УДК 519.283
ББК 22.171

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Андриенко А.Я.[1], Тропова Е.И.[2]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Предложен метод построения оценок спектральной плотности стационарного процесса по его реализации ограниченной длительности. Повышение точности этих оценок достигается варьированием ширины спектрального окна в функции от длительности наблюдения и локальных свойств спектральной плотности.

Ключевые слова: случайный процесс, оценка спектральной плотности, преобразование Фурье, спектральное окно.

1. Введение

Решение многих задач, возникающих в различных областях техники, приводит к необходимости оценивания состояния случайного процесса и прогнозирования этого состояния в будущие моменты времени. Можно выделить два типа таких задач.

К первому типу относятся задачи, в которых требуется по наблюдаемой реализации случайного процесса количественно оценить его статистические характеристики. Примером задачи этого типа является оценивание ресурса механических конструкций, подверженных воздействию случайной нагрузки.

---

[1] *Анатолий Яковлевич Андриенко, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор* (*vladguc@ipu.rssi.ru*).
[2] *Елена Ивановна Тропова, научный сотрудник* (*тел.* (*495*) *334-88-71*).

В задачах второго типа по наблюдаемой реализации требуется оценить случайное значение, которое примет реализация в будущие моменты времени. Примерами задач этого типа служат прогноз спроса на рыночную продукцию либо оперативный (или долговременный) прогноз регулярности полетов, используемый при планировании эксплуатации аэродрома, и т.д.

Для решения таких задач широко используется спектральный метод. Среди различных подходов к оцениванию спектра значительное место занимают методы, основанные на вычислении периодограммы с последующим её сглаживанием при помощи спектрального окна [1]. В этих методах используется минимальная априорная информация о случайном процессе (обычно предполагается стационарность процесса и гладкость его спектральной плотности). Предложено большое количество различных спектральных окон, для большинства из них получены асимптотические оценки статистической точности действия и найдены условия асимптотической оптимальности [2]. Однако во многих практических случаях наблюдению доступен фрагмент реализации случайного процесса, длительность которого существенно ограничена. В этих условиях асимптотически оптимальные спектральные окна могут приводить к большим погрешностям оценивания спектральной плотности (СП). В статье основное внимание уделено формированию оптимальных оценок СП случайного процесса по его реализации конечной длительности.

2. Постановка задачи

В основе большинства известных методов оценивания спектра лежит периодограмма

$$J_T(f) = \frac{2}{T}\left|\int_0^T x(t)\exp(-i2\pi ft)dt\right|^2,$$

где f – частота (в герцах), $x(t)$ – реализация стационарного случайного процесса $\{X(t)\}$.

Всякая оценка спектральной плотности $S(f)$, являющаяся линейной комбинацией значений периодограммы, в общем виде может быть представлена сверткой [2]

$$(1)\quad \hat{S}_T(f)=\int_0^{\infty} W(f-\lambda)J_T(\lambda)d\lambda\ ,$$

где $W(f-\lambda)$ – спектральное окно. В известных методах это окно подбирается так, чтобы оно имело резко выраженный максимум в нуле и давало асимптотически несмещенную и состоятельную оценку спектральной плотности $S(f)$. Отметим, что форма спектрального окна в (1) одинакова для всей совокупности частот, на которых строятся точечные оценки спектральной плотности, и зависят только от разности $f-\lambda$.

