УДК 004.274
ББК 32.81

# МОДЕЛИРОВАНИЕ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ РАЗВИТИЯ НА ОСНОВЕ ФРАКТОИДНЫХ СТРУКТУР

**Семенов А.С.[1] Юдицкий С.А.[2]**
(*Московский авиационный институт, Институт проблем управления РАН, Москва*)

*В статье рассматривается один из возможных механизмов самоорганизации сложных процессов развития. Архитектура системы моделируется фрактальными (самоподобными) графами, процессы развития – динамической системой преобразований на множестве фрактальных графов (фрактоидами), механизм самоорганизации – динамикой функционирования фрактоидов и межфрактоидными связями с применением функций пригодности и выбора.*

Ключевые слова: фрактальный граф, фрактоид, фрактоидная структура, механизм самоорганизации, функция пригодности, функция выбора.

## 1. Введение

Процесс развития сложных систем в различных предметных областях, в первую очередь социально-экономических систем, характеризуется последовательностью периодов (стадий) относительной стабильности, разделенных периодами

---

[1] *Александр Сергеевич Семенов, кандидат физико-математических наук, доцент* (*Semenov_Alex@yahoo.com*).
[2] *Семен Абрамович Юдицкий, доктор техничнских наук, профессор* (*yuseab@yandex.ru*).

интенсивных изменений (“точками бифуркаций”). В работе [1] предлагалось стабильные периоды моделировать с помощью фрактоидов и представлять последовательностями фрактальных графов, принадлежащих одному и тому же классу. Класс определяется едиными правилами построения графов на основе операций фрактальной алгебры [1]. Были введены базовые классы: линейные графы, решетки, гиперкубы, деревья. Принцип самоподобия графов, порожденных фрактоидом, проявляется в том, что каждый последующий граф является надграфом предыдущего графа.

Фрактоид – это динамическая система, которая состоит из следующих компонентов:

- исходного графа;
- базового набора порождающих правил;
- логической функции пригодности.

При работе фрактоида для каждого графа, начиная с исходного (начального), вычисляется значение функции пригодности, проверяющей выполнение заданных критериев. Если критерии не выполняются (нулевое значение функции), то формируется следующий граф. Если выполняются (единичное значение функции), то граф объявляется конечным в данном фрактоиде и принимается за исходный во фрактоиде для следующего стабильного периода.

Переходный (“бифуркационный”) процесс – переход от одного стабильного периода к другому осуществляется при помощи функции выбора, которая определяет следующий фрактоид из множества возможных с учетом приоритетов, состояния внешней среды и т.д.

Таким образом, самоорганизация процессов развития интерпретируется как самостоятельный выбор моделью системы способа ее дальнейшего функционирования на заданном временном горизонте (разумеется, в пределах информации, которой обладает модель).

Процесс развития отображается цепочкой фрактоидов, т.е. последовательностью последовательностей фрактальных графов. В цепочке фиксируется исходный граф начального фрактоида.

Данная статья посвящена методологии моделирования процессов развития самоорганизующихся систем на основе фрактоидных структур. В разделе 2 рассмотрено моделирование стабильных, а в разделе 3 – переходных периодов работы системы.

## 2. Моделирование стабильных периодов развития системы

В [1] были рассмотрены элементарные операции над графами:

- *копирование* – создание копии g' графа-образца g;
- *соединение* – введение ребра, соединяющего выделенную вершину $p_i$ графа g и ее образ $p_i'$ в графе g', обозначается $(p_i \in g) \leftrightarrow (p_i' \in g')$;
- *вставка* – введение дополнительной вершины и двух ребер, соединяющих ее с изоморфными вершинами $p_i$, $p_i'$, обозначается $(p_i \in g) \div (p_i' \in g')$ (в [1] эта операция именовалась “подразбиение”, однако название “вставка”, по мнению авторов, более адекватно).

Введем базирующиеся на этих операциях преобразования над графом g.

