

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ARCH/GARCH И HAR КАК ИНСТРУМЕНТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ФОНДОВОГО РЫНКА

Патласов Д.А.<sup>1</sup>

(Пермский Государственный Национальный  
Исследовательский Университет, Россия, 614068, г.  
Пермь, ул. Букирева, д. 15)

*Аннотация. Настоящее исследование посвящено исследованию различных моделей оценки условного стандартного отклонения, способных моделировать историческую волатильность финансовых инструментов. Для данной цели в исследовании ставятся следующие задачи: исследовать теоретические основы волатильности фондового рынка; определить наилучший способ оценки волатильности ММВБ с помощью авторегрессионных моделей. В рамках текущего исследования использованы данные по индексу Московской биржи (ММВБ). По результатам исследования формулируется вывод о наилучшей модели оценки волатильности ММВБ. Результаты исследования позволят инвесторам, аналитикам и другим участникам финансового рынка более точно моделировать историческую волатильность, что способствует улучшению качества принятия решений участниками биржевых торгов.*

Ключевые слова: волатильность фондового рынка, GARCH, EGARCH, FIGARCH, HAR-RV, APARCH.

## 1 Введение

В рамках настоящего исследования предполагается построение нескольких эконометрических моделей для оценки волатильности фондового рынка. Среди способов оценки волатильности представлено построение базовых моделей семейств обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH/GARCH) и гетерогенной авторегрессии (HAR) для индекса ММВБ.

В качестве методической базы для исследования выдвинутой темы в работе были использованы как общенаучные

---

<sup>1</sup> Патласов Дмитрий Александрович, Аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике (dmitriypatlasov@gmail.com).

методы, так и специальные, такие как синтез, сравнительный и регрессионный анализ, эконометрические методы, моделирование и другие. Стоит отметить, что эконометрический анализ был выполнен на языке программирования Python.

Информационной базой исследования послужили статьи российских и зарубежных ученых. Данные для анализа были использованы с ресурсов Московской биржи и информационного биржевого портала [Rusbonds.ru](http://Rusbonds.ru).

## **2 Теоретическое обоснование**

Одним из основных свойств доходности акций является волатильность. Хотя значение волатильности как меры риска четко определено в большом количестве финансовой литературы, для существующих эконометрических моделей по-прежнему сложно правильно смоделировать ее и указать, можно ли ее использовать для прогнозирования будущих доходов.

Во все большем количестве финансовой литературы исследуются различные типы волатильности, включая историческую, реализованную, подразумеваемую, условную и модельную волатильность.

Показатель волатильности был официально закреплен для финансовых активов таких как акции, валюта, деривативы и другие. Под волатильностью понимаются изменения цен, следующие друг за другом, независимо от того, являются ли эти изменения положительными или отрицательными [6]. С математической точки зрения волатильность принято определять как стандартное (среднеквадратическое) отклонение цен за определенный период. Также стоит отметить, что при проведении эконометрического анализа при расчете волатильность используется не сами цены, а их логарифмические или арифметические доходности. Данная методика используется для того, чтобы привести данные к стационарному виду. Помимо доходностей допустимо использование различного рода индексов, главным здесь является постоянство дисперсии и математического ожидания в различные периоды наблюдения за анализируемыми временными рядами.

Набор исследований в отношении волатильности на текущий момент можно подразделить на две большие группы. Первая группа исследует способность волатильности предсказывать будущую доходность акций. Как правило, они используют волатильность как фактор в моделях арбитражного ценообразования, в то время как вторая группа научной литературы открывает возможность моделирования волатильности и прогнозирования будущих значений волатильности.

С тех пор как были введены модели ценообразования опционов, разумно различать прогнозные модели, которые включают подразумеваемую (вмененную) волатильность, и ретроспективные модели, которые рассчитывают волатильность на основе исторической цены, а именно модели HAR-RV и GARCH. Волатильность можно смоделировать произвольно, используя достаточное количество высокочастотных выборок данных [1]. Историческая волатильность базового актива наблюдается на основе исторических данных о доходности, а подразумеваемая волатильность извлекается изменений данных высокочастотных котировок и отражает ожидания инвесторов относительно будущей волатильности. Кроме того, волатильность может быть смоделирована с использованием многочисленных моделей временных рядов, включая авторегрессионные и стохастические модели волатильности.

Первым прорывом в моделировании волатильности был Engle (1982), где было показано, что условная гетероскедастичность может быть модифицирована с использованием авторегрессионной модели условной гетероскедастичности (ARCH) [5]. Модель ARCH связывает условную дисперсию члена возмущения с линейной комбинацией квадратов возмущения в недавнем прошлом. Осознав потенциал модели ARCH, исследователи использовали ее для моделирования финансовых временных рядов.

