УДК 519.711.2
ББК 32.817

МАГИСТРАЛЬНЫЙ МЕТОД В СИСТЕМНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Салангин А.А.[1]
(Псковский государственный политехнический институт, Псков)

Сформулирована идея магистрального метода параметрического синтеза, сводящая решение исходной задачи к последовательности задач. В рамках линейного и квадратичного приближений дан вывод и обоснованы соотношения для трех типов итерационных процедур, реализующих этот метод.

Ключевые слова: магистральный метод, системное проектирование, параметрический синтез.

Введение

Задача параметрического синтеза в системном проектировании формулируется как необходимость найти такой вектор x^{opt} в пространстве изменения переменных системы x_i, $(0 \leqslant \ x_i \geqslant \ 1)$, $i = 1, ..., n$, который минимизирует критериальную функцию $F(x)$ с одной функцией ограничений $G(x)$

$$\begin{cases} F(x) \to min; \\ G(x) \leqslant G_0. \end{cases}$$

На практике функция ограничений чаще всего представлена алгоритмически, кроме того, компоненты x могут иногда только возрастать и принимать дискретные значения (например, при планировании испытаний). Поэтому традиционные итерационные методы поисковой оптимизации (градиентный, сопряженных направлений и др.) малопригодны.

---

[1] *Алексей Александрович Салангин, кандидат технических наук, доцент,(alsalan@yandex.ru).*

Использование приближенных аналитических выражений для
$f_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i},\ g_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ –градиентов функции F и G , а также свойство робастности стационарного решения позволяют дать новый подход к параметрическому синтезу. Обычно в практических задачах системного проектирования $f_i < 0, \quad g_i > 0$ во всей допустимой области, поэтому решение задачи достигается на её границе. Ниже предлагается разработка и обоснование одного из таких подходов – *магистрального метода,* который основан на переходе от исходной задачи к последовательности задач поэтапного улучшения критериальной функции. Соответствующие процедуры опираются на аналитические выражения для поправок, полученных в рамках линейного и квадратичного приближений.

1. Магистральный метод

Суть магистрального метода распределения ресурсов заключается в следующем:

1) Исходную задачу оптимизации можно свести к последовательности N задач оптимизации, если записать $(k = 0,\dots,N-1)$

$$\begin{cases} -\Delta F = F^k - F^{k+1} \to \max \\ \Delta G = G^{k+1} - G^k = \delta^k, \quad \delta^k = \dfrac{G_0 - G^k}{N-k}. \end{cases}$$

При достаточно больших N , т. е. малых величинах δ^k, будут малыми и компоненты вектора поправок ε^k. Поправки ε^k находим из условия максимального уменьшения целевой функции F на каждом k шаге $x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k$, т. е. решая эквивалентную систему уравнений с учетом величин первого порядка (в рамках линейного приближения)

$$\begin{cases} -\Delta F = -(f,\varepsilon) \to \max \\ \Delta G = (g,\varepsilon) = \delta, \end{cases} \tag{1}$$

или с учётом величин второго порядка (в рамках квадратичного приближения)

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta F = -(f,\varepsilon) - \frac{1}{2}(\varepsilon, V\varepsilon) \to \max; \\ \Delta G = (g,\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon, W\varepsilon) = \delta, \end{cases}$$

где $V = \left\| \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad W = \left\| \dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$.

Начальное значение x^0 определяется заданным исходным состоянием или как решение задачи с упрощенным аналитическим выражением для F и G.

2) На каждом k шаге итерации находим стационарное решение, т.е. оптимальную точку x^{opt}, используя неоходимые условия оптимальности – условия Куна – Таккера:

   а) для линейного приближения

$$\begin{cases} f + \lambda g = 0 \\ (g,\varepsilon) = \delta; \end{cases}$$

   б) квадратичного приближения

$$\begin{cases} f + V\varepsilon + \lambda(g + W\varepsilon) = 0 \\ (g,\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon, W\varepsilon) = \delta. \end{cases}$$

3) Вместо множителя Лагранжа, вычисляемого в оптимальной точке x^{opt} как $\lambda = -\dfrac{f}{g}$, введём n параметрических множителей λ_i , которые для произвольной точки x_i определяются по формуле

$$\lambda_i = -\frac{f_i}{g_i} > 0.$$

В пространстве параметров определим λ- магистраль как линию, вдоль которой некоторые параметрические множители равны между собой и G- магистраль как линию, вдоль которой $G(x) = G_0$.

Тогда задача по нахождению оптимального решения заменяется на эквивалентную задачу итерационной процедуры сближения параметрических множителей $\lambda_1 \to \lambda_2 \to \ldots\, \lambda$ внутри допустимой области с выходом на её границу. При оптимальном решении $x = x^{opt}$ все параметрические множители должны быть равны между собой $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda$, а магистрали пересекаться.

