УДК 519.7
ББК Ж 50

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ[1]

Фуртат И.Б.[2],
(*Астраханский государственный технический университет, Астрахань, Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва*)
Цыкунов А.М.[3]
(Астраханский государственный технический университет, Астрахань)

Рассматривается задача робастного управления линейными нестационарными объектами по выходу в условиях действия внешних и внутренних неконтролируемых возмущений и отсутствии информации об относительной степени самого объекта, которая в процессе функционирования системы может меняться. Задача решена на базе робастного алгоритма, позволяющего компенсировать данные неопределенности с заданной точностью и за конечное время. Приводятся результаты компьютерного моделирования.

---

[1] *Исследование проводится в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г.*

[2] *Игорь Борисович Фуртат, кандидат технических наук (cainenash@mail.ru).*

[3] *Александр Михайлович Цыкунов, доктор технических наук, профессор (tsykunov_al@mail.ru).*

Ключевые слова: робастное управление, структурно неопределенный объект, вспомогательный контур, наблюдатель, компенсация возмущений.

1. Введение

Проблема адаптивного и робастного управления по выходу в условиях внешних и внутренних неопределенностей, а также предположении о точном знании относительной степени объекта, одна из основных в современной теории управления. К наиболее распространенным методам адаптивного управления можно отнести: метод расширенной ошибки [6, 16], алгоритмы адаптации высокого порядка [6, 14, 17] и итеративные процедуры синтеза [6]. Наиболее распространенные методы робастного управления основаны на использовании регуляторов, обеспечивающих определенный запас устойчивости замкнутой системы [11], различные виды наблюдателей [1-3, 6, 8-10, 12, 13, 18] и т.д. Одним из эффективных способов управления неопределенными объектами является компенсация возмущений.

Проблеме компенсации неконтролируемых возмущений посвящен ряд работ [1, 2, 5, 8-10, 12, 18], в которых рассмотрены различные схемы построения систем управления. Так в [18] используется наблюдатель вектора состояния проблемно ориентируемой модели объекта управления. Задача компенсации постоянного внешнего возмущения в ней решена с использованием процедуры обратного обхода интегратора [18]. В [1, 2, 9, 10] используется метод внутренней модели. Предложен синтез наблюдателей внешних детерминированных возмущений, что позволяет в системе управления компенсировать неконтролируемые воздействия. В [5] для решения поставленной задачи в модель объекта управления вводится новый сигнал управления, преобразующий объект к уравнению первого порядка с известным коэффициентом усиления. Возмущениями здесь являются неизвестные параметры объекта и внешние сигналы. С помощью наблюдателя производится оценка этих возмущений и их производных. Затем, на базе оценочных функций, формируется закон управления. Работа [11] посвящена созданию теории робастной устойчивости систем в зависимости от вида возмущений. На базе предложенных результатов разрабатываются робастные системы управления неопределенными объектами на основе регуляторов низких порядков. В [4] компенсация параметрических и внешних (сигнальных) возмущений, названных неэкстенсивными, основана на принципе инвариантности систем по выходу, или ошибке, к данным воздействиям на базе метода вложения систем. Данный подход разработан для линейных объектов на основе теории матриц и касается получения класса регуляторов, обеспечивающих нечувствительность к неэкстенсивным возмущениям исходя из понятий: делители нуля (ядра) и делители единицы матрицы, эквивалентные преобразования матриц, методы канонизации, решение матричных уравнений и т.п. Наиболее близкой к предлагаемой работе по принципу построения, является [12], где для компенсации неизвестного параметрического и внешнего возмущения предлагается использовать вспомогательный контур.

Все вышеперечисленные задачи решены при условии о точном знании относительной степени объекта управления и его порядке характеристического полинома. Однако, на практике это зачастую трудоемкая, а иногда и невозможная задача. Работ по адаптивному и робастному управлению при отсутствии информации об относительной степени объекта мало [15, 19], по сравнению со всем классом задач этого направления. При этом полученные системы управления имеют сложную реализацию из-за высокого динамического порядка замкнутой системы. Так в [15] задача управления, при отсутствие информации об относительной постоянной степени и порядке характеристического многочлена, решена с помощью особой параметризации уравнения объекта управления. Для получения передаточной функции замкнутой системы, как у эталонной модели, закон управления формировался в виде суммы классической схемы адаптивного управления [6] и некоторой передаточной функции, входным сигналом которой является задающее воздействие. Дальнейший синтез системы управления осуществлялся с применением особой схемы расширения с нормированными алгоритмами адаптации. В работе [19] проблема управления объектами с неизвестной относительной степенью решена с использованием специального регулятора, коэффициенты передаточной функции которого являются произведением постоянных коэффициентов и настраиваемых функций. Формирования постоянных коэффициентов регулятора основано на определенной разности членов из последовательности Фибоначчи, а функции должны быть монотонно возрастающими с достаточно большим верхним пределом.

