_{si} = 1\}$ – множество индексов столбцов матрицы применимости, связанных со столбцом j через ненулевые элементы строк этой матрицы, т.е. если $i \in J(j)$, то существует строка s, на пересечениях которой со столбцами i и j соответствующие элементы l_{sj} и l_{si} матрицы L равны единице;

$J^*(j) \overset{\Delta}{=} \{i \in J(j) \ / \ \exists s: \ u_{si} > 0, \quad l_{sj} = l_{si} = 1\}$ – сужение множества $J(j)$ на множество индексов столбцов $J^*(j) \in J(j)$, связанных со столбцом j через ненулевые элементы строк матрицы применимости и имеющие ненулевой элемент матрицы управления, т.е. если $i \in J^*(j)$, то существует строка s, такая, что l_{si} и l_{sj} равны единице, и, кроме того, $u_{si} > 0$, в силу чего возможно перераспределение одной единицы со столбца i на столбец j

(новые значения u_{si}, u_{sj} будут равны соответственно u_{si} -1, u_{sj} +1) без изменения суммы $\sum_{j=1}^{J} u_{sj}$ элементов строки s;

$I(j)$ – множество индексов столбцов, таких, что возможно перераспределение одной единицы с этих столбцов на столбец j, т.е. для любого $i \in I(j)$ существует такое множество N индексов $\{i_1, i_2, \ldots, i_N)$, что $i_{\text{n-1}} \in J^*(i_n)$; $n = 2,3,\ldots,N$; $i_1 \overset{\Delta}{=} j$; $i_N \overset{\Delta}{=} i$; перераспределение единиц производится по «цепочке» – N-1 раз передаётся одна единица с i_n на i_{n-1} ($n = N, N$-1,…,2), в силу того, что $i_{\text{n-1}} \in J^*(i_n)$;

$I^*(j) \overset{\Delta}{=} \left\{ i \in J^* \ / \ j \in I(i) \right\}$ – множество индексов столбцов, таких, что возможно перераспределение одной единицы с j-го столбца на эти столбцы; данное множество является «обратным» множеству $I(j)$.

Лемма. Необходимое и достаточное условие того, что матрица управлений $U = \| u_{sj} \|$ размера $S \times J$ с неотрицательными элементами максимизирует выражение $\sum_{j=1}^{J} r_j(x_j)$, где r_j – выпуклые функции, $x_j = \sum_{s=1}^{S} l_{sj} u_{sj}$ – сумма элементов матрицы U в j-ом столбце с весами l_{sj} ($l_{sj} = 0$ или $l_{sj} = 1$ – элементы матрицы применимости $L = \| l_{sj} \|$, не содержащей нулевых строк и столбцов), при ограничениях на элементы u_{sj} в строках $\sum_{j=1}^{J} u_{sj} = U_s$, где $u_s > 0$ – целые числа, состоит в выполнении неравенства

(5) $r_j(x_j + 1) - r_j(x_j) \le r_i(x_i) - r_i(x_i - 1)$

$\forall j \in J^*, \quad \forall i \in I(j),$

где множества J^* и $I(j)$ определены выше.

Доказательство. Достаточность. Пусть $U = \| u_{sj} \|$ – допустимое решение, т.е. решение, для которого выполняются заданные в условиях леммы ограничения и, кроме того, U удовлетворяет неравенству (5). Пусть $\tilde{U} = \left\| \tilde{u}_{sj} \right\|$ – любое другое допустимое решение.

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{J} r_j(x_j) \geq \sum_{j=1}^{J} r_j(\tilde{x}_j), \quad \tilde{x}_j \overset{\Delta}{=} \sum_{s=1}^{S} l_{sj}\,\tilde{u}_{sj}.$$

Положим

$$\lambda_j \overset{\Delta}{=} r_j(x_j+1) - r_j(x_j), \quad \lambda_j^{\max} \overset{\Delta}{=} \max_{i \in I^*(j)} \{\lambda_i\}.$$

Из выпуклости r_j следует, что $[r_j\,(n+1)$ - $r_j\,(n)]$ – невозрастающая функция на множестве целых чисел. Поэтому если $n \geq x_j$, то по определению λ_j

(6) $\quad r_j(n+1) - r_j(n) \leq \lambda_j,$

а если $0 < n \leq x_j$, т.е. $\exists u_{sj} > 0$, множество $I^*(j)$ непусто, определено $\lambda_j^{\max}$, и из условия (6) следует