Однако Bollerslev (1986) и Taylor (1986) независимо предложили расширение модели ARCH с формулировкой авторегрессионного скользящего среднего (ARMA) с целью достижения экономии. Модель называется обобщенной ARCH

(GARCH), которая моделирует условную дисперсию как функцию ее запаздывающих значений, а также квадратов запаздывающих значений члена возмущения [6, 9]. Хотя модель GARCH оказалась полезной для учета симметричного эффекта волатильности, она сопряжена с некоторыми ограничениями, такими как нарушение ограничений неотрицательности, налагаемых на оцениваемые параметры.

### 3 Методология исследования

#### 3.1 МОДЕЛЬ GARCH(p, q)

Для проведения оценки волатильности фондового рынка РФ используются ряд эконометрических моделей. Одним из таких способов является модель семейства обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH).

В рамках расчета и оценки волатильности фондового рынка России будут использоваться данные котировок индекса Московской биржи (IMOEX). Стоит отметить, что изначально данные будут приведены к стационарному виду путем взятия логарифмических приростов. Приведение к стационарному виду значений индекса ММВБ будет произведено по следующей формуле:

$$r_t = \ln(\text{IMOEX}_t) - \ln(\text{IMOEX}_{t-1}) = \ln\left(\frac{\text{IMOEX}_t}{\text{IMOEX}_{t-1}}\right), \quad (1)$$

где,

$r_t$  – логарифмированный прирост индекса Московской биржи в момент времени  $t$ ;

$\text{IMOEX}_t$  – значение индекса Московской биржи в момент времени  $t$ ;

$\text{IMOEX}_{t-1}$  – значение индекса Московской биржи в момент времени предшествующий  $t$ .

Важно отметить, что высокочастотные и дневные данные лучше описывают логарифмические приросты, чем арифметические. Это связано с тем, что логарифмирование более оптимально сохраняет структуру приведения таких данных к нормальному распределению.

Первоначально семейство моделей GARCH было предложено Engle (1982) и Bollerslev (1986) [5]. Данная модель является одной из наиболее известных моделей для моделирования и прогнозирования процесса волатильности. GARCH модель предполагает, что на текущую изменчивость дисперсии влияют как предыдущие изменения показателей, так и предыдущие оценки дисперсии.

Стоит отметить, что модели семейства GARCH имеют множество модификаций для учета различных эффектов, которые может отражать процесс временных рядов.

Согласно большинству предыдущих исследований (Poon, Granger, 2003), предполагается, что спецификация GARCH порядка (1, 1) достаточна для учета большинства стохастических эффектов [7]. Спецификация GARCH ( $p, q$ ), где  $p$  – порядок GARCH-членов  $\sigma^2$ , а  $q$  – порядок ARCH-членов  $\varepsilon^2$ .

Для моделирования процесса GARCH ( $p, q$ ) необходимо определить процесс условной гетероскедастичности. Процесс с условной гетероскедастичностью можно представить следующим образом [5]:

$$\mu_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t, \quad (2)$$

где,

$\mu_t$  – процесс условной гетероскедастичности;

$\sigma_t$  – является случайной величиной, зависящей от прошлых значений  $\mu_t$ ,  $\sigma_t = f(\mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots, \mu_{t-n})$ ;

$\varepsilon_t$  – остатки модели или белый шум, которые в стандартном построении модели имеет нормальное распределение.

Зная процесс условной гетероскедастичности можно представить процесс GARCH ( $p, q$ ) в следующем виде [5]:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \mu_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3)$$

где,

$\sigma_t^2$  – условная волатильность в момент времени  $t$ ;

$\alpha_0$  – коэффициент задержки (лага) или базовая волатильность;

$\alpha_i$  – коэффициент модели (ARCH эффект);

$\beta_j$  – коэффициент модели (GARCH эффект);

$\mu_{t-i}^2$  – процесс условной гетероскедастичности в момент времени  $i$  предшествующий  $t$ ;

$\sigma_{t-j}^2$  – условная волатильность в момент времени  $j$  предшествующий  $t$ .

Во время анализа будет выбран наилучший порядок  $(q, p)$  модели GARCH. Также предполагается подбор оптимального распределения остатков модели. К среди наиболее распространенным способам задания распределения остатков относят: Normal, Gaussian, Studentst, Skewstudent, Generalized Error. В ходе моделирования будет определено оптимальное распределение остатков по критерию Акаике.

При моделировании процесса GARCH  $(p, q)$  необходимо соблюдать два ограничения:

Первое ограничение – стационарность стохастического процесса, поэтому сумма коэффициентов должна быть меньше 1.

Вторым ограничением является неотрицательность волатильности. Все коэффициенты модели должны быть положительными.

Важно отметить, что модели GARCH  $(p, q)$  получаются с использованием оценок максимального правдоподобия.

Дополнительно обозначим достоинства использования модели GARCH. В большинстве исследований по моделированию и прогнозированию волатильности применяются модели типа GARCH, которые используют данные низкочастотных транзакций. Sadorsky (2006) проводит эмпирический анализ прогнозирования волатильности и приходит к выводу, что модель GARCH хорошо подходит и обеспечивает большую точность прогнозирования, чем модель случайного блуждания.