Стоит отметить, что в статьях [15, 19], при разработке систем управления, порядки числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления предполагались неизвестными и постоянными. Но, как отмечено в [4], в реальных ситуациях существуют возмущения, способные влиять не только на параметры объекта управления, но и на его динамический порядок. К таким возмущениям, как правило, относятся параметрические нестационарные неопределенности объекта. Именно в условиях действия таких возмущений решается задача управления в данной работе.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе сформулированы постановка задачи и предположения, касающиеся объекта управления и ограничений на построение замкнутой системы. Рассматриваются линейные объекты, у которых порядок характеристического многочлена и относительная степень может изменяться в процессе функционирования. Ставится цель управления – слежение выхода объекта управления за эталонным сигналом с точностью δ за конечное время T. В третьем разделе предлагается алгоритм робастного управления такими объектами. Четвертый раздел посвящен обобщению предложенного подхода на линейные нестационарные объекты с запаздыванием по состоянию. В пятом разделе рассмотрены примеры численного моделирования предложенной системы управления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарный линейный объект управления, динамика которого задана дифференциальным уравнением в операторной форме

(1) $$Q(p,t)y(t) = R(p,t)u(t) + f(t), \quad p^i y(0) = y_i, \\ i = 0, \dots, n-1.$$

где $y(t) \in R$, $u(t) \in R$, $u(t) \in R$ – регулирующее, управляющее и возмущающее воздействия соответственно, $Q(p, t) = q_n(t)p^n + q_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + q_0(t)$, $R(p, t) = r_m(t)p^m + r_{m-1}(t)p^{m-1} + \dots + r_0(t)$ – линейные нестационарные дифференциальные операторы, $p = d / dt$ – оператор дифференцирования, y_i – неизвестные начальные условия.

Качество переходных процессов определим эталонной моделью, заданной уравнением

(2) $$Q_0(p)y_m(t) = k_m r(t).$$

Здесь $y_m(t) \in R$ – выход эталонной модели, $r(t) \in R$ – задающее воздействие, $k_m > 0$. $Q_0(p)$ – известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Целью управления является синтез замкнутой системы, обеспечивающей выполнение целевого условия

(3) $$|e(t)| = |y(t) - y_m(t)| < \delta,$$

начиная с некоторого момента времени T, и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе, где $\delta > 0$ – достаточно малое число.

Предположения А.

1. Полиномы $Q(p, t)$, $R(p, t)$ их порядки $\deg Q(p, t) \le n$, $\deg R(p, t) \le m$ и относительная степень $\gamma = n - m \ge 1$ – неизвестны. Известно: a) множество Ξ возможных значений коэффициентов полиномов $Q(p, t)$ и $R(p, t)$; b) неизвестные коэффициенты операторов $Q(p, t)$ и $R(p, t)$ – ограниченные функции; c) $\gamma_u \ge \gamma$ – верхняя граница относительной степени γ; d) коэффициенты при старших степенях операторов $Q(p, t)$ и $R(p, t)$ – неотрицательные функции.

2. $\deg Q_0(p) = \gamma_u$.

3. Оператор $R(p, t)$ – устойчив и для любого фиксированного момента времени t полином $R(p, t)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная в преобразовании Лапласа. Полином $Q_0(\lambda)$ – гурвицев.

4. Задающее $r(t)$ и возмущающее $f(t)$ воздействия – ограниченные функции.

5. В системе управления не доступны измерению производные сигналов $y(t)$, $u(t)$ и $r(t)$.

Условия предположения А.1 указывают на то, что порядки $Q(p, t)$, $R(p, t)$ неизвестны и могут меняться, когда коэффициенты при старших степенях принимают значения равные нулю. Предположение А.1.d необходимо для того, чтобы при разработке замкнутой системы управления не учитывать неопределенности знака в обратной связи по управлению. Рассмотрим примеры вышесказанного. Если в (1) $q_n(t) = 0$ и $q_{n-1}(t) \neq 0$, то $\deg Q(p, t) = n - 1$ и $q_{n-1}(t) > 1$, $r_m(t) > 0$; если $q_n(t) = q_{n-1}(t) = 0$ и $q_{n-2}(t) \neq 0$, то $\deg Q(p, t) = n - 2$, $q_{n-2}(t) > 0$, $r_m(t) > 0$ и т.д. Аналогично и для оператора $R(p, t)$: если $r_m(t) = 0$ и $r_{m-1}(t) \neq 0$, то $\deg R(p, t) = m - 1$ и $q_n(t) > 0$, $r_{m-1}(t) > 0$; если $r_m(t) = r_{m-1}(t) = 0$ и $r_{m-2}(t) \neq 0$, то $\deg R(p, t) = m - 2$, $q_n(t) > 0$, $r_{m-2}(t) > 0$ и т.д. А также возможно одновременное изменение порядков операторов $Q(p, t)$ и $R(p, t)$.

Остальные условия предположений соответствуют классическим постановкам задач в теории управления [1-19, 21, 22] и связаны с технической реализуемостью замкнутой системы управления.

3. Метод решения

Из предположения А.1 следует, что динамический порядок объекта управления (1) неизвестен и подвержен изменению за счет действия на него нестационарных параметрических и внешних возмущений, поэтому параметризации [1-14, 16-18], разработанные для объектов с известными и постоянными порядками, здесь применять нельзя. Для получения уравнения, удобного для дальнейшего синтеза замкнутой системы управления, разложим операторы объекта (1) на составляющие:

(4) $\quad R(p,t) = R_m(p) + \Delta R(p,t)\,,\; Q(p,t) = Q_m(p) + \Delta Q(p,t)\,.$