(7) $\quad r_j(n-1) - r_j(n) \leq \lambda_j^{\max}.$

Просуммируем неравенства (6) по всем n от x_j до $\tilde{x}_j - 1$ при $\tilde{x}_j > x_j$ и неравенства (7) по всем n от $\tilde{x}_j + 1$ до x_j при $x_j > \tilde{x}_j$. Получаем

$$r_j(\tilde{x}_j) - r_j(x_j) \leq \lambda_j(\tilde{x}_j - x_j) \quad \text{при } \tilde{x}_j > x_j,$$

$$r_j(\tilde{x}_j) - r_j(x_j) \leq \lambda_j^{\max}(\tilde{x}_j - x_j) \quad \text{при } \tilde{x}_j < x_j.$$

Суммируя по всем j, получим на рассматриваемом множестве индексов J^*

(8) $$\sum_{j=1}^{J} r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^{J} r_j(x_j) \leq \sum_{j \in I} \lambda_j(\tilde{x}_j - x_j) + \sum_{j \in I^*} \lambda_j^{\max}(\tilde{x}_j - x_j),$$

где $I \overset{\Delta}{=} \left\{ j \in J^* \,/\, \tilde{x}_j > x_j \right\}, \quad I^* \overset{\Delta}{=} \left\{ j \in J^* \,/\, \tilde{x}_j < x_j \right\}$ – множество индексов, для которых $\tilde{x}_j$ соответственно больше или меньше, чем x_j. Ясно, что те индексы, для которых $\tilde{x}_j = x_j$, вообще можно не рассматривать.

Так как U – допустимое решение, то его можно получить посредством перераспределения единиц в строках матрицы $\|u_{sj}\|$, при этом соответствующим образом изменится сумма элементов столбцов $x_j = \sum_{s=1}^{S} l_{sj}\,\tilde{u}_{sj}$, $j = 1,2,\ldots,J$, и произойдёт передача единицы со столбцов множества I на столбцы множества I^*.

Перераспределение единиц, осуществляемое при заданных матрицах $L = \|l_{sj}\|$ и $U = \|u_{sj}\|$ размера $S \times J$, возможно только в направлении от j-го столбца из множества $I(i)$ к i-му столбцу из множества $I^*(j)$, что следует из определения этих множеств. Поэтому любому j-му столбцу из множества I^* можно поставить в соответствие некоторый i-ый столбец из I, причём $i \in I^*(j)$, $j \in I(i)$, и наоборот можно установить соответствие $I \to I^*$.

Рассмотрим две последние суммы в неравенстве (8). Для каждой единицы из $\sum_{j\in I}(\tilde{x}_j - x_j)$ единиц первой суммы установим, с учётом вышеизложенного, взаимно-однозначное соответствие с некоторой единицей из $-\sum_{j\in I^*}(\tilde{x}_j - x_j)$. Так как

$$\sum_{j\in I}(\tilde{x}_j - x_j) = -\sum_{j\in I^*}(\tilde{x}_j - x_j)$$

в силу заданных ограничений, преобразуем рассматриваемые суммы к следующему виду:

$$\sum_{j\in I}\lambda_j(\tilde{x}_j - x_j) + \sum_{j\in I^*}\lambda_j^{\max}(\tilde{x}_j - x_j) = \sum_{i,j\in I^*(i)}(\lambda_j - \lambda_i^{\max}).$$

По определению, $\lambda_i^{\max} = \max_{j\in I^*(i)}\{\lambda_j\}$, поэтому все элементы суммы положительны. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{J} r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^{J} r_j(x_j) \le 0,$$

что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть U – оптимальное решение задачи, $\tilde{U}$ – другое допустимое решение, такое, что для фиксированных α,

β имеем $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha$-1, $\tilde{x}_\beta = x_\beta$+1, $\alpha \in I(\beta)$, а $\tilde{x}_j = x_j$ для остальных j. Пусть, кроме того, для α, β не выполняется равенство (5):

(9) $r_\beta(x_\beta + 1) - r_\beta(x_\beta) > r_\alpha(x_\alpha) - r_\alpha(x_\alpha - 1)$.

Так как r_j – выпуклые функции, то $\alpha \neq \beta$.

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{J} r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^{J} r_j(x_j) = r_\alpha(x_\alpha - 1) - r_\alpha(x_\alpha) + r_\beta(x_\beta + 1) - r_\beta(x_\beta).$$

Это выражение больше нуля на основании неравенства (9), что противоречит оптимальности решения U. Итак, лемму можно считать доказанной.