Модель GARCH позволяет проводить диагностические тесты. Однако это накладывает некоторые обозначенные ограничения. Стоит отметить, что модель GARCH отражает асимметрию и эксцесс в финансовых данных. Важно заметить, что построение модели GARCH требует приведения данных к стационарному виду, это будет произведено с помощью расчета логарифмических приростов.

### 3.2 МОДЕЛЬ EGARCH( $p, q$ )

Экспоненциальная обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность (EGARCH) является еще одной формой модели GARCH. Модель EGARCH была предложена для преодоления недостатков в обработке GARCH финансовых временных рядов [5]. В частности, чтобы учесть асимметричные эффекты между положительной и отрицательной доходностью активов.

Далее представим вид модели в следующей формуле:

$$x_t = \mu + \alpha_t, \\ \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2), \quad (4)$$

где,

$x_t$  – значение временного ряда в момент времени  $t$ ;

$\mu$  – среднее значение модели GARCH;

$\alpha_t$  – остаток модели в момент времени  $t$ ;

$\sigma_t$  – условное стандартное отклонение (условная волатильность) в момент времени  $t$ ;

$p$  – порядок модели компонентов ARCH;

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  – это параметры модели, компонента ARCH;

$q$  – это порядок модели компонентов GARCH;

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  – это параметры модели, компонента GARCH;

$\varepsilon_t$  – стандартизированные остатки.

Операторы  $p$  и  $q$  в модели будут определены по критерию качества Акаике. Способ задания распределения остатков также будет выбран с помощью AIC.

Таким образом, экспоненциальный GARCH ( $p, q$ ) является расширением известного типа модели GARCH ( $p, q$ ). Особенность и предположения модели заключаются в том факте, что волатильность выше после негативной информации (или неблагоприятной доходности), которую получают участники рынка, а не из-за позитивной информации (или положительной доходности) (Black, 1976). Этот асимметричный признак называется эффектом леввереджа. Однако обычная модель GARCH ( $p, q$ ) не может учитывать асимметричную взаимосвязь

между волатильностью и доходностью. В результате предлагаемая модель должна учитывать эффект леввереджа на рынке.

### 3.3 МОДЕЛЬ FIGARCH( $p, d, q$ )

Описанные ранее модели оценки волатильности GARCH( $p, q$ ) и EGARCH( $p, q$ ) являются моделями с краткосрочной памятью, в семействе GARCH также имеется модель с долгосрочной памятью, основанной на фракталах – это FIGARCH.

Модель FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) является популярным выбором для моделирования волатильности данных временных рядов. Модель используется для учета долгосрочных зависимостей в данных и для учета влияния прошлой волатильности на текущую. Ключевое предположение модели FIGARCH заключается в том, что волатильность наблюдаемых данных изменяется с течением времени и связана с прошлыми значениями волатильности.

В своей самой базовой форме модель FIGARCH выражается как расширение модели GARCH, где текущая дисперсия ( $\sigma_t^2$ ) моделируется как функция прошлых квадратов ошибок ( $\varepsilon_{t-i}^2$ ) и прошлых значений дисперсии ( $\sigma_{t-j}^2$ ). Кроме того, модель включает в себя два новых параметра,  $\lambda_k$  и  $\delta_1$ , которые учитывают корреляцию между текущим членом ошибки и текущим значением дисперсии, а также корреляцию между текущим членом ошибки и предыдущим значением дисперсии, соответственно.

Как правило процесс FIGARCH( $p, d, q$ ) строится на лагах  $p$  и  $q$  равным единице, оператор дробного интегрирования  $d$  оценивается самой моделью.

Полное уравнение для модели FIGARCH(1,  $d$ , 1) может быть выражено следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta L - \phi L(1 - L)^d] \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (5)$$

где,

$L$  – оператор запаздывания,

$d$  - параметр дробной разности.

Модель оценивается с использованием представления ARCH( $\infty$ ):

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta)^{-1} \omega + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \epsilon_{t-i}^2. \quad (6)$$

Веса рассчитываются с использованием:

$$\delta_1 = d, \quad (7)$$

$$\lambda_1 = d - \beta + \phi. \quad (8)$$

Эта модель используется для оценки волатильности финансовых рядов, также стоит отметить, что модель FIGARCH позволяет не только оценивать уровень волатильности, но также учитывать долгосрочные изменения временного ряда.

### 3.4 МОДЕЛЬ APARCH( $p, q$ )

Модель APARCH (Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) – это тип модели временных рядов, которая используется для моделирования волатильности. APARCH может фиксировать как асимметричные, так и усиливающие (power) эффекты в данных.