Здесь $R_m(p)$ и $Q_m(p)$ – произвольные операторы порядков $\bar{n} - \gamma_u$ и $\bar{n}$ соответственно и в преобразовании Лапласа они гурвицевы, $\bar{n} \geq n$ – верхняя граница n, $\Delta R(p, t)$ и $\Delta Q(p, t)$ – остатки разложения. Относительно первого выражения в (4) можно сказать, что всегда существует такой вектор $c_{01}(t) \in R^{\bar{n}-1}$, составленный из коэффициентов оператора $R(p, t) - R_m(p)$, что выполнено первое разложение (4), где $\Delta R(p, t) = c_{01}^{\mathrm{T}}(t)\left[1, p, \ldots, p^{\bar{n}-2}\right]^{\mathrm{T}}$. Если $m < \bar{n} - \gamma_u$, то $\deg \Delta R(p, t) = \bar{n} - \gamma_u$; если $m = \bar{n} - \gamma_u$, то $\deg \Delta R(p, t) \leq \bar{n} - \gamma_u$; если $m > \bar{n} - \gamma_u$, то $\deg \Delta R(p, t) = m$. Порядок $\Delta Q(p, t)$ равен $\bar{n}$.

Поскольку $R_m(p)$ и $Q_m(p)$ – произвольные операторы, то положим $Q_m(p) / R_m(p) = Q_0(p)$. Тогда, с учетом разложения (4), реобразуем уравнение (1) к виду

$$y(t) = \frac{1}{Q_0(p)}\left(u(t) + \frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta R(p,t)u(t)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta Q(p,t)y(t)\right] + \frac{1}{R_m(p)} f(t)\right).$$

Видно, что применение разложение (4) позволило получить новое представление объекта управления с постоянной, известной передаточной функцией $1 / Q_0(p)$, как у эталонной модели (2), в условиях отсутствия информации о динамическом порядке (1) и неконтролируемых возмущениях, действующих на объект.

Составим уравнение ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$, принимая во внимание последнее уравнение и эталонную модель (2):

(5) $\quad e(t) = \dfrac{1}{Q_0(p)}\big(u(t) + \varphi(t)\big),$

где $$\varphi(t)=\frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta R(p,t)u(t)\right]-\frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta Q(p,t)y(t)\right]+$$

$+\dfrac{1}{R_m(p)}f(t)-k_m r(t)$ – функция, содержащая в себе параметрические, функциональные и структурные возмущения.

Введем закон управления

(6) $$u(t)=\alpha T(p)v(t),$$

$\alpha > 0$; $T(p)$ – линейный дифференциальный оператор степени γ_u, такой, что в преобразовании Лапласа $T(\lambda)$ – гурвицев; $v(t)$ – вспомогательное управляющее воздействие. Тогда, уравнение ошибки слежения (5) преобразуется к виду

(7) $$e(t)=\frac{T(p)}{Q_0(p)}\left(\alpha v(t)+T^{-1}(p)\varphi(t)\right).$$

Рассмотрим вспомогательный контур

(8) $$\bar{e}(t)=\beta\frac{T(p)}{Q_0(p)}v(t).$$

Здесь $\beta > 0$. С учетом (7) и (8), составим уравнение рассогласования $\zeta(t)=e(t)-\bar{e}(t)$

(9) $$\zeta(t)=\frac{T(p)}{Q_0(p)}\varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t)+T^{-1}(p)\varphi(t)$.

Зададим закон вспомогательного управляющего воздействия $v(t)$ в виде

(10) $$v(t)=-\frac{1}{\beta}\frac{Q_0(p)}{T(p)}\zeta(t)=-\beta^{-1}\varphi_1(t).$$

Разрешив уравнение $v(t)=-\beta^{-1}\varphi_1(t)$ относительно переменной $v(t)$, получим $v(t)=-\alpha^{-1}T^{-1}(p)\varphi(t)$ Легко видеть, что, подставив последний результат в (7), имеем уравнение замкнутой системы по ошибке слежения: $Q_0(p)e(t) = 0$. Отсюда следует, что $p^i e(t) = 0$, $i = 0, \ldots, \gamma_u$ – ограниченные функции. Однако для работоспособности системы управления необходимо показать, что и остальные сигналы в ней ограниченны. Для этого рассмотрим функциию $\varphi_1(t)$:

$$\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t) + \frac{1}{T(p)}\left(\frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta R(p,t)u(t)\right] - \right.$$
(11)
$$\left. - \frac{1}{R_m(p)}\left[\Delta Q(p,t)y(t)\right] + \frac{1}{R_m(p)} f(t) - k_m r(t)\right).$$

В силу предположений А.3 и А.4, гурвицевости полинома $T(\lambda)$, ограниченности функций $e(t)$ и $y_m(t)$, следует ограниченность функций $\frac{1}{R_m(p)T(p)} f(t)$, $\frac{k_m}{T(p)} r(t)$ и $\frac{1}{R_m(p)T(p)}\left[\Delta Q(p,t)y(t)\right]$. Учитывая второе равенство в (10), разрешим уравнение (11) относительно $v(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{\alpha T(p)}\left(\frac{\Delta Q(p,t)}{R(p,t)} y(t) - \frac{1}{R(p,t)} f(t) + R_m(p)\left[\frac{k_m}{R(p,t)} r(t)\right]\right).$$

Тогда, с учетом вышесказанного и устойчивости полинома $R(p, t)$ (предположение А.3), следует ограниченность сигналов $v(t)$ и $u(t)$, а вместе с ними и функции $\varphi_1(t)$.

Однако, из постановки задачи (предположение А.5), закон управления (6) реализовать невозможно. Поэтому, сформируем сигнал $u(t)$ как

(12) $\quad u(t) = \alpha T(p)\bar{v}(t)$.

