

# ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЛАКСА-ФРИДРИХСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Малышев С. В.<sup>1</sup>

(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

*Данная статья посвящена программной реализации численного метода Лакса-Фридрихса для моделирования нестационарных задач газовой динамики. Рассматривается задача Сода в двух измерениях. Её постановка - следующая. Имеется замкнутая ударная труба с пластинкой посередине. Пластинка разделяет два газа с разными термодинамическими характеристиками. В начальный момент времени она моментально удаляется. Газы смешиваются, появляется разрыв и ударная волна. Цель работы заключается в нахождении термодинамических характеристик в любой момент времени и программная реализация расчётов с помощью численного метода Лакса-Фридрихса. Эта задача актуальна на данный момент в силу нехватки чётких вычислительных алгоритмов в сфере газовой динамики. Решение зависит от количества ячеек в сетке, на которую разбивается поверхность. В результате приведён расчёт и даны численные значения для разных сеток и их сравнение с помощью различных нормам.*

Ключевые слова: ударные волны, задача Сода, численный метод Лакса-Фридрихса.

## 1. Введение

Одним из основных методов исследования современных задач газовой динамики является численное моделирование. Благодаря относительной простоте формулировок и алгоритмов, широко используются конечно-разностные схемы, такие как методы Лакса-Фридрихса, Маккормака, WENO (weighted essentially non-oscillatory) методы. Дополнительным достоинством этого класса схем является эффективность расширения одномерных формулировок на двух- и трехмерные задачи. К недостаткам конечно-разностных методов можно отнести сложность, а зачастую и невозможность, их применения на неструктурированных расчетных сетках. Современные

---

<sup>1</sup> Малышев Сергей Вадимович, студент (serge.malychev@mail.ru).

методы высокой точности – в первую очередь WENO-методы – позволяют достигать произвольно высоких порядков сходимости на гладких решениях за счет расширения разностного шаблона.

В современной литературе разностные методы, как правило, формулируются в консервативной форме, связывающей изменение значений консервативных физических величин в расчетном узле с т.н. «потоками» этих величин между расчетными узлами. Простейшим методом, допускающим такую формулировку, является метод Лакса-Фридрихса первого порядка аппроксимации [1].

В настоящей работе выполнена программная реализация метода Лакса-Фридрихса для одномерных нестационарных течений совершенного газа и проведена проверка сходимости численного решения к точному решению частного случая задачи о распаде газодинамического разрыва.

## 2. Постановка задачи

Два совершенных газа находятся в одномерной трубе и разделены тонкой мембраной (Рис 1). В начальный момент времени мембрана моментально удаляется. Дальнейшая эволюция параметров газа – давления, плотности и скорости – описывается искомыми функциями координаты и времени.



Рис. 1. Начальное состояние задачи.

Рассматривается частный случай с одинаковыми показателями адиабаты для обоих газов. Расчёты будут проводиться для следующих начальных условий (задача Сода [2]): при  $x < 0$   $(\rho, u, p) = (1.0, 0, 1.0)$ , при  $x \geq 0$   $(\rho, u, p) = (0.125, 0, 0.1)$ .

Требуется узнать, какие будут состояния у плотности, скорости и давления в момент времени  $t = 0,2$  на отрезке  $x = [-0.5, 0.5]$ .

### 3. Описание математической модели

Будем считать, что конфигурация течения после распада разрыва известна заранее ([3]), тогда направо будет распространяться ударная волна, налево – волна разрежения, а между ними – контактный разрыв.

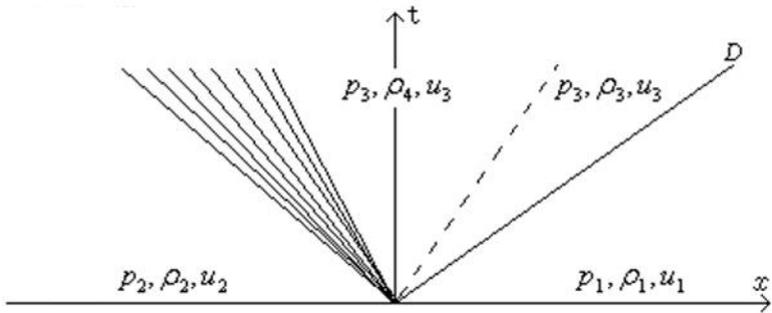


Рис. 2. Схема течения ( $x-t$  диаграмма) при распаде разрыва

Как видно из схемы течения (Рис. 2), множество лучей, направленных налево – это волна разрежения. Пунктирная линия – это контактный разрыв. Нужно заметить, что слева и справа от него давление и скорость одинаковы, а меняется только плотность. Последний сплошной луч – это ударная волна.