Модель APARCH является вариацией модели ARCH (авторегрессионная условная гетероскедастичность), которая предполагает, что дисперсия члена ошибки в регрессионной модели не является постоянной, а изменяется с течением времени. В модели ARCH условная дисперсия является функцией запаздывающих квадратичных ошибок, в то время как в модели GARCH условная дисперсия является функцией как запаздывающих квадратичных ошибок, так и запаздывающих дисперсий.

Далее представим общий уравнения волатильности по модели APARCH( $p, q$ ):

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i I_{[0 \geq i]} \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^\delta. \quad (9)$$

Модель APARCH расширяет модель GARCH за счет включения дополнительного термина, который отражает асимметрию и эффекты рычага. Модель включает в себя член, который является функцией абсолютного значения предыдущего члена ошибки, и параметр мощности ( $\delta$ ), который позволяет изменять степень асимметрии с течением времени. Модель также включает параметр ( $\gamma$ ), который управляет степенью кредитного

плеча в модели. При наличии эффекта кредитного плеча дисперсия увеличивается больше при отрицательной доходности, чем при положительной.

Оптимальные лаги модели ( $p$  и  $q$ ) будут определены на основе информационных критериев AIC и BIC с перебором лагов от 0 до 2.

### 3.5 МОДЕЛЬ HAR-RV

Вторым семейством моделей для оценки волатильности акций является семейство гетерогенных авторегрессионных моделей (Heterogeneous Autoregressive Model – HAR). Другое название модели – HAR-RV, то есть гетерогенная авторегрессия реализованной волатильности, дело в том, что данная модель для расчета конечного показателя требует расчет реализованной волатильности (RV).

Andersen, Bollerslev (1998) впервые использовали высокочастотные данные, чтобы предложить новый метод измерения волатильности – реализованной волатильности (Realized Volatility - RV) [2]. С тех пор модели волатильности для приложений с высокочастотными данными быстро развивались с акцентом на прогнозирование финансовых рынков. Corsi (2009) предлагает гетерогенную авторегрессионную модель реализованной волатильности (HAR-RV) и обнаруживает, что с точки зрения эффективности прогнозирования модель HAR-RV заметно лучше, чем модель GARCH [4]. Corsi (2009) значительно расширил исследования по использованию моделей волатильности для прогнозирования финансовых рынков [4]. Кроме того, многие ученые разработали новые модели волатильности, основанные на модели HAR-RV (такие как модели HAR-RV-J, HAR-RV-CJ и HAR-RSV), для дальнейшего повышения эффективности прогнозирования.

Как было отмечено ранее для моделирования процесса HAR-RV требуется расчет показателя реализованной волатильности (RV). Методология реализованной волатильности была предложена Андерсеном. Реализованная волатильность может быть рассчитана с помощью следующей формулы [3]:

$$RV_t = \sum_{i=1}^{N-1} \ln^2 \left( \frac{S_{j+1}}{S_j} \right), \quad (10)$$

где,

$RV_t$  – реализованная волатильность в момент времени  $t$ ;

$N$  – периодов в день;

$S_j$  – наблюдаемая рыночная цена индекса Московской биржи в момент  $j$  в течение торгового дня  $t$ .

В рамках текущего исследования для расчета показателя будут использованы дневные данные по динамике значений котировок индекса Московской биржи.

Модель HAR-RV может быть описана как процесс авторегрессии запаздывающих реализованной волатильности, в виде следующего уравнения [4]:

$$RV_{t+h} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{t-n} RV_{t-n} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

где,

$RV_{t+h}$  – реализованная волатильность на будущий период времени  $h$ ;

$n$  – периоды времени (день, неделя, месяц);

$\alpha_0$  – базовое значение волатильности, константа модели;

$\alpha_{t-n}$  – коэффициент регрессии;

$\varepsilon_t$  – остатки модели или белый шум.

Количество периодов не ограничено и может быть продлено бесконечно. Тем не менее, обычно используются три периода: ежедневный, еженедельный и ежемесячный. Предполагается, что модели с определением квадратных корней или логарифмов обладают лучшей описательной способностью. В рамках исследования остановимся на базовом представлении моделирования модели HAR.

Для анализируемой модели структура данных аналогична предыдущим описаниям. Данные необходимо привести к стационарному виду путем нахождения темпов прироста с помощью логарифмирования.

Таким образом, модель HAR или HAR-RV была впервые предложена Corsi (2009) [4]. Мотивация, лежащая в основе этой модели, заключается в предоставлении методологии для учета эффектов памяти от реализованной волатильности. В рамках

текущей работы данная модель представлена как аналог для сравнения с моделью GARCH и определения класса моделей, обладающей большей описательной силой волатильности акций для рынка России.

#### **4 Данные**

Индекс Московской биржи (IMOEX).

Показателем для оценки волатильности фондового рынка РФ является индекс Московской биржи (IMOEX) или индекс ММВБ.