Здесь $\bar{v}(t)$ – оценка сигнала $v(t)$, формирование которой будет описано ниже. Перепишем уравнение ошибки слежения (7), с учетом (10) и (12):

(13) $\quad Q_0(p)e(t) = \alpha T(p)\overline{\Delta}(t)$,

где $\overline{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$.

Для реализации закона управления (12) необходимо измерение γ_u-оценок производных функции $\bar{v}(t)$. Воспользуемся схемой, предложенной в [13]:

(14) $\quad \dot{\xi}(t) = G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L\xi(t)$.

В уравнениях (14): $\xi(t) \in R^{\gamma_u}$, $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma_u - 1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_{\gamma_u - 1} \in R^{(\gamma_u - 1)\times(\gamma_u - 1)}$ – единичная матрица, $D_0 = -\left[\dfrac{d_1}{\mu}, \dfrac{d_2}{\mu^2}, \ldots, \dfrac{d_{\gamma_u}}{\mu^{\gamma_u}}\right]^{\mathrm{T}}$, причем $d_1, d_2, \ldots, d_{\gamma_u}$ выбираются из условия гурвицевости матрицы $G = G_0 - DL$, где $D = \left[d_1, d_2, \ldots, d_{\gamma_u}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mu > 0$ – достаточно малая величина, $L = [1, 0, \ldots, 0]$. Здесь и далее матрица L имеет размерность, соответствующую размерности рассматриваемой в тексте системе дифференциальных уравнений. Например, в (14) $L \in R^{1\times\gamma_u}$ Тогда, закон управления (12) содержит переменные с наблюдателя (14), а значит, при условиях предположения А.5, уравнение (12) технически реализуемо.

Введем в рассмотрение вектор отклонений $\bar{\eta}(t) = \Gamma^{-1}(\xi(t) - \theta(t))$, где $\Gamma = diag\left\{\mu^{\gamma_u - 1}, \mu^{\gamma_u - 2}, \ldots, \mu, 1\right\}$, $\theta(t) = \left[v(t), \dot{v}(t), \ldots, v^{(\gamma_u)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$. Продифференцировав $\bar{\eta}(t)$ по времени с учетом уравнения (14), получим

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \mu^{-1} G \bar{\eta}(t) + \bar{b} v^{(\gamma_u + 1)}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u - 1} L \bar{\eta}(t),$$

где $\bar{b} = \left[\mu^{1-\gamma_u}, 0, \ldots, 0\right]^{\mathrm{T}}$. Преобразуем предпоследнее уравнение в эквивалентное относительно выхода $\bar{\Delta}(t)$

(15) $$\dot{\eta}(t) = \mu^{-1} G \eta(t) + b\dot{v}(t), \; \bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u - 1} L \eta(t).$$

Здесь $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t) - \mu^{1+i-\gamma_u} v^{(i-1)}(t)$, $i = 2, \ldots, \gamma_u$, $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$, $b = [1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}$. Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$ в виду того, что являются различными векторно-матричными формами записи одного уравнения

$$\left(p^{\gamma_u} + \frac{d_1}{\mu} p^{\gamma_u - 1} + \ldots + \frac{d_{\gamma_u}}{\mu^{\gamma_u}}\right)\bar{\eta}_1(t) = p^{\gamma_u} v(t).$$

Тогда принимая во внимание уравнения (8), (10), (12), (14) и (15), выпишем уравнения замкнутой системы управления

$$v(t) = -\frac{1}{\beta}\frac{Q_0(p)}{T(p)}\zeta(t),$$

$$\bar{e}(t) = \beta\frac{T(p)}{Q_0(p)}v(t),$$

$$u(t) = \alpha T(p)\bar{v}(t), \tag{16}$$

$$\dot{\eta}(t) = \mu^{-1}G\eta(t) + b\dot{v}(t), \quad \overline{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u - 1}L\eta(t),$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) + \alpha\mu^{\gamma_u - 1}b_R g\Delta(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t).$$

где $\varepsilon(t) \in R^{\gamma_u}$; $A_m \in R^{\gamma_u \times \gamma_u}$ – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $Q_0(\lambda)$; $b_R^{\mathrm{T}} = [0, \ldots, 0, 1] \in R^{\gamma_u}$; $\Delta(t) = \left[\eta_1(t), \dot{\eta}_1(t), \ldots, \eta_1^{(\gamma_u)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$; $g \in R^{1\times(\gamma_u+1)}$ – матрица, составленная из коэффициентов полинома $T(\lambda)$.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений А. Тогда для любых $Q(p, t)$ и $R(p, t)$ из множества Ξ существуют числа $T > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что при $\mu \le \mu_0$ система (16) *диссипативна и выполнено целевое условие* (3) *при $t \ge T$.*

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Стоит заметить, что с учетом (10), закон управления $u(t)$ можно сформировать как $u(t) = -\alpha / \beta Q_0(p)\zeta(t)$. При выполнении предположения А.5, функция $u(t)$ выбирается в виде $u(t) = -\alpha / \beta Q_0(p)\bar{\zeta}(t)$, где $\bar{\zeta}(t)$ – оценка сигнала $\zeta(t)$, поданного на вход фильтра (14). Дальнейшие рассуждения и результаты аналогичны проделанным выше.