Вместо линейной оценки (1) предлагается использовать нелинейную оценку

$$(2)\quad \hat{S}_T(f)=\int_0^{\infty} W(f-\lambda,f)J_T(\lambda)d\lambda\ ,$$

в которой форма спектрального окна зависит от локальных свойств периодограммы в окрестности частоты f, на которой строится оценка. Известно [1], что требования уменьшения смещения оценки спектральной плотности и обеспечения наиболее быстрой сходимости дисперсии этой оценки к нулю при неограниченном увеличении длительности наблюдения T оказываются противоречивыми. Если СП стационарного процесса является гладкой функцией частоты, то смещение оценки (1) пропорционально второй производной спектральной плотности, а дисперсия этой оценки пропорциональна квадрату спектральной плотности. Отсюда следует, что относительный вклад смещения и дисперсии в суммарную статистическую точность оценки (1) зависит от соотношения между значением спектральной плотности и величиной её второй производной, т.е. от локальных свойств спектральной плотности. Задача заключается в том, чтобы для каждой частоты f, на которой строится точечная оценка спектральной плотности, выбрать такую форму спектрального окна W($f-\lambda,f$), которая обеспечила бы минимум среднеквадратического уклонения оценки (2) от истинного значения СП.

В следующем разделе вводится скользящее преобразование Фурье, рассматриваются его основные свойства и показывается, каким образом можно построить семейство оценок вида (2) в функции от эффективной ширины спектрального окна. В разделе 4 кратко представлен способ выбора оптимальной ширины спектрального окна для формирования оптимальной оценки спектральной плотности процесса по его финитной реализации.

3. Некоторые свойства скользящего преобразования Фурье

Пусть $x(t)$ – действительная функция, заданная на всей числовой оси и суммируемая с квадратом на любом конечном интервале τ. Определим скользящий интервал $\{J_{t\tau} : t \le s \le t+\tau \}$, ширина τ которого постоянна, а начальная точка скользит вдоль числовой оси. Представим разложение $x(t)$ на интервале $J_{t\tau}$ в ряд Фурье:

$$(3) \quad x(t+s) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k\tau}(t) \exp(i k\omega(t+s)) \qquad (0 \le s \le \tau),$$

коэффициенты которого в отличие от обычного ряда Фурье зависят от времени:

$$c_{r\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t+s) \exp(-ik\omega s) ds \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \ .$$

Ряд (3) сходится на интервале τ к $x(t)$ в каждой точке её непрерывности, однако, в концевых точках поточечная сходимость нарушается из-за эффекта Гиббса [2]. Поэтому вместо (3) будем рассматривать ряд

$$(4) \quad x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k\tau}(t-\varepsilon) \exp(i k\omega t),$$

где ε – фиксированное малое положительное число. Этот ряд сходится к $x(t)$ в каждой точке её непрерывности; более того, если дополнительно потребовать выполнения одного из условий, обеспечивающих равномерную сходимость (например, условия Дини), то в (4) может быть поставлен знак равенства.

Проведем такие же рассуждения применительно к случайному процессу $\{X(t)\}$. Будем полагать, что процесс стационарный, эргодический, непрерывен в среднеквадратическом и обладает конечными моментами до четвертого порядка включительно. Тогда интеграл

$$\eta_{k\tau}(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t+s)\exp(-ik\omega s)ds \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots) \ ,$$

является случайной функцией t. Поэтому записанный по аналогии с (4) ряд

$$(5) \quad X(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_{k\tau}(t-\varepsilon)\exp(ik\omega t) \qquad 0 < \varepsilon < \tau \ ,$$

сходится к $\{X(t)\}$. Остановимся кратко на конечных его свойствах.

Рассматривая ряд (4) при различных значениях ширины базового интервала τ, получим семейство скользящих рядов Фурье $\{\Phi_\tau X\}$, где Φ_τ - линейный оператор скользящего преобразования Фурье. В силу сделанных предположений о случайном процессе $X(t)$ выражение

$$(6) \quad S_\tau(\omega) = 2\tau M\left[\left|\eta_\tau(\omega)\right|\right]^2 ,$$

(где $M(\,\cdot\,)$ – оператор матожидания) имеет смысл для каждого τ. Величина $S_\tau(\omega)$ при $\tau \to \infty$ сходится к спектральной плотности процесса $S(\omega)$.