Для них можно выписать систему из пяти уравнений с пятью неизвестными:  $p_3, \rho_3, u_3, \rho_4$  и  $D$  (скорости скачка, бегущего вправо). Причём  $a_2, a_4$  – это скорости звука, равные  $\sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}}$  и  $\sqrt{\frac{\gamma p_3}{\rho_4}}$  соответственно.

$$\rho_1(u_1 - D) = \rho_3(u_3 - D),$$

$$p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2 = p_3 + \rho_3(u_3 - D)^2,$$

$$\frac{(u_1 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{(u_3 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_3}{\rho_3},$$

$$\frac{p_3}{\rho_4^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma},$$

$$u_3 + \frac{2a_4}{\gamma - 1} = u_2 + \frac{2a_2}{\gamma - 1},$$

Первые три уравнения – это соотношения на прямом скачке уплотнения, четвёртое - уравнение адиабаты Пуассона для волны разрежения Римана, а пятое - соотношение вдоль волны Римана для совершенного газа.

Все они сводятся к одному уравнению для  $D$ :

$$u_k(D) + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_2^{\frac{\gamma}{\gamma}}}{\rho_2}} (p_k(D))^{\gamma - 1/2\gamma} - u_2 - \frac{2a_2}{\gamma - 1} = 0, \text{ где}$$

$$p_k(D) = \frac{2\rho_1(D - u_1)^2 + (1 - \gamma)p_1}{\gamma + 1},$$

$$u_k = \frac{2D^2 + (\gamma - 3)u_1D + (1 - \gamma)u_1^2 - 2a_1^2}{(\gamma + 1)(D - u_1)}.$$

Его решение можно найти с любой наперед заданной точностью, например, с помощью метода Ньютона.

Полученное точное решение задачи о распаде разрыва, можно использовать для проверки сходимости численного метода.

#### 4. Численное моделирование

Для моделирования нестационарных течений совершенного газа используются уравнения Эйлера: три уравнения сохранения, которые записаны в дифференциальной форме: сохранения импульса, энергии и массы.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2}$$

Вектор  $U$  называется вектором консервативных величин, а вектор  $F$  - потоками этих величин. При известных начальных условиях – значениях в каждой точке в начальный момент времени – требуется узнать, что произойдет в произвольный момент времени. В этом поможет численный метод Лакса-Фридрикса.

Расчетная область разбивается на  $N + 1$  расчетных узлов, расположенных равномерно. Чем больше будет расчетных узлов, тем выше ожидается точность вычислений.

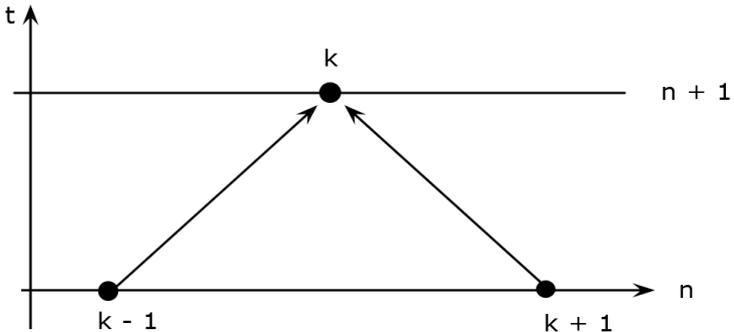


Рис. 3. Разностный шаблон метода Лакса-Фридрикса

Сам численный метод работает так (Рис. 3): берутся значения в  $(k + 1)$ -ом и  $(k - 1)$ -ом расчетном узле в  $n$ -ый момент времени и по ним с помощью разностной формулы

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n))$$

находятся значения в  $k$ -ом узле в  $(n + 1)$ -ый момент времени.

Допустимая величина шага по времени определяется условием Куранта-Фридрихса-Леви.

Также, как и любой другой метод, метод Лакса-Фридрихса позволяет найти значения с определённой точностью и требуется проверить, насколько численные результаты будут отклоняться от точного решения.

## **5. Структура программы**

Программа, составленная на языке Си, состоит из трёх разделов.