4. Обобщение на системы с запаздыванием по состоянию

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом:

$$Q(p, t)y(t) + N(p, t)y(t - \tau(t)) = R(p, t)u(t), \tag{17}$$

где $u(t)$, $y(t)$, $Q(p, t)$ и $R(p, t)$ – такие же, как в (1), $N(p,t)=\breve{n}_{\tilde{n}}(t)p^{\tilde{n}}+\breve{n}_{\tilde{n}-1}(t)p^{\tilde{n}-1}+...+\breve{n}_0(t)$ – дифференциальный оператор с неизвестными коэффициентами, являющимися ограниченными функциями, $\tilde{n}\le n-1$, $\tau(t)>0$ – неизвестное время запаздывания, удовлетворяющее условию $d\tau(t)/dt<1$. Причем, в процессе функционирования системы при любом порядке оператора $Q(p, t)$, порядок $N(p, t)$ всегда должен быть хотя бы на единицу меньше $\deg Q(p, t)$. Эталонная модель задается уравнением (2), цель управления неравенством (3).

Так как порядки операторов в (17) неизвестны и переменны из-за нестационарности их коэффициентов, то, как и в предыдущем пункте, возникает проблема о виде представления уравнения (17), удобного для дальнейшего синтеза замкнутой системы управления. Для решения этой проблемы воспользуемся разложением (4) и преобразуем уравнение объекта (17) к форме

$$y(t)=\frac{1}{Q_0(p)}\Big(u(t)+\varphi(t)-\tag{18}$$
$$-u(t)+\varphi(t)-\frac{1}{R_m(p)}\big[N(p,t)y(t-\tau(t))\big]+k_m r(t)\Big).$$

Сформируем ошибку слежения $e(t)=y(t)-y_m(t)$, принимая во внимания (2) и (18)

$$e(t)=\frac{1}{Q_0(p)}\left(u(t)+\varphi(t)-\frac{1}{R_m(p)}\big[N(p,t)y\big(t-\tau(t)\big)\big]\right).\tag{19}$$

Далее, следуя схеме построения замкнутой системы управления, как в предыдущем разделе, введем закон управления (6), вспомогательный контур (8) и составим ошибку рассогласования $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$:

$$\zeta(t)=\frac{T(p)}{Q_0(p)}\varphi_2(t),\tag{20}$$

где $\varphi_2(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)(\varphi(t) - 1/R_m(p)[N(p, t)y(t - \tau(t))])$. Зададим функцию $v(t)$ в виде

$$v(t)=-\frac{1}{\beta}\frac{Q_0(p)}{T(p)}\zeta(t)=-\beta^{-1}\varphi_2(t).\tag{21}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему пункту. Разрешив уравнение (21) относительно $v(t)$ и подставив его в (19), получим уравнение замкнутой системы управления по ошибке слежения: $Q_0(p)e(t) = 0$. Причем, доказательство ограниченности функции $\varphi_2(t)$ совпадает с доказательством ограниченности сигнала $\varphi_1(t)$. Однако, в силу предположения A.5, использование закона управления (6) недопустимо. Поэтому, зададим $u(t)$ в виде (12), и перепишем уравнение ошибки слежения (19) как

$$e(t) = \alpha \frac{T(p)}{Q_0(p)} \bar{\Delta}(t) . \tag{22}$$

Реализацию γ_u-производных сигнала $\bar{v}(t)$ в законе управления (12), осуществим с помощью наблюдателя (14). Тогда, результат (15) выполнен и здесь. Выпишем уравнения, входящие в состав замкнутой системы управления:

$$\begin{gathered}
v(t) = -\frac{1}{\beta} \frac{Q_0(p)}{T(p)} \zeta(t), \\
\bar{e}(t) = \beta \frac{T(p)}{Q_0(p)} v(t), \\
u(t) = \alpha T(p) \bar{v}(t), \\
\dot{\eta}(t) = \mu^{-1} G \eta(t) + b \dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u - 1} L \eta(t), \\
\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \alpha \mu^{\gamma_u - 1} b_R g \Delta(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t).
\end{gathered} \tag{23}$$

которые имеют такой же вид, как (16), где структуры векторов $\varepsilon(t) \in R^{\gamma_u \times 1}$, b_R, $\Delta(t)$ и g – как и в (16).

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений A и дополнительные условия, наложенные на класс объектов (17). *Тогда для любых* $Q(p, t)$, $R(p, t)$ *и* $N(p, t)$ *из множества* Ξ *существуют числа* $T > 0$ *и* $\mu_0 > 0$ *такие, что при* $\mu \le \mu_0$ *система* (23) *диссипативна и выполнено целевое условие* (3) *при* $t \ge T$.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1, поэтому здесь не приводится.

5. Примеры

1. Рассмотрим линейный объект управления вида (1):

$$\left(q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t)\right)y(t) = \\ = \left(r_1(t)p + r_0(t)\right)u(t) + f(t) \tag{24}$$

Если коэффициенты при старших степенях $q_4(t) \neq 0$ и $r_1(t) \neq 0$, то $\deg Q(p, t) = n = 4$, $\deg R(p, t) = m = 1$, а значит $\gamma = 3$. Ниже рассмотрен пример, когда под действием нестационарных параметрических возмущений меняются параметры объекта и, как следствие, его динамический порядок (т.е. подвержены изменению n, m и γ).