В силу линейности оператора Φ_τ и эргодичности $\{X(t)\}$ случайные функции $\{\eta_{k\tau}(t)\}$ стационарны и эргодичны, поэтому оператор матожидания (6) может быть заменен усреднением по времени:

$$(7) \quad S_\tau(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\tau}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \left|\eta_\tau(\omega,t)\right|^2 dt \ .$$

Если наблюдению доступен фрагмент реализации полной длительности T, то параметрическое семейство оценок (6) для различных τ может быть получено из (7) в виде

(8) $$\hat{S}_{\tau T}(\omega) = \frac{2\tau}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \left|\eta_\tau(\omega,t)\right|^2 dt, \quad 0 < \tau \le T \ .$$

Обозначим дисперсию оценки (8) через $\sigma_{\tau T}^2(\omega)$ и смещение – через $b_{\tau T}$ (ω). Среднеквадратическое уклонение оценки (8) относительно истинного значения $S(\omega)$ есть

(9) $$M\left[\hat{S}_{\tau T}(\omega) - S(\omega)\right]^2 = \sigma_{\tau T}^2(\omega) + b_{\tau T}^2(\omega) \ .$$

Первый член в этом выражении с уменьшением τ падает в силу возрастания интервала временного сглаживания $T-\tau$, второй возрастает. Задача состоит в том, чтобы при фиксированной полной длительности Т отыскать оптимальной значение τ, доставляющее минимум (9).

4. Оптимальное оценивание спектральной плотности процесса по его финитной реализации

Пусть $\{x(t),\ 0 \le t \le T\}$ – финитный фрагмент реализации случайного процесса X, удовлетворяющего приведенным в разделе 3 предположениям. Выбор ширины базового интервала τ определяется тремя факторами: требуемым разрешением оценок СП по частоте, удобством применения процедуры быстрого преобразования Фурье и корреляционными свойствами процесса.

Будем полагать, что этот интервал укладывается целое число (N) раз на полном интервале T, т.е. $T = N\tau$. Исходным является семейство оценок вида

(10) $$\hat{S}_{\nu\tau}(f_k) = \nu\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(\pi\lambda\nu\tau)}{\pi\lambda\nu\tau}\right]^2 J_T(f_k+\lambda)\, d\lambda \ ,$$

$$(J_T(\lambda) = J_T(-\lambda); \quad f_k = k/\tau, \quad k = 1,2,...; \quad \nu = 1,2,...,N-1).$$

Дальнейший анализ выражения (10) проведем при двух предположениях: 1) полная длительность T финитного фрагмента реализации процесса достаточно велика, так что для периодограммы могут быть использованы асимптотические оценки; 2) спектральная плотность $S(\lambda)$ процесса является гладкой (дважды дифференцируемой) функцией частоты.

Известно [2], что $J_T(\lambda)$ есть несмещенная оценка $S_T(\lambda)$, поэтому при больших Т периодограмма может быть приближенно представлена в виде

(11) $J_T(\lambda) = S_T(\lambda) + \xi_T(\lambda)$,

где $\xi_T(\lambda)$ – случайная функция с независимыми значениями, нулевым матожиданием и дисперсией $\sigma^2[\xi_T(\lambda)] \approx S_T^2(\lambda)$, $\lambda \neq 0$.

С учетом (10), (11) уклонение оценки спектральной плотности от истинного значения представим в виде

(12)
$$\hat{S}_{\nu\tau}(f_k) - S_T(f_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^2\left[S_T\left(f_k + \frac{\lambda}{\pi\nu\tau}\right) - S_T(f_k)\right]d\lambda +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^2\xi_T\left(f_k + \frac{\lambda}{\pi\nu\tau}\right)d\lambda .$$

Первый интеграл в этом выражении описывает смещение оценки, второй – её вариабельность. При больших T можно воспользоваться известным асимптотическим выражением для дисперсии [2]

(13) $\sigma_{\nu\tau}^2(f_k) \approx \dfrac{\nu}{N}\sigma^2\left[J_T(f_k)\right] \approx \dfrac{\nu}{N}S^2(f_k)$,

откуда следует, что при выборе малых значений ν/N дисперсия оценки (10) может быть значительно уменьшена, но при этом возрастает смещение оценки вследствие увеличения эффективной ширины спектрального окна и влияния на оценку значений спектра на более отдаленных частотах.