2. Условия реализации магистрального метода

Докажем теоремы, которые определяют характер действий, связанный с оценкой расположения текущей точки x^k относительно $\lambda-$магистрали и $G-$ магистрали при решении исходной задачи для линейного и квадратичного приближений, а также достаточные условия оптимальности.

Теорема 1. *Если очередное приближение x_i^k находится в области, где $\lambda_i > \lambda_j \ (i \neq j)$ и $\delta > 0$, то последующие шаги итерации k необходимо выбирать так, чтобы увеличивать только ту переменную x_i^k, которая соответствует наибольшему значению параметрического множителя (оставляя другие без изменения) и двигаться до сближения с одной из магистралей.*

Доказательство. Пусть очередное приближение x_i^k находится в области, где $\lambda_i > \lambda_j \ (i \neq j)$ и $\delta > 0$, тогда, обозначив $z_i = g_i \varepsilon_i$, имеем в линейном приближении :

$$\Delta G = z_i + \sum_{i \neq j} z_j = \delta > 0;$$

$$-\Delta F = \lambda_i z_i + \sum_{i \neq j} \lambda_j z_j =$$

$$= \lambda_i (\delta - \sum_{i \neq j} z_j) + \sum_{i \neq j} \lambda_j z_j = \lambda_i \delta - \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) z_i.$$

Для задач распределения необратимых ресурсов $z_i \geqslant 0, \quad \delta > 0$ максимум $(-\Delta F)$ достигается только если все $z_j = 0, \quad j \neq i$, т. е. следует изменять координату, соответствующую большему значению параметрического множителя λ_i.

Имеем $-\Delta F = \lambda_i \delta, \quad z_i = g_i \varepsilon_i - \delta$ и значение поправки $\varepsilon_i = \dfrac{\delta}{g_i}$.

Аналогично доказывается не оптимальность изменения координат, соответствующих большим значениям параметрических множителей для задач распределения обратимых ресурсов при $\delta < 0$.

Эту процедуру необходимо повторять до тех пор, пока не достигнем либо $\lambda-$магистрали, либо G -магистрали.

Теорема 2. *При выходе на $\lambda-$магистраль, когда m наибольших параметрических множителей равны между собой* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m > \lambda_{m+1} \geqslant ... \geqslant \lambda_n, \quad (\delta > 0)$, *в дальнейшем m соответствующих переменных необходимо увеличивать пропорционально первой (оставляя другие без изменений), т.е. двигаться вдоль $\lambda-$магистрали.*

Доказательство. Пусть *m* наибольших параметрических множителей равны и больше остальных $\lambda^* = \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m > \lambda_{m+1} \geqslant ... \geqslant \lambda_n$, $\delta > 0$.

В рамках линейного приближения (1)

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{j=m+1}^{n} z_j = \delta > 0;$$

$$-\Delta F = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j z_j =$$

$$= \lambda^*(\delta - \sum_j z_j) + \sum_j \lambda_j z_j = \lambda^* \delta - \sum_j (\lambda^* - \lambda_j) z_j.$$

Отсюда $(-\Delta F)$ максимально, если все $z_j = 0$, а соответствующие x_j при $j > m$ не должны изменяться. Тогда $\sum_{i=1}^{m} z_i = m z_1 = \delta$ и поправки определяются по формуле $\varepsilon_i = \varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{m g_1}, \quad i = 1, \ldots, m.$

Так как отклонение от $\lambda-$ магистрали ведет к увеличению ресурсов G, то следует двигаться к оптимальной точке вдоль λ-магистрали. С этой целью на каждом шаге необходимо увеличивать поправки соответствующих переменных пропорционально первой $\varepsilon_i = t_i\varepsilon, \quad i = 1, ..., m \quad \varepsilon > 0$, а значение параметра t_i подбирать из условия максимального уменьшения критериальной функции $(-\Delta F)$ вдоль магистрали .

Из (2) в квадратичном приближении находим

$$\begin{cases} -\Delta F & = -(f,t)\varepsilon - \dfrac{1}{2}(t,Vt)\varepsilon^2 \to \max; \\ \Delta G & = (g,t)\varepsilon + \dfrac{1}{2}(t,Wt)\varepsilon^2 = \delta. \end{cases}$$

Из требования выхода на границу с точностью до величин второго порядка малости имеем

$$\varepsilon \cong \frac{\delta}{b}\left(1 - \frac{a_1\delta}{b^2}\right), \quad b = (g,t), \quad a_1 = \frac{1}{2}(t,Wt).$$

Далее,

$$-\Delta F \cong \lambda * \delta\left(1 - \frac{a_1\delta}{b^2}\right) - a_2\frac{\delta}{b^2} = \lambda * \left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{u}{b^2}\right)\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(t,Vt), u = (t,Ut),\ U = \frac{1}{\lambda *}V + W = g_iH, h_{ij} = \frac{\upsilon_{ij}}{-f_i} + \frac{\omega_{ij}}{g_i},$$

где ($i = 1, \dots, m$).