Первый раздел – подсчёт численного решения. Считается значения плотности, скорости и давления методом Лакса-Фридрихса от начального момента времени до заданного и выводим их в файл, читаемый программой Paraview, в которой можно построить графики и удостовериться в правильности визуально.

Второй раздел – подсчёт точного решения. С помощью метода Ньютона производится подсчёт значений из алгебраического уравнения и вывод в файл, который также распознаётся программой Paraview.

Третий раздел – вычисление норм разности значений из первого и второго раздела.

## **6. Сравнение точного и численного решения на разных сетках**

Программа работает и выводит решения при заданном количестве расчётных узлов. Рассмотрим их при разных сетках.

Значения для сетки на 50 узлов приведены на рис. 4.1. Точками обозначены графики численного решения, а сплошными линиями графики точного.

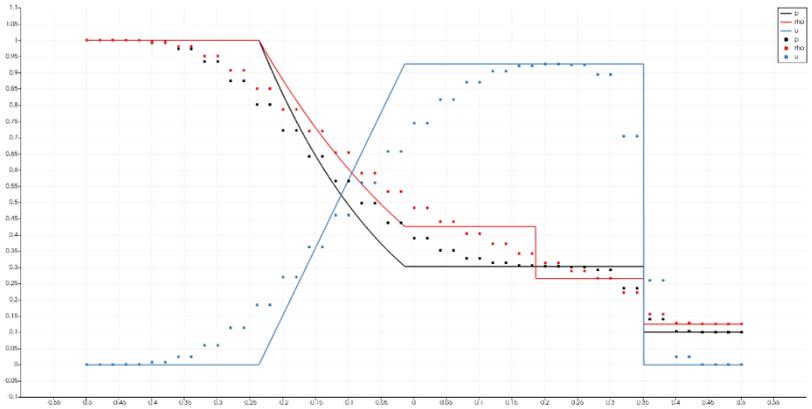


Рис. 4.1. Сравнение точного и численного решений при  $N = 50$

Как видно на рис. 4.1, точки близки к точному решению и при этом образуют ступеньки, то есть стоят попарно на одной строчке. Такое явление обусловлено т.н. «шахматным расщеплением» (odd-even decoupling) сетки при применении метода Лакса-Фридрихса, вызванным, в свою очередь, отсутствием нижнего центрального узла в разностном шаблоне.

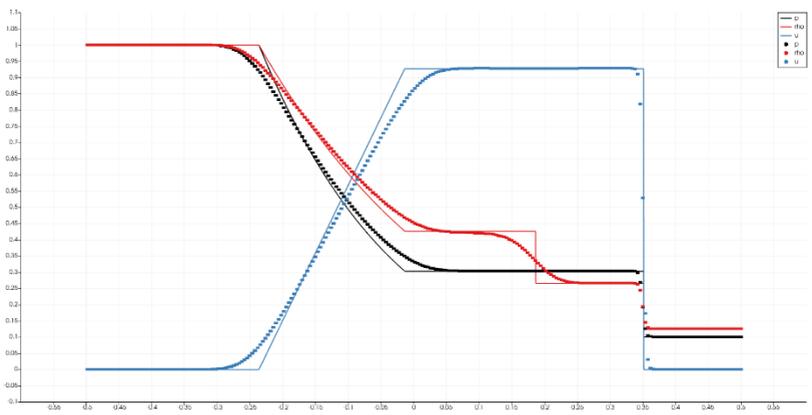


Рис. 4.2. Сравнение точного и численного решений при  $N = 500$

Графики на сетке в 500 узлов приведены на рис. 4.2). Всё то же самое только численное решение теперь обозначается пунктирной линией. Как видно, графики становятся всё ближе и ближе.

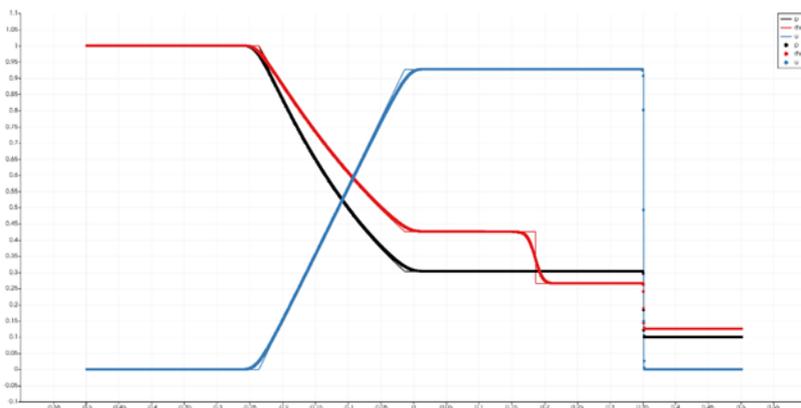


Рис. 4.3. Сравнение точного и численного решений при  $N = 5000$

И уже при совсем мелкой сетке в 5000 узлов (Рис. 4.3) графики почти сливаются друг с другом. Здесь уже наглядно видны три перепада для плотности – красная линия. Сначала идёт волна разрежения – гладкое понижение, потом скачок – контактный разрыв, и в конце ещё один скачок – ударная волна.