Переходя на втором этапе решения от рассмотрения вспомогательной с критерием $F_{без} = \sum_{J=1}^{J} r_j(x_j)$ к *исходной задаче* с критерием $R = F_{без} / F_{зат}$ и условием $m_{sj} = m_j$ (s = 1,2,…,S), отметим следующее обстоятельство.

Если формально заменить в критерии R целочисленный аргумент u_{sj} на его непрерывный аналог v_{sj}, то на основе соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial v_{sj}} = \frac{1}{F_{зат}} \left(\frac{\partial F_{без}}{\partial v_{sj}} - \frac{\partial F_{зат}}{\partial v_{sj}} R \right)$$

может быть построена итерационная процедура определения оптимальной по критерию R матрицы $V = \| v_{sj} \|$:

$$V^{(k)} = \arg\max_{\|V_{sj}\|} R^{(k)}(V) =$$

(10)
$$= \arg\max_{\|V_{sj}\|} \left\{ \frac{1}{F_{зат}(V^{(k-1)})} \left[F_{без}(V) - F_{зат}(V) \frac{F_{без}(V^{(k-1)})}{F_{зат}(V^{(k-1)})} \right] \right\}$$

(k = 1,2,…).

Поскольку $\dfrac{\partial R^{(k)}(V)}{\partial V_{sj}} = \left. \dfrac{\partial R(V)}{\partial V_{sj}} \right|_{v_{sj} = v_{sj}^{(k-1)}}$ (s = 1,2,…,S; j = =1,2,…,J), то последовательность критериев $R^{(1)}$, $R^{(2)}$,… эквивалентна исходному критерию R в том смысле, что если существует $V^* = \lim V^{(\mathrm{k})}$ при $\mathrm{k} \to \infty$, то

$$\arg\max_{\|V_{sj}\|} R(V) = V^* .$$

Опуская в (10) постоянный множитель $1/F_{зат}\,(V^{(k\text{-}1)})$ (не влияющий на результаты оптимизации), заменяя $F_{без}\,(V^{(k\text{-}1)})$ на $F_{без}\,(V)$ и возвращаясь к целочисленному аргументу U, получим итерационную последовательность решения исходной целочисленной задачи

$$u^{(k)} = \arg\max_{\|u_{sj}\|} R^{(k)}(u) = \arg\max_{\|u_{sj}\|}\left\{\sum_{j=1}^{J}\left[\left(1-\frac{p_j x_j}{a^{(k-1)}}\right)cW_j(m_j x_j)\right]\right\}$$

$(k = 1,2,\ldots,K)$,

где $x_j = \sum_{s=1}^{S} l_{sj}\, u_{sj}$, $(j = 1,2,\ldots,J)$, $a^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{J} p_j \sum_{s=1}^{S} l_{sj}\, u_{sj}^{(k-1)}$; $u_{sj}^{(0)}$ $(s = 1,2,\ldots,S;\ \ j = 1,2,\ldots,J)$ определяется из решения вспомогательной задачи, а K – из условия $u^{(k\text{-}1)} \approx u^{(k)}$.

Критерий $R^{(k)}(u)$ представляет собой сумму произведений линейно убывающих функций аргумента x_j $(j = 1,2,\ldots,J)$ на выпуклые функции того же аргумента. Поэтому на каждом шаге k итерации может быть использован унифицированный (по обоим этапам) алгоритм решения задачи (3), (4), построенный на основе представленной здесь леммы.

Заключение

Отдельные фрагменты представленного в статье итерационного алгоритма целочисленной оптимизации вполне успешно использовались в прикладных работах ИПУ по автоматизированному целераспределению поражающих средств. Но поскольку концепция управления безопасностью объектов РКТ в их жизненном цикле носит преимущественно прогностический характер, то эффективность этой оптимизации в РКТ ещё предстоит оценивать – по мере практической реализации данной концепции.

ЛИТЕРАТУРА

1. АНДРИЕНКО А.Я., ИВАНОВ В.П., ПОРТНОВ-СОКОЛОВ Ю.П. *Концепция управления безопасностью объектов РКТ в их жизненном цикле.* / Труды Института проблем управления РАН. 1999, т. III. С. 14 – 38.
2. МОУЛДЕР ДЖ., ЭЛМАГРАБИ С. *Исследование операций*. Том 1. М.: Мир, 1981. – 286с.