Пусть $\gamma_u = 4$ – верхняя оценка относительной степени объекта. Тогда $\deg Q_0(p) = 4$. Уравнение эталонной модели зададим в виде

$$\left(p+1\right)^4 y_m(t) = r(t),$$

где $k_m = 1$, $R_m(p) = 1$, $Q_m(p) = (p + 1)^4$ и $r(t) = 2 + \sin 0{,}5t + 2\sin t + P_1(t)$, $P_1(t)$ – импульсы с амплитудой 2, периодом 4 сек и длительностью 2 сек.

Выберем $\beta = 50$ и $T(p) = p^4 + 100p^3 + 200p^2 + p + 0{,}01$. Учитывая (8) и (10), зададим уравнения вспомогательного управляющего воздействия и вспомогательного контура в форме

$$v(t) = -0{,}02\frac{\left(p+1\right)^4}{0{,}01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100}\zeta(t),$$

$$\bar{e}(t) = 50\frac{0{,}01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100}{\left(p+1\right)^4}v(t).$$

Здесь $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$ – уравнение рассогласования и $e(t) = y(t) - y_m(t)$ – ошибка слежения.

Для реализации закона управления (12) сформируем наблюдатель (14):

$$\dot{\xi}_i(t) = \xi_{i+1}(t) - \frac{d_i}{\mu^i}\left(\xi_1(t) - v(t)\right), \quad i = 1, \ldots, 3,$$

$$\dot{\xi}_4(t) = -\frac{d_4}{\mu^4}\left(\xi_1(t) - v(t)\right),$$

$$\bar{v}(t) = \xi_1(t),$$

где матрица D выбрана как D = [20, 150, 500, 625]$^{\mathrm{T}}$, $\mu = 10^{-2}$.

Задав $\alpha = 50$, закон управления (12) определится в виде

$$u(t) = 50\left[0{,}01\bar{v}^{(4)}(t) + 2\dddot{\bar{v}}(t) + 200\ddot{\bar{v}}(t) + 200\dot{\bar{v}}(t) + 100\bar{v}(t)\right].$$

На рис. 1 приведены примеры моделирования при нулевых начальных условиях и следующих параметрах в объекте (24):

$$q_4(t) = \bar{P}_1(t)(1{,}5 + \cos t),\; q_3(t) = 4\bar{P}_2(t)(1{,}5 + \cos t/3),\; q_2(t) = 4(3 + \sin 2t),\; q_1(t) = -3\sin 2t + 4\sin 2t,\; q_0(t) = -5\sin 2t + 7\sin 0{,}5t,$$

$$r_1(t) = \bar{P}_3(t)(2 + \cos t),\; r_0(t) = 2 + \sin 3t,\; f(t) = 2 + \sin 1{,}5t + P_2(t),$$

где $\bar{P}_1(t)$, $\bar{P}_2(t)$, $\bar{P}_3(t)$ и $P_2(t)$ – прямоугольные импульсы с амплитудами 1, периодами 25 сек, длительностями 5, 8, 20 и 5 сек.

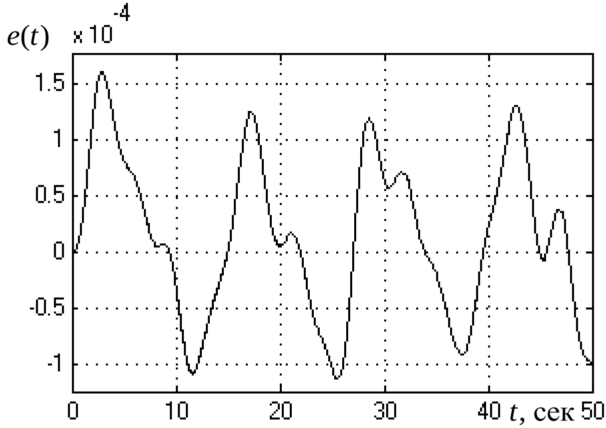

Рис. 1.

Для объекта в моменты времени:

1) $t \in (0 + 25\,(k-1), 5 + 25\,(k-1))$: $q_4(t)\, r_1(t) > 0$, то есть $n = 4$ и $\gamma = 3$;

2) $t \in (5 + 25\,(k-1), 8 + 25\,(k-1))$: $q_4(t) = 0$ и $q_3(t)\, r_1(t) > 0$, то есть $n = 3$ и $\gamma = 2$;

3) $t \in (8 + 25\,(k-1), 20 + 25\,(k-1))$: $q_4(t) = q_3(t) = 0$ и $q_2(t)\, r_1(t) > 0$, т.е. $n = 2$ и $\gamma = 1$;

4) $t \in (20 + 25\,(k-1),\ 25 + 25\,(k-1))$: $q_4(t) = q_3(t) = r_1(t) = 0$ и $q_2(t)\ r_0(t) > 0$, т.е. $n = 2$ и $\gamma = 2$,
где $k \in N$, N – множество натуральных чисел.

2. Пусть задан линейный нестационарный объект с запаздыванием по состоянию:

$$
\begin{aligned}
&\left(q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t)\right)y(t) + \\
&+\left(\breve{n}_2(t)p^2 + \breve{n}_1(t)p + \breve{n}_0(t)\right)y(t-\tau) = \\
&= \left(r_1(t)p + r_0(t)\right)u(t) + f(t),
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где, дополнительно первому примеру, считается еще неизвестными порядок и коэффициенты оператора $N(p, t)$, а также время запаздывания $\tau(t)$. Пусть, верхняя оценка относительной степени объекта (25) $\gamma_u = 4$. Структуру и параметры замкнутой системы управления зададим как в первом примере.