Максимальное уменьшение $(-\Delta F)$ достигается при минимальном $y = \dfrac{u}{b^2}$, необходимые условия существования которого $\dfrac{\partial y}{\partial t_i} = 0$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial t_i}b = 2u\dfrac{\partial b}{\partial t_i}$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial t_i} = 2g_i\sum_j h_{ij}t_j$, $\dfrac{\partial b}{\partial t_i} = g_i$, то $\sum_i\left(\sum_j h_{ij}t_j\right)g_it_i = \sum_j h_{ij}t_j\sum_i g_it_i$.

Необходимые условия выполняются, если положить

$$\sum_j h_{ij}t_j = c = const, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

т. е. $c_1 = c_2 = ... = c_n = c$.

Решая систему линейных уравнений (3), можно найти оптимальные значения t_i^{opt}. Так при наличии двух равных между собой (и больше других) множителей $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_i, \ (i > 2)$ при $t_1 = 1$, т. е. когда $\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = t_2\varepsilon$, получим

$$t_2^{opt} = \frac{h_{11} - h_{21}}{h_{22} - h_{12}}$$

В случае диагонального вида матрицы H имеем $t_i = \dfrac{1}{h_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, m$. При таком выборе поправок каждый из параметрических множителей изменяется, сохраняя равенство между собой. Действительно, представляя λ_i разложением в ряд с учетом (3), получим

$$\lambda_i^{k+1} \cong \lambda_i^k + \sum_i \frac{\partial \lambda_i^k}{\partial x_i} \varepsilon_i = \lambda_i^k (1 - \sum_j h_{ij} \varepsilon_j) =$$
$$= \lambda_i^k (1 - \varepsilon \sum_i h_{ij} t_j) = \lambda_i^k (1 - c\varepsilon).$$

Поскольку выражение в скобках от индекса *i* не зависит, значит все одинаковые на *k* шаге множители λ_i будут равны между собой и на *k*+1 шаге, т.е. сохраняется движение по λ- магистрали.

Достаточным условием $\max(-\Delta F)$ является положительная определенность матрицы вторых производных функции Лагранжа $S(x) = F(x) + \lambda G(x)$, которая достигается для двухмерного случая при условии

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{u'' - \dfrac{b'}{b} u'}{b^2} > 0.$$

Для матрицы *H,* если выполняется $\lambda_1 = \lambda_2$, справедливо равенство $g_1 h_{12} = g_2 h_{21}$. Тогда условие достаточности выполняется при выполнении неравенств

(4) $$h_{11} > h_{21}, \quad h_{22} > h_{12}$$

Для случая диагональной матрицы H из (4) следует достаточное условие оптимальности $h_{ii} > 0$. Невыполнение достаточных условий может приводить не к наилучшему, а к наихудшему результату [1].

Теорема 3. *Для задачи оптимального виртуального распределения при выходе на G-магистраль* ($\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j), \quad \delta = 0$)*необходимо изменять переменные так, чтобы параметрические множители сближались и сохранялось равенство* $\delta = 0$ *(т.е. двигаться вдоль границы допустимой области).*

Доказательство. Упорядочим параметрические множители по убыванию и пусть $\lambda_1 = \max(\lambda_i), \quad \lambda_m = \min(\lambda_i)$.
В рамках линейного приближения

$$\begin{cases} -\Delta F = \sum_i \lambda_i z_i \\ \Delta G = \sum_{i=1}^m z_i + \sum_{i=m+1}^n z_i = 0. \end{cases}$$

Пусть $\sum_{i=1}^{m-1} z_i = a, \quad z_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m-1, \quad z_i \leqslant 0,\ i = m, \ldots, n$, тогда $\sum_{i=m}^n z_i = -a$ и убыль критериальной функции можно представить в виде

$$-\Delta F = \sum_i \lambda_i z_i = \lambda_1 \left(a - \sum_{i=2}^{m-1} z_i \right) + \sum_{i=2}^{m-1} \lambda_i z_i +$$
$$+ \lambda_m \left(-a - \sum_{i=m}^{n} z_i \right) + \sum_{i=m}^{n} \lambda_i z_i =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_m) a - \sum_{i=2}^{m-1} (\lambda_1 - \lambda_i) z_i - \sum_{i=m}^{n} (\lambda_i - \lambda_m) \left| z_i \right|,$$

откуда следует, что $\max(-\Delta F)$ достигается, если принять

$$z_1 = a, \quad z_m = -a, \quad z_i = 0, \quad i \neq 1, m.$$

Значит переменную, соответствующую λ_1 необходимо изменять в сторону возрастания, а соответствующую λ_m - в сторону уменьшения.