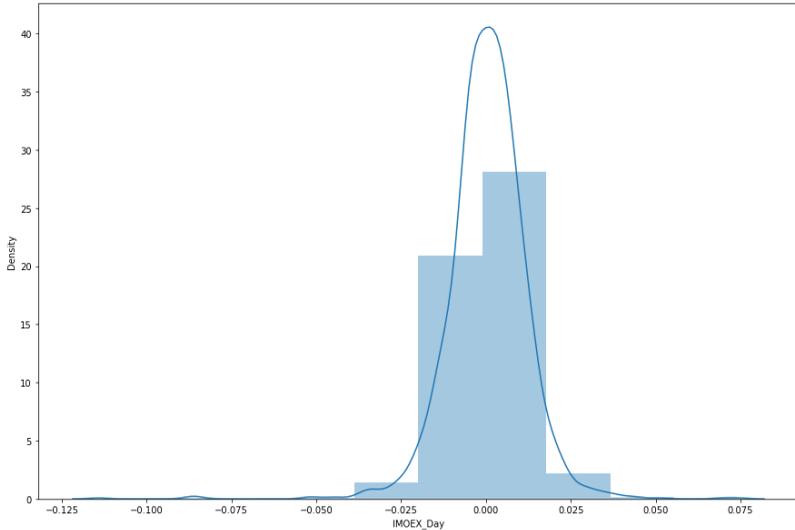
Индекс МосБиржи – ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс российского фондового рынка, включающий наиболее ликвидные акции крупнейших и динамично развивающихся российских эмитентов, виды экономической деятельности которых относятся к основным секторам экономики.

Данные по индексу Московской биржи собраны для построения моделей GARCH, EGARCH, FIGARCH, APARCH и HAR-RV с 1-дневной частотой.

Период сбора данных: с 1 января 2014 года по 31 декабря 2022 года.

#### **5 Результаты исследования**

Проведем анализ динамики значений индекса ММВБ. На рисунке 1 отразим распределение лог-доходности значений индекса ММВБ на дневных данных.



**Рис. 1.** Распределение лог-доходностей индекса MOEX  
(дневные данные)

Исходя из анализа рисунка 1 стоит отметить, что распределение лог-доходности ММВБ приближено к нормальному. Стоит обратить внимание на то, что левый хвост распределения вытянут, то есть имеются очень сильные отрицательные доходности индекса.

Первой оцененной моделью является модель семейства GARCH. Множество исследований показывают негативный вклад увеличения количества лагов в качество прогноза GARCH моделей. Поэтому обычно используются спецификации с  $p \leq 2$  и  $q \leq 2$ . Следует отметить, что GARCH(1, 1) модель является наиболее популярной и часто используемой среди остальных. Однако, в ходе построения оптимальными лагами ARCH и GARCH эффектов является – 2, то есть будет оценена модель GARCH(2, 2). Распределение остатков – Skewstudent.

В таблице 1 представим сводную оценку построения модели GARCH(2, 2).

Таблица 1. Результаты построения модели GARCH(2, 2)

Dep. Variable:	IMOEX		R-squared:	0.000	
Mean Model:	Zero Mean		Adj. R-squared:	0.000	
Vol Model:	GARCH		Log-Likelihood:	6406.33	
Distribution:	Standardized Skew Student's t		AIC:	-12798.7	
Method:	Maximum Likelihood		BIC:	-12759.4	
			No. Observations:	2014	
			Df Residuals:	2014	
			Df Model:	0	
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	1.3985e-05	4.076e-08	343.075	0.000	[1.390e-05, 1.406e-05]
alpha[1]	0.0945	3.173e-02	2.979	2.888e-03	[3.235e-02, 0.157]
alpha[2]	0.0945	3.036e-02	3.115	1.842e-03	[3.505e-02, 0.154]
beta[1]	0.3184	0.255	1.251	0.211	[-0.180, 0.817]
beta[2]	0.3907	0.237	1.646	9.984e-02	[-7.463e-02, 0.856]
Distribution					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
eta	6.3763	1.033	6.170	6.823e-10	[ 4.351, 8.402]
lambda	-0.0873	3.714e-02	-2.349	1.880e-02	[-0.160, -1.447e-02]

По результатам построения модели оценки волатильности на данных индекса ММВБ стоит отметить, что все коэффициенты (омега, альфа и бета) модели GARCH(2, 2) являются значимыми на уровне доверия 1% по критерию P-value за исключение параметра бета на 1-м лаге, поэтому модель оказалась лучше и использованием 2-х лагов. Константа модели имеет значение около нуля, показатель бета является наибольшим и составляет 0,39 на втором лаге. Бета является коэффициентом GARCH и отвечает за влияние волатильности прошлых периодов на текущую условную дисперсию. То есть при увеличении волатильности в прошлом, текущий уровень будет увеличиваться при прочих равных условиях. Судить о

качестве модели в рамках текущего раздела принято по информационному критерию Акаике. В данной модели данный показатель равен -12798,7.