На рис. 2 приведены результаты моделирования при нулевых начальных условиях и следующих параметрах объекта (25): коэффициенты $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$ и $r_j(t)$, $j = 1, 2$ те же, что и в первом примере. Дополнительно $\breve{n}_1(t) = 4(1 + \cos t)$, $\breve{n}_2(t) = 1 + 2\sin 2t$ и $\tau(t) = 1 + e^{-t}$;

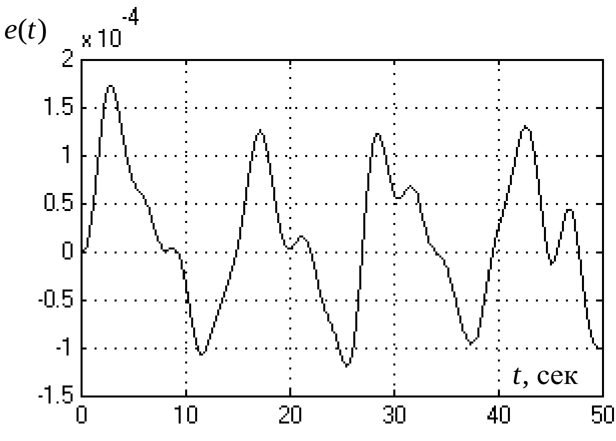

Рис. 2.

Из результатов моделирования видно, что предложенный алгоритм компенсирует нестационарные параметрические и внешние возмущения, а также неопределенности порядков числителя и знаменателя объекта управления. При этом обеспечены хорошие показатели качеств переходных процессов, то есть, возмущающие воздействия, влияющие как на параметры объекта управления, так и на его динамический порядок, мало сказываются на качестве переходных процессов и устойчивости замкнутой системы. Численные моделирования показало, что качество переходных процессов, зависят от точности оценок параметров объекта и, в особенности, от значений чисел μ в (14), α и β в (8), (10), (12) и матрицы D в (14). Причем, оценки, полученные в приложении относительно времени переходного процесса T по ошибке слежения и точности δ – грубы, по сравнению с результатами численных моделирований.

6. Заключение

В статье предложен способ построения робастной системы управления, которая позволяет скомпенсировать неконтролируемые внешние воздействия и параметрическую нестационарную неопределенность, при условии, что порядки операторов $Q(p, t)$, $R(p, t)$ в (1) и $N(p, t)$ в (17) неизвестны, и могут изменяться в процессе функционирования. Компенсация осуществляется с точностью δ за конечное время T. Причем, величины δ и T можно сделать достаточно малыми за счет соответствующего выбора параметров замкнутой системы: чисел μ в (14), α, β в (8), (10), (12) и матрицы D в (14).

Сравнивая предложенный робастный алгоритм с [1-14, 16-18] важно отметить, что для управления объектами вида (1), или (17), достаточно знания верхней оценок разности порядков операторов $Q(p, t)$ и $R(p, t)$, а не их точных значений. При этом данные порядки могут меняться в процессе функционирования системы.

Численные моделирования на ЭВМ показали, что качество переходных процессов не существенно зависит от порядков оператор в (1) и (17) и величины оценки γ_u. Амплитуда управляющего воздействия зависит от параметров системы: μ, α, β, D и, в особенности, от неизвестных начальных условий объекта управления. Так, чем больше разность между начальными условиями объекта управления и эталонной модели, тем больше амплитуда сигнала управления $u(t)$ в начальный момент времени.

Приложение

*Доказательство утверждения 1.*Перепишем последние четыре уравнения (16) в виде

$$\begin{aligned}&\mu_1\dot{\eta}(t) = G\eta(t) + \mu_2 b\dot{v}(t), \quad \overline{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u - 1} L\eta(t),\\ &\dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) + \alpha\mu_2^{\gamma_u - 1} b_R g\Delta(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t),\end{aligned} \tag{26}$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Воспользуемся первой леммой в [3].

Выберем функцию Ляпунова для уравнений (26) в виде

$$V(t) = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)P\varepsilon(t) + \eta^{\mathrm{T}}(t)H\eta(t), \tag{27}$$

где матрицы $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ определяются из решений уравнений $A_m^{\mathrm{T}} P + PA_m = -Q_1$, $H^T G + GH = -Q_2$, $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} > 0$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} > 0$. Возьмем от функции V(t) полную производную по времени вдоль траекторий (26) при $\mu_2 = 0$:

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q_1\varepsilon(t) - \eta^{\mathrm{T}}(t)Q_2\eta(t). \tag{28}$$

Следовательно $\lim\limits_{t\to\infty}|\varepsilon(t)| = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}|\eta(t)| = 0$. Тогда, в силу условий второй леммы [18], $|\Delta(t)| < k_1$, $|\dot{v}(t)| < k_2$.