В рамках квадратичного приближения полагаем

$$z_1 = a(1 - ta), \quad z_m = -a(1 + ta).$$

Из условия $\Delta G = z_1 + z_m + b_1 a^2 = 0$,

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{11}}{g_1^2} - 2\frac{\omega_{1m}}{g_1 g_m} + \frac{\omega_{mm}}{g_m^2}\right)$$

получим $t = \dfrac{b_1}{2}$, где из-за малости t:

$$z_1^2 = z_m^2 \cong a^2, \quad z_1 z_m \cong -a^2.$$

Далее $(-\Delta F) = \lambda_1 z_1 + \lambda_m z_m - b_2 a^2$,
где $b_2 = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\upsilon_{11}}{g_1^2} - 2\dfrac{\upsilon_{1m}}{g_1 g_m} + \dfrac{\upsilon_{mm}}{g_m^2})$. С учетом $t = \dfrac{b_1}{2}$ получим

$$(-\Delta F) = (\lambda_1 - \lambda_m)a - \frac{a^2}{2}B, \tag{5}$$

где $B = (\lambda_1 + \lambda_m)b_1 + 2b_2$.

После преобразований найдем

$$B = \frac{\lambda_1 h_{11} - \lambda_m h_{m1}}{g_1} + \frac{\lambda_m h_{mm} - \lambda_1 h_{1m}}{g_m} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_m)}{2}\left(\frac{\omega_{mm}}{g_m^2} - \frac{\omega_{11}}{g_1^2}\right).$$

В окрестности оптимальной точки $\lambda_1, \lambda_m \to \lambda$, тогда при диагональном преобладании элементов матрицы H или её диагональном виде

$$B \cong \lambda\left(\frac{h_{11} - h_{m1}}{g_1} + \frac{h_{mm} - h_{1m}}{g_m}\right) > 0.$$

Из (5) следует

$$\max(-\Delta F) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_m)^2}{2B} \text{ при } a = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{B}.$$

Окончательно, при $\delta = 0$ и $\lambda_1 = \max \lambda_i, \quad \lambda_m = \min \lambda_i$ для оптимального решения задачи виртуального распределения на каждом шаге необходимо вычислять поправки соответствующих переменных по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{g_1(B_1 + B_m)}, \quad \varepsilon_m = -\frac{g_1}{g_m}\varepsilon_1,$$

где $B_1 = \dfrac{\lambda_1 h_{11} - \lambda_m h_{m1}}{g_1}, \quad B_m = \dfrac{\lambda_m h_{mm} - \lambda_1 h_{1m}}{g_m}$.

Так как $\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_m < 0$, то

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k(1 - h_{ii}\varepsilon_1) < \lambda_1^k, \quad \lambda_m^{k+1} = \lambda_m^k(1 - h_{mm}\varepsilon_m) > \lambda_m^k$$

при выполнении достаточных условий, т.е. $h_{11} > 0, \quad h_{mm} > 0$. Реализация теоремы 3 эквивалентна сближению параметрических множителей.

3. Выводы

1. Сформулирована идея магистрального метода поиска оптимального решения задач системного проектирования.
2. Доказаны теоремы сходимости итерационной процедуры магистрального метода.
3. Найдены необходимые и достаточные условия оптимальности стационарного решения.

Литература

1. САЛАНГИН А.А. *Методология системного анализа проектируемых технических комплексов :моногр.*/А.А.Салангин.- Псков:ППИ,2009.-280с.
2. СМИРНОВ Ю. М. *Системный подход к проектированию сложных систем.*/Ю. М.Смирнов , А.А.Салангин // Вестник Херсонского национального технического университета. - 2006.- Вып.2.- С. 466 - 472.

THE TURNPIKE METHOD IN THE SYSTEM ENGINEERING

Aleksey Salangin, Pskov State Politechnic Institute, Pskov, Cand.Sc., assistant professor, (alsalan@yandex.ru).

Abstract: The idea of turnpike method of parametric synthesis, converting the original problem solution to the sequence of problems has been formulated. The conclusion has been given within the limits of linear and square approximation and correlation for the three types of iterative procedures, realizing this methods has been established.

Keywords: turnpike method, system engineering,parametric synthesis.