Второй моделью для оценки волатильности является EGARCH. Аналогичным образом, был произведен подбор операторов  $p$  и  $q$ , а также тип распределения остатков путем сравнения по информационному критерию Акаике. Таким образом, наилучшей моделью EGARCH( $p, q$ ) для данных по ММББ является EGARCH(1, 1) с распределением остатков – Skewstudent.

Результат моделирования EGARCH(1, 1) представим в таблице 2.

*Таблица 2. Результаты построения модели EGARCH(1, 1)*

Dep. Variable:	IMOEX		R-squared:	0.000	
Mean Model:	Zero Mean		Adj. R-squared:	0.000	
Vol Model:	EGARCH		Log-Likelihood:	6418.00	
Distribution:	Standardized Skew Student's t		AIC:	-12824.0	
Method:	Maximum Likelihood		BIC:	-12790.3	
			No. Observations:	2014	
			Df Residuals:	2014	
			Df Model:	0	
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	- 0.2367	6.369e- 02	-3.717	2.018e-04	[-0.362, -0.112]
alpha[1]	0.1382	2.241e- 02	6.165	7.046e-10	[9.424e-02, 0.182]
gamma[1]	- 0.0625	1.380e- 02	-4.533	5.825e-06	[-8.958e-02, -3.550e- 02]
beta[1]	0.9733	7.019e- 03	138.672	0.000	[ 0.960, 0.987]
Distribution					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
eta	7.3574	1.385	5.311	1.093e-07	[ 4.642, 10.073]
lambda	- 0.1042	3.684e- 02	-2.829	4.671e-03	[-0.176, -3.201e-02]

Наблюдается, что все оценки параметров модели EGARCH(1,1) являются значимыми на уровне доверия 1%. Оценки параметра при распределении Skewstudent также являются значимыми на доверительном уровне 1%. Также стоит отметить, что полученные оценки эффекта GARCH являются положительными, то есть волатильность индекса ММВБ прошлого периода положительно влияние на текущую. Информационный критерий Акаике равен -12824,0, что ниже, чем в случае построения модели GARCH(2,2), следовательно в EGARCH(1,1) теряется меньше информации при моделировании.

Следующей моделью для оценки волатильности фондового рынка РФ является модель FIGARCH. Было определено, что модель обладает наибольшей информационной значимостью с лагом 1, в данном случае по критерию Акаике потеря информации минимально. Распределение остатков в случае моделировании FIGARCH(1,1) также Skewstudent. Представим в таблице 3 результат модели FIGARCH(1, d, 1).

Таблица 3. Результаты построения модели FIGARCH(1, d, 1)

Dep. Variable:	IMOEX		R-squared:	0.000	
Mean Model:	Zero Mean		Adj. R-squared:	0.000	
Vol Model:	FIGARCH		Log-Likelihood:	6405.16	
Distribution:	Standardized Skew Student's t		AIC:	-12798.3	
Method:	Maximum Likelihood		BIC:	-12764.7	
			No. Observations:	2014	
			Df Residuals:	2014	
			Df Model:	0	
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	2.4134e-05	2.135e-05	1.130	0.258	[-1.772e-05, 6.599e-05]
phi	0.0720	0.201	0.358	0.720	[-0.322, 0.466]
d	0.2800	0.102	2.756	5.855e-03	[8.086e-02, 0.479]
beta	0.2260	0.288	0.785	0.433	[-0.338, 0.790]
Distribution					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.

eta	5.7100	2.178	2.621	8.756e-03	[ 1.441, 9.979]
lambda	-0.1000	3.951e-02	-2.530	1.140e-02	[ -0.177,-2.253e-02]

По итогу анализа таблицы 3 наблюдается, что константа и GARCH-эффект модели являются незначимыми на уровне доверия 1%. Дополнительный параметр  $d$  в модификации FIGARCH, который находится в пределах от 0 до 1, оценивается значением 0,28 и является значимым на уровне доверия 1%. Можно утверждать, что замена взятия первых разностей на взятие дробных разностей через оператор  $d$  является целесообразным решением при подобного рода оценке. Информационный критерий Акаике равен -12798,3. Данный уровень выше, чем при построении EGARCH(1, 1), следовательно модель FIGARCH(1,  $d$ , 1) теряет больше информации при производимых в рамках нее расчетах.

Далее перейдем к оценке четвертой модели – APARCH( $p, q$ ). Подбор лагов аналогично предыдущим моделям производился по информационному критерию Акаике, в данном случае наилучшей спецификацией оказалась модель с одним лагом APARCH(1, 1). Также стоит отметить, что распределение остатков в случае данной модели является – Student's t. В таблице 4 отобразим результат оценки модели APARCH(1, 1).