Таким образом, при $\mu_2 = 0$ получаем устойчивую систему уравнений (26). В соответствии с леммой [3], существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \le \mu_0$ область диссипативности системы (26) сохраняется. Пусть в (26) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Возьмем снова функцию Ляпунова (27) и вычислим теперь полную производную от нее вдоль траекторий (26) с учетом результата (28):

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) + 2\alpha\mu_0^{\gamma_u - 1}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Pb_R g\Delta(t) -\\ &-\eta^{\mathrm{T}}(t)Q_2\eta(t) + 2\mu_0\eta^{\mathrm{T}}(t)Hb\dot{v}(t).\end{aligned}$$

Рассмотрим оценки:

$$2\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Pb_R g\Delta(t)\le$$
$$\le\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Pb_R gg^{\mathrm{T}}b_R^{\mathrm{T}}P\varepsilon(t)+\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\left|\Delta(t)\right|^2\le$$
$$\le\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Pb_R gg^{\mathrm{T}}b_R^{\mathrm{T}}P\varepsilon(t)+\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2;$$
$$2\mu_0\eta^{\mathrm{T}}(t)Hb\dot{v}(t)\le\mu_0\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbb^{\mathrm{T}}H\eta(t)+\mu_0\dot{v}^2(t)\le$$
$$\le\mu_0\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbb^{\mathrm{T}}H\eta(t)+\mu_0k_2^2.$$

Тогда, с учетом оценок, производная функции Ляпунова (28) примет вид
$$\dot{V}\le-\varepsilon^T\left(Q_1-\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}Pb_R gg^T b_R^{\mathrm{T}}P\right)\varepsilon-\eta^{\mathrm{T}}\left(Q_2-\mu_0Hbb^{\mathrm{T}}H\right)\eta+$$
$$+\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2+\mu_0k_2^2.$$

Очевидно, что существует число $\mu_0>0$, обеспечивающее выполнение матричных неравенств:
$$Q_1-\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}Pb_R gg^T b_R^{\mathrm{T}}P=Q_3>0 \text{ и } Q_2-\mu_0Hbb^{\mathrm{T}}H=Q_4>0.$$

В этом случае оценку производной функции Ляпунова можно записать как
$$\dot{V}\le-\chi V+\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2+\mu_0k_2^2,$$
где $\chi=\min\{\lambda_{\max}(Q_3)/\lambda_{\min}(P),\lambda_{\max}(Q_4)/\lambda_{\min}(H)\}$. Решив последнее неравенство, получим

(29) $$V(t)\le e^{-\chi t}V(0)+\left(1-e^{-\chi t}\right)\left(\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2+\mu_0k_2^2\right),$$

откуда следует, что
$$\lim_{t\to\infty}V(t)\le\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2+\mu_0k_2^2.$$

Видно, что существует число $\mu_0>0$, обеспечивающее требуемую величину δ в целевом условии (3). Приравняем правую часть (29) к δ:
$$\delta\le e^{-\chi t}V(0)+\chi^{-1}\left(1-e^{-\chi t}\right)\left(\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2+\mu_0k_2^2\right),$$
и рассмотрим верхнюю границу (29), заменив неравенство равенством, в момент времени $t=T$. Тогда
$$T=\frac{1}{\chi}\ln\frac{\chi V(0)-\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2-\mu_0k_2^2}{\chi\delta-\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2-\mu_0k_2^2}.$$

Т.е. по истечению времени $t = T$ будет выполнено целевое условие (3) и все функции в замкнутой системе управления – ограниченны.

Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 82-96.
2. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления линейными объектами по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2003. – № 2. – С. 93-97.
3. БРУСИН В.А. *Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем*. 1 // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 119-127.
4. БУКОВ В.Н. *Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем*. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
5. ВОРОНОВ К.В., НИКИФОРОВ В.О. *Динамический регулятор выходной переменной с компенсацией постоянных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 2. – С. 11-21.
6. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб.: Наука, 2000. – 550 с.
7. НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 9. – С. 3-22.
8. НИКИФОРОВ В.О. *Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69-73.
9. *Никифоров* В.О. *Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. 1. Объекты с известными пара-*

метрами // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 13-24.

10. НИКИФОРОВ В.О. *Наблюдатели внешних детерминированных возмущений*. 2. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 40-48.
11. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление*. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
12. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 103-115.
13. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, № 9. – P. 1672-1687.
14. FEUER A., MORSE A.S. *Adaptive control of single input, single-output linear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 2000. – Vol. 45, № 3. – P. 490-494.
15. HOAGG J. B., DERNSTEIN D.S. *Direct adaptive command following and* DISTURBANCE *rejection for minimum phase systems with unknown relative degree* // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 2007. – Vol. 21, № 1. – P. 49-75.
16. MONOPOLI R.V. *Model reference adaptive control with an augmented signal* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol. 19, № 5. – P. 474-484.
17. MORSE A.S. *High-order parameter tuners for adaptive control on nonlinear system* // Isidori A., Tarn T. I. (eds). Systems, Models and Feedback: Theory and Applications. Birkhanser. – 1992. – P. 339-364.
18. NIKIFOROV V.O. *Robust high-order tuner of simplified structure* // Automatica. – 1999. – Vol. 35, № 8. – P. 1409-1417.
19. TAO G., Ioannou P.A. *Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree* // IEEE Trans. On Automatic Control. – 1993. – Vol. 38, № 6. – P. 976-982.

ROBUST CONTROL OF TIME-VARYING PLANTS WITH UNKNOWN VARIABLE RELATIVE DEGREE

Igor Furtat, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, Cand.Sc. (cainenash@mail.ru).
Alexander Tsykunov, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Doctor of Science professor. (tsykunov_al@mail.ru).

Abstract: The problem of robust control of linear time-varying plants an output is considered under the action of external and internal uncontrollable disturbances and lack of information about the relative degree of the plant. During the process of the system relative degree may be different. The problem is solved on the basis of a robust algorithm allowing to compensate these uncertainties with the required accuracy and for a finite time. The results of computer simulation are given.

Keywords: robust control, structural uncertain plant, auxiliary plant, observer, compensation of disturbances.