УДК 517.958
ББК 22.161.5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПРИЧИННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОСОБЫЕ СЛУЧАИ), часть II

Солнечный Э. М.[1], Черёмушкина Л. А.[2]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления РАН, Москва*)

Ещё для одного из особых видов граничных условий на одномерно распределённый объект теплопроводности конечной длины получены оценки норм операторов, входящих в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости системы управления объектом с помощью нелинейной обратной связи.

Ключевые слова: система управления, причинность, устойчивость, распределенные динамические системы, линейный объект теплопроводности, теория функций комплексного переменного.

1. Введение

Настоящая работа опирается на изложенную в [1] методику исследования условий детерминированности, причинности и устойчивости системы, состоящей из линейного распределённого объекта и, вообще говоря, нелинейной обратной связи. Работа содержит исследование ограниченности операторов, входящих в

[1] *Энгель Михайлович Солнечный, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*
[2] *Людмила Александровна Черёмушкина (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

полученное в [1] достаточное условие причинности и устойчивости системы управления одномерно распределённым объектом теплопроводности конечной длины $l > 1$, и определение оценок норм этих операторов.

Объект, рассматриваемый в данной работе, описывается уравнениями

$$(1.1)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial \Delta T}{\partial t} = -\dfrac{\partial \Delta q}{\partial x}, \\ \Delta q = -\lambda \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}, \end{cases}$$

с граничными условиями вида

$$(1.2)\qquad C_0 y\,|_{x=0} + C_l y\,|_{x=l} = u\,,$$

где

$$y = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta q \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

u − отклонение входного воздействия на объект от его установившегося значения; ΔT, Δq – отклонение соответственно температуры T и потока тепла q (в направлении возрастания x) от их установившихся значений, t – время; x – координата вдоль длины объекта ($x \in \mathbf{L} = [0, l]$); c – теплоемкость теплопередающей среды на единицу длины; λ – коэффициент теплопроводности среды. $\mathbf{C}_0 = (c_{0rs})$ и $\mathbf{C}_l = (c_{lrs})$, где $r, s = 1, 2$ – заданные числовые квадратные матрицы 2-го порядка.

При этом в рассматриваемом в данной работе особом случае матрицы $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_l$ полагаются такими, что определяемые через элементы этих матриц коэффициенты $a_0 = \det \mathrm{C}_0 + \det C_l$ и $a_1 = \det((c_{0r1})(c_{lr2})) = c_{011}\,c_{l21} - c_{l11}\,c_{021}$ не равны нулю. Здесь $p = 1, 2$, т.е. (c_{0p1}), (c_{lp1}) – первые столбцы матриц $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_l$ соответственно. Два же других коэффициента $a_2 = \det((c_{0p2})(c_{lp2}))$ и $a_{12} = \det((c_{0p1})(c_{lp2})) - \det((c_{0p2})(c_{lp1}))$ ($p = 1, 2$) равняются нулю: $a_2 = 0$, $a_{12} = 0$ (см. [1]).

Один из простейших видов матриц $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_l$ удовлетворяющих этим условиям, представлен в следующем примере:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \Delta T\big|_{x=0} &= u_1, \\ b\Delta q\big|_{x=0} + \Delta T\big|_{x=l} &= u_2, \end{cases}$$

где $b \neq 0$.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [2], проводится:

а) Исследование расположения полюсов передаточной функции Y объекта от u к y, т.е. нулей её знаменателя D, имеющего для рассматриваемой задачи вид

$$(1.4)\qquad D = a_0 - \frac{a_1}{k} S_l = \frac{a_1}{k} P,$$

где $k = \sqrt{c\lambda/\theta}$, θ – константа, имеющая размерность времени, $S_l = (\alpha l/\sqrt{\theta})(\operatorname{sh}\hat{\zeta}/\hat{\zeta})$, $\alpha = \sqrt{c/\lambda}$, $\hat{\zeta}(p) = \alpha l\sqrt{p}$ – однозначная ветвь функции $\zeta(p) = \alpha l\sqrt{p}$ комплексного переменного p с областью значений $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+ \bigcup \{\zeta = i\tau : \tau \geq 0\} \subset \mathbf{C}$. Здесь $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbf{C}^+ = \{\zeta = \sigma + i\tau : \sigma > 0\}$, σ, τ – вещественные числа, $P(p) = \gamma - \operatorname{sh}(\alpha l\sqrt{p})/\alpha l\sqrt{p}$, $\hat{P}(\hat{\zeta}) = \gamma - \operatorname{sh}\hat{\zeta}/\hat{\zeta}$, $\gamma = ka_0/a_1$.