(1) $L(g)$: $(p_i \in g) \leftrightarrow (p_i' \in g')$

(2) $R(g)$: $((p_i \in g) \leftrightarrow (p_i' \in g'))$ & $((p_j \in g) \leftrightarrow (p_j' \in g'))$, где $p_i$, $p_j$, $i \neq j$, – выделенные вершины графа g, & – логическая связка формул операций, не интерпретируемых как булевы переменные.

(3) $K(g)$: $\underset{i \in I_g}{\&}((p_i \in g) \leftrightarrow (p_i' \in g'))$,

где $I_g$ – множество номеров вершин графа g.

(4) $D(g)$: $(p_i \in g) \div (p_i' \in g')$, где $p_i$, $p_i'$ – выделенная вершина графа $g$ и ее копия.

Отправляясь от соотношений (1),...,(4), дадим конструктивное определение базовых классов фрактальных графов.

*Линейный граф* (L-граф) – это такой, и только такой граф, который образуется из исходного одновершинного графа, состоящего из одной вершины, путем n-кратного, $n = 0,1,\dots,N$, применения преобразования $L(g)$.

*Граф-решетка* (R-граф), *граф-гиперкуб* (K-граф), *граф-дерево* (D-граф) формируются аналогично на основе соответственно преобразований $R(g)$, $K(g)$, $D(g)$.

Заметим, что одновершинный граф принадлежит каждому из перечисленных базовых классов.

Фрактоид определим как динамическую систему

(5) $\mathcal{F} = (G, P, \pi, \lambda, g_0)$, где

$G$ – множество фрактальных графов,

$P = \{L, R, K, D\}$ – множество базовых преобразований, причем фрактоид реализует только одно преобразование;

$\pi$: $G \times P \to G$ – функция переходов фрактоида;

$\lambda$: $G \to \{0,1\}$ – функция пригодности фрактального графа;

$g_0 \in G$ – исходный граф.

Как уже указывалось во введении, процесс развития системы на заданном временном горизонте моделируется цепочкой фрактоидов. В каждом фрактоиде функция переходов $\pi$ использует базовое преобразование, принадлежащее множеству P.

Если в начальном фрактоиде цепочки класс исходного графа и тип преобразования совпадают, то все графы, порождаемые фрактиоидом, являются базовыми (L-, R-, K-, D-графом). Если не совпадают, то фрактоид порождает гибридные графы, которые принимаются за исходные в следующем фрактоиде цепочки и т.д.

Классы базовых и гибридных фрактальных графов, использованных в статье даны в табл. 1.

Гибридные графы обозначаются двумя буквами, первая из которых определяет тип преобразования, вторая – класс исходного графа[3].

*Таблица 1.*

| | | Класс исходного графа | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | L | R | K | D |
| Базовые преобразования | L | L | LR | LK | LD |
| | R | RL | R | RK | RD |
| | K | KL | KR | K | KD |
| | D | DL | DR | DK | D |

Определим функцию пригодности $\lambda$ графов, порождаемых фрактоидом. Примем, что ее аргументами являются параметры графа: число вершин (позиций) $a$ и число ребер $b$. Функция выражается логической формулой, например:

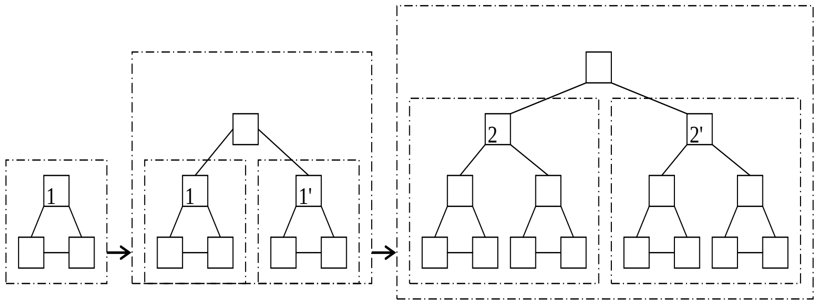
(6) $\lambda(a,b) = (a \geq 15) \wedge (b \geq 18)$.