*Таблица 4. Результаты построения модели APARCH(1, 1)*

Dep. Variable:	IMOEX		R-squared:	0.000	
Mean Model:	Zero Mean		Adj. R-squared:	0.000	
Vol Model:	APARCH		Log-Likelihood:	5690.46	
Distribution:	Standardized Student's t		AIC:	-11370.9	
Method:	Maximum Likelihood		BIC:	-11342.9	
			No. Observations:	2014	
			Df Residuals:	2014	
			Df Model:	0	
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	6.5861e-05	6.727e-07	97.899	0.000	[6.454e-05,6.718e-05]

alpha[1]	0.1500	2.644e-02	5.674	1.393e-08	[9.819e-02, 0.202]
gamma[1]	0.0000	7.651e-02	0.000	1.000	[-0.150, 0.150]
delta	1.8000	1.842e-02	97.744	0.000	[1.764, 1.836]
Distribution					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	4.3708	8.043e-02	54.345	0.000	[4.213, 4.528]

По результатам построения модели APARCH(1, 1) стоит отметить, что все параметры модели являются значимыми на уровне доверия 1%. В модели есть эффект асимметрии, его оценка является положительной. Оценка параметра при распределении Стьюдента также является значимой. Информационный критерий Акаике находится на уровне -11370,9, что больше, чем во всех прошлых моделях.

Далее проведем оценку волатильности фондового рынка России с помощью построения модели HAR-RV. Данная модель построена на дневных данных. Специфика модели заключается в расчёте показателя реализованной волатильности и отборе трех лагов. В рамках текущего исследования выбраны стандартные для данной модели лаги (1, 5 и 22), соответствующие одному дню, пятью торговым дням в неделе и 22-м торговым дням в месяце. Остатки модели определены распределением GED – Generalized Error Distribution. Результаты построения модели HAR-RV отразим в таблице 5.

*Таблица 5. Результаты построения модели HAR-RV*

Dep. Variable:	IMOEX	R-squared:	0.002
Mean Model:	HAR	Adj. R-squared:	0.001
Vol Model:	Constant Variance	Log-Likelihood:	6160.18
Distribution:	Generalized Error Distribution	AIC:	-12308.4
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	-12274.8
		No. Observations:	1992
		Df Residuals:	1988

		Df Model:		4	
Mean Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
Const	7.1192e-04	2.777e-04	2.564	1.036e-02	[1.677e-04, 1.256e-03]
IMOEX[0:1]	-8.9782e-03	3.266e-02	-0.275	0.783	[-7.299e-02, 5.504e-02]
IMOEX[0:5]	0.1077	7.559e-02	1.425	0.154	[-4.047e-02, 0.256]
IMOEX[0:22]	-0.2046	0.166	-1.236	0.217	[-0.529, 0.120]
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
sigma2	1.3572e-04	8.281e-06	16.390	2.270e-60	[1.195e-04, 1.520e-04]
Distribution					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	1.4999	0.150	9.991	1.663e-23	[ 1.206, 1.794]

Анализ полученных данных в таблице 5 отражает, что метрика качества – коэффициент детерминации ( $R^2$ ) модели HAR-RV увеличилась по сравнению с остальными моделями оценки волатильности. Однако, данный показатель не превышает 1% в обоих случаях. Коэффициенты модели не являются значимыми на максимально допустимом уровне доверия. Константа имеет значение около нуля. Информационный критерий Акаике модели равен -12308,4. Был получен эмпирически важный вывод о моделировании волатильности фондового рынка РФ с наибольшей описательной силой. Наибольшим качеством по критерию Акаике (AIC) обладает модели EGARCH(1,1) с распределением остатков по Skewstudent. EGARCH(1,1) в большей степени описывает условную волатильность ММВБ на основе прошлых данных среди представленных моделей. Также стоит отметить, что в модели APARCH(1,1) потеря информации по критерию Акаике выше, чем в остальных оцениваемых моделях.

Представим график, на котором сопоставлены значения условного стандартного отклонения (conditional volatility) ММВБ оцененные с помощью модели EGARCH(1,1) и динамика ММВБ (рисунок 2).

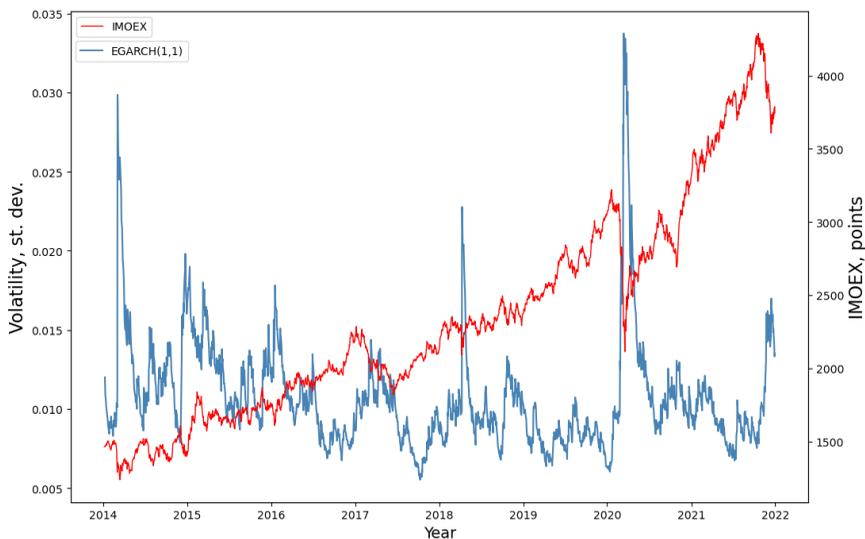


Рис. 2. График динамики волатильности ММВБ оценённый по модели EGARCH(1, 1) (левая шкала) и исходных значений индекса (правая шкала)