Параметр γ будем далее считать отрицательным (что означает отрицательность произведения a_0a_1). При таком выборе γ гарантировано отсутствие у функции D вещественных положительных нулей, что необходимо для устойчивости изучаемого объекта.

б) Определение пространства **U** входных воздействий, для которого гарантирована устойчивость объекта, под которой здесь понимается ограниченность оператора $u \to y$. Как следует из выражения для передаточной функции Y объекта (см. [1], формула (2.2)), устойчивость объекта гарантирована при ограниченности сужений на **U** операторов

$$\underline{R_{J_\xi D}}\quad (J = H, S;\ \xi \in \mathbf{L}),$$

имеющих передаточные функции

(1.5) $\qquad R_{J_\xi D} = \dfrac{J_\xi}{D} \ (J = H, S),$

где $H_\xi(p) = \mathrm{ch}\left(\dfrac{\xi}{l}\alpha l\sqrt{p}\right)$, $S_\xi(p) = \dfrac{\alpha l}{\alpha l\sqrt{p}\sqrt{\theta}}\mathrm{sh}\left(\dfrac{\xi}{l}\alpha l\sqrt{p}\right)$.

Пространство **U** ищется в классе пространств $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ (i,j = 1, 2,...) функций-оригиналов φ [3], равномерно ограниченных при $t > 0$, имеющих i ограниченных первообразных $\varphi^{(-r)}$, $0 \le r \le i$, и j ограниченных (обощенных) производных $\varphi^{(-s)}$ ($0 \le s \le j$). Для краткости $\mathbf{Q}_{(0,j)}$ обозначаем $\mathbf{Q}_j$, а $\mathbf{Q}_{(0,0)}$ обозначаем **Q**. Норма в пространстве $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$:

(1.6) $$\|\varphi\|_{\mathbf{Q}_{(-i,j)}} = \max_{r=0\div i,\, s=0\div j}\left(\operatorname*{vraisup}_{t>0}\left|\varphi^{(-r)}\right|\theta^{-r}, \operatorname*{vraisup}_{t>0}\left|\varphi^{(s)}\right|\theta^{s}\right)$$

Функции $R_{J_\xi D}$ входят как в выражение для передаточной функции объекта Y, так и в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости замкнутой системы «объект – обратная связь» (см. [1], формула (2.2)), имеющее вид:

(1.7) $\qquad L_X < 1$.

В (1.7) обозначено (см. [1], формула (2.4)):

$$L_X = m_2 L_{F_{1,\mathbf{U}}} + m_1 L_{F_{2,\mathbf{U}}},$$

$$m_\alpha = (|c_{0\alpha 2}| + |c_{l\alpha 2}|)N_{H,\mathbf{U}} + \frac{|c_{0\alpha 1}| + |c_{l\alpha 1}|}{k}N_{S,\mathbf{U}},$$

$$N_{J,\mathbf{U}} = \sup_{\xi\in\mathbf{L}}\left\|\underline{R_{J_\zeta D}}\right\|_{\mathbf{B}_\mathbf{U}}, \ J = H, S;$$

$\mathbf{B}_\mathbf{U}$ – пространство линейных ограниченных операторов $\mathbf{U} \to \mathbf{Q}$; $L_{F_{\alpha,\mathbf{U}}}$ – константа, входящая в условии липшицевости обратной связи:

(1.8) $$\left\|F_\alpha(\Delta T_1, f) - F_\alpha(\Delta T_2, f)\right\|_\mathbf{U} \le L_{F_{\alpha,\mathbf{U}}}\left\|\Delta T_1 - \Delta T_2\right\|_\mathbf{X}, \ \alpha = 1,2,$$