Если рассматривать нормы разностей численного и точного решения, то можно увидеть, что точность возрастает, однако для этого нужно подобрать рабочую норму.

Использовались три нормы: равномерная,

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \max_k |u_k^{approx} - u_k^{exact}|$$

Евклидова

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}$$

и среднеквадратичная

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}$$

Для каждой произведены подсчёты для разных сеток.

| N = 50    | Равномерная Норма | Евклидова Норма | Среднеквадратичная |
|-----------|-------------------|-----------------|--------------------|
| Плотность | 0,150113          | 0,372828        | 0,052726           |
| Скорость  | 0,668647          | 1,036487        | 0,146581           |
| Давление  | 0,199389          | 0,463362        | 0,065529           |
| N = 500   |                   |                 |                    |
| Плотность | 0,094115          | 0,468578        | 0,020955           |
| Скорость  | 0,453968          | 0,964659        | 0,043141           |
| Давление  | 0,122787          | 0,446648        | 0,019975           |
| N = 5000  |                   |                 |                    |
| Плотность | 0,100699          | 0,602934        | 0,008527           |
| Скорость  | 0,599741          | 0,931951        | 0,01318            |
| Давление  | 0,151752          | 0,351264        | 0,004968           |

Как видно по равномерной норме изменений значений почти нет. Это происходит по той причине, что эта норма ищет максимальную ошибку – наибольшую погрешность вычислений. А, как можно видеть на рисунке, особенно на контактном разрыве в ней всегда будет погрешность в значениях, и она не будет зависеть от количества узлов.

Евклидова норма тоже практически не убывает, а для плотности – возрастает. Это связано с чрезвычайно сильным «размыванием» контактного разрыва по расчетным узлам, характерным для всех численных методов первого порядка аппроксимации.

Среднеквадратичная норма убывает при измельчении сетки, однако скорость убывания оказывается ниже, чем ожидается при применении метода первого порядка аппроксимации. Вероятно, такое поведение связано с разрывностью исследуемого течения.

## 7. Заключение

Разработана программа для численного моделирования одномерных нестационарных течений газов на основе уравнений Эйлера и конечно-разностного метода Лакса-Фридрихса. На основе моделирования задачи о распаде газодинамического разрыва показана удовлетворительная сходимость численного решения к точному по мере измельчения расчетной сетки.

## Литература

1. ЧЁРНЫЙ Г.Г. *Газовая динамика*. – 1988.
2. LEVEQUE, RANDALL J. *Numerical Methods for Conservation Laws*.– 1922. –P. 125.
3. SOD G.A. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*. // J. Comput. Phys. 27 –P. 1-31.

### SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE LAX-FRIEDRICHS NUMERICAL METHOD FOR MODELING NONSTATIONARY PROBLEMS OF GAS DYNAMICS

**Malyshev Sergey**, Moscow State University, Moscow, student (serge.malychev@mail.ru).

*Abstract: This article is devoted to the software implementation of the numerical Lax-Friedrichs method for modeling nonstationary problems of gas dynamics. The Soda problem is considered in two dimensions. Her production is as follows. There is a closed shock tube with a plate in the middle. The plate separates two gases with different thermodynamic characteristics. At the initial moment of time, it is instantly deleted. Gases mix, producing a shock wave. The purpose of the work is to find the thermodynamic characteristics at any time and to program the implementation of calculations using the numerical Lax-Friedrichs method. This task is relevant at the moment due to the lack of clear computational algorithms in the field of gas dynamics. The solution depends on the number of cells in the grid into which the surface is divided. As a result, the calculation is given and numerical values for different grids are given and their comparison with the help of various standards.*

Keywords: shock wave, Soda problem, Lax-Friedrichs numerical method.

УДК 533.2  
ББК 30.124

Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...  
Опубликована ...заполняется редактором...