Для конечного графа последовательности, порожденной фрактоидом, $\lambda = 1$, для предыдущих графов $\lambda = 0$.

Пример последовательности DK-графов, являющейся результатом работы фрактоида $\mathcal{F}_1$ приведен на рис. 1. Через 1, 1' на рис. обозначены выделенные изоморфные вершины графа $g_0$ и его копии $g_0'$, через 2, 2' – аналогичные вершины графов $g_1$, $g_1'$. Для графов $g_0$, $g_1$ функция пригодности $\lambda = 0$, для графа $g_2$ $\lambda = 1$.

[3] *Если исходный граф является гибридным, то его код содержит более одной буквы и выделяется скобками, например К(LR)- граф.*

Преобразование D(g)




$g_0$ $g_0'$ $g_1$ $g_1'$

К-граф $g_0$ $g_1 = (1 \in g_0) \div (1' \in g_0')$ $g_2 = (2 \in g_1) \div (2' \in g_1')$

*Рис.1. Последовательность фрактальных графов как результат работы фрактоида $\mathcal{F}_1$.*

### 3. Моделирование переходных периодов развития системы

При переходе от фрактоида $\mathcal{F}_i$, i = 1,…,k-1, к следующему фрактоиду $\mathcal{F}_{i+1}$, базовое преобразование для $\mathcal{F}_{i+1}$ устанавливаем на основе функции выбора φ, а в качестве исходного графа принимаем конечный граф $\mathcal{F}_i$.

Функции выбора представляется отображением

(7) $\varphi: V \rightarrow P$, где

$V = \{v_j\}$, $j = 1,\ldots,l$ – множество внешних воздействий на систему,

P – множество идентификаторов базовых преобразований согласно (5).

Обозначив моменты перехода (точки бифуркаций) через τ = 1,…,k-1, получим функцию выбора в виде:

(8) $p(\tau+1) = \varphi\ (v(\tau))$, где

$p(\tau+1) \in P$, $v(\tau) \in V$.

Функцию выбора будем задавать таблицей, например, табл.2.

*Таблица 2.*

| v(τ) | p(τ+1) |
|---|---|
| $v_1$ | D |
| $v_2$ | K |
| $v_3$ | R |
| $v_4$ | L |

Пусть $\mathcal{F}_1$ соответствует рис.1., $v(\tau=1) = v_4$, откуда следует $p(\tau+1) = \varphi(v_4) = L$. Функция пригодности для $\mathcal{F}_2$:

(9) $\lambda(a,b) = (a \geq 30) \wedge (b \geq 36)$

Результат работы фрактоида $\mathcal{F}_2$ приведен на рис.2.