Используя предположение 2), представим приближенно спектральную плотность в виде квадратичного трехчлена

(14)
$$S_T\left(f_k + \frac{\lambda}{\pi\nu\tau}\right) \approx S_T(f_k) + \frac{1}{\pi\nu\tau}S_T'(f_k)\lambda + \frac{1}{2(\pi\nu\tau)^2}S_T''(f_k)\lambda^2 ,$$
$$-\pi \le \lambda \le \pi .$$

Погрешность этого приближения на интервале $-\pi \le \lambda \le \pi$ может быть сделана сколь угодно малой посредством выбора достаточно больших значений ν. Подставив (14) в первый интеграл правой части (12) и учтя, что подынтегральная функция является четной, получим для смещения оценки приближенную формулу

$$(15)\quad b_{\nu\tau}(f_k) \approx \left(\frac{N}{\nu}\right)^2 S''(f_k)\big/2\pi^2 T^2 \ .$$

Для формирования оптимальной точечной оценки спектральной плотности при фиксированной полной длительности наблюдения T, необходимо выбрать такое ν^*, при котором среднеквадратическое уклонение оценки (относительно истинного значения спектра) минимально. Обозначив $\rho = \nu/N$, из (12) с учетом (13) и (15) получим

$$M\left[\hat{S}_{\nu\tau}(f_k) - S_T(f_k)\right]^2 \approx \rho_k S^2(f_k) + \frac{1}{\rho_k^4}\left[S''_T(f_k)\big/2\pi^2 T^2\right]^2 .$$

Это выражение достигает минимума при

$$\rho_k^* = \frac{\nu_k^*}{N} = \sqrt[5]{\frac{1}{\pi^4 T^4}\left[S''_T(f_k)/S_T(f_k)\right]^2} \ .$$

Таким образом, оптимальная ширина спектрального окна (т.е. оптимальное значение $\nu^*\tau$) зависит от локальных свойств спектральной плотности в окрестности частоты f_k и от полной длительности наблюдения T. Если на частоте f_k спектральная плотность имеет резкий пик (или провал), то ее вторая производная в этой точке отрицательна (соответственно положительна) и велика по абсолютной величине. В этом случае оценка (10) согласно (15) будет иметь большое смещение и ширину спектрального окна следует увеличивать. Если же в окрестности частоты f_k спектральная плотность постоянна либо изменяется по закону, близкому к линейному, то смещение у оценки (10) практически отсутствует и величина $\nu^*\tau$ должна быть выбрана возможно более малой с тем, чтобы обеспечить максимальное сглаживание случайной составляющей оценки.

Отметим также, что при $T \to 0$ оптимальное значение ρ_k^* стремится к нулю при любой форме спектральной плотности, при этом оценка (10) является состоятельной и асимптотически несмещенной, что согласуется с известными результатами.

5. Заключение

Представленный метод оценивания спектральной плотности стационарного эргодического процесса по его реализации ограниченной длительности позволяет повысить статистическую точность оценок посредством использования на каждой частоте спектральных окон переменной ширины, автоматически учитывающих особенности корреляционных связей анализируемого процесса. Необходимое быстродействие оценивания обеспечивается применением быстрого преобразования Фурье на всех этапах вычислений..

Литература

1. АНДЕРСОН Т. *Статистический анализ временных рядов*. – М.: Мир, 1976.
2. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике.* – М.: Наука, 1985.

FORECASTING CONDITION OF DYNAMIC SYSTEMS ON THE BASIS THE ANALYSIS OF THEIR SPECTRAL CHARACTERISTICS

Anatolii Andrienko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru).

Elena Tropova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

Abstract: The method of construction estimates of spectral density of stationary process on its realization the limited duration is offered. Increase of accuracy of these estimates is reached by a variation of width of a spectral window in function from duration of supervision and local properties of spectral density.

Keywords: random process, estimate of spectral density, Fourier transformation, spectral window.