Можно резюмировать, что модель EGARCH(1,1) с распределением Skewstudent является наилучшей по информационным критериям среди оцениваемых моделей волатильности.

## 6 Заключение и обсуждение

Таким образом, за волатильность ММВБ в рамках работы принято считать оценки условной волатильности с помощью моделей GARCH(2,2), EGARCH(1,1), FIGARCH(1,d,1), APARCH(1,1) и HAR-RV на данных дневных лог-доходностей индекса Московской биржи. По информационному критерию Акаике наилучшей моделью оценки волатильности ММВБ оказался метод EGARCH(1,1) с распределением остатков Skewstudent. Коэффициенты в данной модели, такие как  $\omega$ ,  $\alpha[1]$ ,  $\gamma[1]$ , и  $\beta[1]$ , оказались значимыми, что подчеркивает важность учета асимметрии и эффекта леввереджа

волатильности в финансовых временных рядах. Распределение Skewstudent было выбрано для моделирования волатильности, что позволяет учесть тяжелые хвосты и асимметрию в распределении волатильности.

В заключение настоящее исследование предоставляет важные выводы о моделировании волатильности финансовых рынков и может быть полезным для финансовых аналитиков, инвесторов и ученых, занимающихся анализом финансовых данных и риск-менеджментом.

В качестве расширения и дополнения материала текущего исследования стоит отметить, что в части эконометрического моделирования возможен переход к моделям машинного обучения и нейронным сетям.

## Литература

1. Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp.987-1007.
2. Andersen, T.G. and Bollerslev, T., 1998. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International economic review*, pp.885-905.
3. Corsi, F., 2009. A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), pp.174-196.
4. Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp.987-1007.
5. Taylor, S.J., 1994. Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical finance*, 4(2), pp.183-204.
6. Mandelbrot, B.B. and Mandelbrot, B.B., 1997. The variation of certain speculative prices (pp. 371-418). Springer New York.
7. Andersen, T.G., Bollerslev, T. and Diebold, F.X., 2007. Roughing it up: Including jump components in the measurement,

modeling, and forecasting of return volatility. The review of economics and statistics, 89(4), pp.701-720.

8. Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 31(3), pp.307-327.

9. Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. and Labys, P., 2003. Modeling and forecasting realized volatility. Econometrica, 71(2), pp.579-625.

## References

1. Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica: Journal of the econometric society, pp.987-1007.

2. Andersen, T.G. and Bollerslev, T., 1998. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. International economic review, pp.885-905.

3. Corsi, F., 2009. A simple approximate long-memory model of realized volatility. Journal of Financial Econometrics, 7(2), pp.174-196.

4. Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica: Journal of the econometric society, pp.987-1007.

5. Taylor, S.J., 1994. Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. Mathematical finance, 4(2), pp.183-204.

6. Mandelbrot, B.B. and Mandelbrot, B.B., 1997. The variation of certain speculative prices (pp. 371-418). Springer New York.

7. Andersen, T.G., Bollerslev, T. and Diebold, F.X., 2007. Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility. The review of economics and statistics, 89(4), pp.701-720.

8. Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 31(3), pp.307-327.

9. Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. and Labys, P., 2003. Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2), pp.579-625.

## **COMPARATIVE ANALYSIS OF ARCH/GARCH AND HAR MODELS AS TOOLS FOR MODELING STOCK MARKET VOLATILITY**

### **Patlasov Dmitry Alexandrovich**

Postgraduate student of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Russia, 614068, Perm, Bukireva str., 15, dmitriypatlasov@gmail.com

*Annotation. This study is devoted to the study of various models for estimating the conditional standard deviation, capable of modeling the historical volatility of financial instruments. For this purpose, the following tasks are set in the study: to investigate the theoretical foundations of stock market volatility; to determine the best way to assess IMOEX volatility using autoregressive models. As part of the current study, data on the Moscow Exchange Index (IMOEX) were used. Thus, based on the results of the study, a conclusion is formulated about the best model for assessing the volatility of IMOEX. The results of the study will allow investors, analysts, and other financial market participants to more accurately model historical volatility, which contributes to improving the quality of decision-making by exchange trading participants.*

**Keywords:** stock market volatility, GARCH, EGARCH, FIGARCH, HAR-RV, APARCH.

УДК: 004.942

ББК: 30Б6