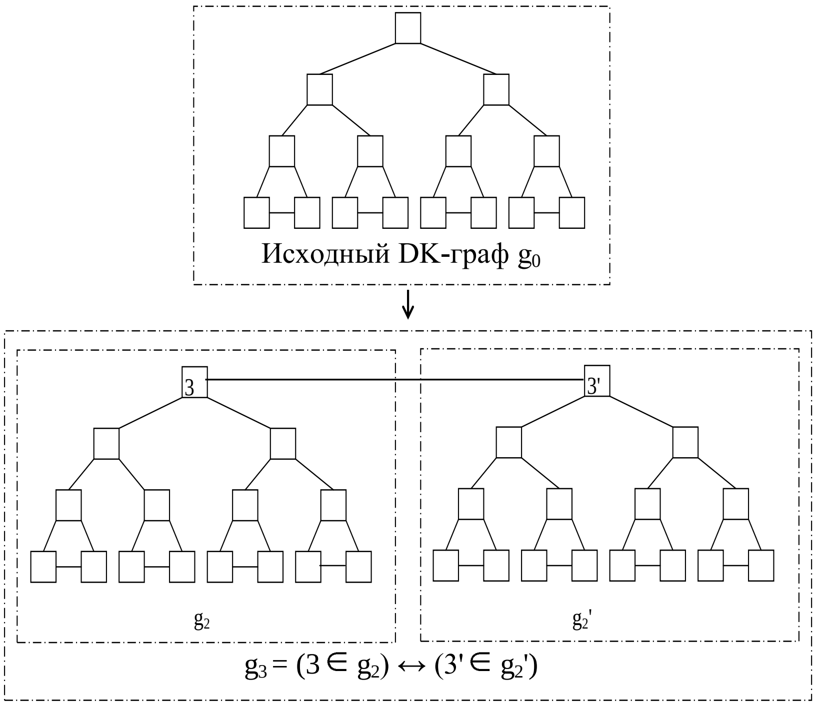



*Рис.2. Результат работы фрактоида $\mathcal{F}_2$.*

## *4. Заключение*

Рассмотрен подход к графодинамическому моделированию развития самоорганизующихся систем различного назначения на заданном временном интервале-горизонте.

Интервал моделирования состоит из стабильных периодов и переходов между ними, характеризуемых изменением основных правил формирования системы. Самоорганизация имеет место в моменты переходов и проявляется в том, что система (ее модель) с учетом внешних обстоятельств сама выбирает правила работы для следующего стабильного периода.

Правила стабильного периода наряду с ростом показателей системы предусматривают и ее структурные изменения, однако, в рамках неизменной (стабильной) конфигурации. Это обстоятельство побудило авторов применить для моделирования стабильных периодов процессов развития самоподобные (фрактальные) графы и формальную динамическую систему, порождающую такие графы – фрактоид.

Фрактоид характеризуется исходным графом и порождающим правилом (преобразованием), которое вводит данный граф в качестве подграфа в следующий граф. Правила представляют собой суперпозицию элементарных операций над графами: копирование графа, введение ребра (соединение) и вершины (вставка).

На основе фрактоида проведена классификация фрактальных графов, которые подразделяются на базовые (линейные графы, решетки, гиперкубы, деревья) и гибридные графы.

Событие завершения стабильного периода определяется логической функцией пригодности, зависящей от параметров графа и вычисляемой для каждого графа, порожденного фрактоидом. Функция пригодности идентифицирует конечный граф данного фрактоида, который принимается за исходный в следующем фрактоиде. Порождающее правило для следующего фрактоида определяется на основе функции выбора.

В статье дано геометрическое представление фрактоидных структур. Для сложных систем оно громоздко. В этой связи актуально создание полноценной фрактальной алгебры, которая позволила бы компактно описывать фрактоидные структуры и проводить над ними эквивалентные преобразования.

## *Литература*


1. СЕМЕНОВ А.С. *Фрактальные развивающиеся архитектуры*. Сборник трудов “Управление большими системами” (в печати).
2. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. — М.: Синтег, 2001.


## MODELING OF SELF-ORGANIZING EVOLUTION PROCESSES ON THE BASIS OF FRACTOID STRUCTURES


**Alexander Semenov**, Moscow Aviation Institute, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (Semenov_Alex@yahoo.com, (499)158-40-90).
**Semen Yuditskiy**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, yuse-mab@yandex.ru tel. (499) 339-59-10).



*Abstract: In this paper, one of the possible mechanisms of self-organizing of complex evolution processes is considered. The architecture of system is simulated by fractal (self-similar) graphs, evolution processes – by dynamic system of transformations on set of fractal graphs (fractoids), mechanism of self-organizing – by dynamics of fractoids functioning and links between fractoids by using of fitness and selection functions.*



Keywords: fractal graph, fractoid, fractoid structure, mechanism of self-organizing, fitness function, selection function.