где $F_\alpha(\Delta T, f)$ – реализуемый обратной связью оператор (вообще говоря, нелинейный) $\mathbf{X} \to \mathbf{U}$, f – внешнее воздействие, действующее на обратную связь, **X** – пространство ограниченных функций ΔT: $\mathbf{L} \to \mathbf{Q}$ с нормой

$$\|\Delta T\|_{\mathbf{X}} = \sup_{\xi \in \mathbf{L}} \|\Delta T(\xi)\|_{\mathbf{Q}} .$$

в) Вычисление оценок для норм сужений операторов

(1.9) $\underline{R_{J_\xi P}}$, $J = H, S$,

имеющих передаточные функции

(1.10) $R_{J_\xi P} = \dfrac{J_\xi}{P} = \dfrac{a_1}{k} R_{J_\xi D}$

на пространство **U** и рассматриваемых как операторы $\mathbf{U} \to \mathbf{Q}$. Как видно из выражений для L_X, m_α и $\mathrm{N}_{\mathrm{J},\mathbf{U}}$ эти оценки необходимы для определения (по достаточности) класса **FB** обратных связей, для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы.

2. Исследование полюсов функций $R_{J_\xi P}$ $(J = H, S)$

Введём в рассмотрение функцию $h(\tau) = \sin\tau / \tau$ вещественного переменного τ. Так как функция h – чётная, достаточно считать τ положительным.

В интервалах $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$ $(n \geq 1)$ функция h принимает отрицательные значения и имеет минимумы в точках $\bar{\tau}_n$, являющихся решениями уравнения $\tau = \operatorname{tg}\tau$; точка $\bar{\tau}_n$ располагается в интервале $\mathbf{J}_n = (\pi(2n - 1), \pi(2n - 0.5))$. Минимальное значение функции h в интервале $\mathbf{I}_n$:

(2.1) $$\bar{h}_n = \min_{\mathbf{J}_n} \frac{\sin\tau}{\tau} = h(\bar{\tau}_n) = \cos\bar{\tau}_n = -\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\tau}_n^2}} .$$

Обозначим через N_γ наибольшее из чисел n, для которых $\gamma \geq \bar{h}_n$ (если $\gamma < \bar{h}_1$, считаем $N_\gamma = 0$), через $h^* - \bar{h}_{N_\gamma} = h(\bar{\tau}_{N_\gamma})$, через $\tau^* - \bar{\tau}_{N_\gamma}$.

Т е о р е м а 1. *При любом* $\gamma \in (\bar{h}_1, 0)$ *в области* $\hat{\mathbf{C}}$ *функция* $\hat{P}(\hat{\zeta})$ *имеет* $2N_\gamma$ *простых чисто мнимых нулей вида* $\hat{\zeta}_{nk}^0 = i\tau_{nk}$ *(k = 1, 2), где* τ_{nk} *– решения уравнения*

(2.2) $$\frac{\sin\tau}{\tau} = \gamma ,$$

находящиеся в интервале $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$, *а при* $\gamma = h^*$, *где*

$$h^* = \overline{h}_{N_\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}, \quad \tau^* = \overline{\tau}_{N_\gamma} ,$$

функция $\hat{P}$ *имеет нуль 2-го порядка* $\zeta^* = i\tau^*$. *Этим нулям при* $\gamma \in (\overline{h}_1, 0)$ *соответствуют простые вещественные отрицательные нули*

(2.3) $$p_{nk} = -\left(\frac{\tau_{nk}}{\alpha l}\right)^2$$

функций P и D, а при $\gamma = h^*$ *– нуль 2-го порядка*

(2.4) $$p^* = -\left(\frac{\tau^*}{\alpha l}\right)^2 .$$

Кроме того, функция $\hat{P}$ *при любом* $\gamma < 0$ *имеет в* $\hat{\mathbf{C}}$ *счётное число пар простых комплексных нулей вида* $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 \pm i\tau_n^0$, *у которых* $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{M}_n$, $\mathbf{M}_n = (\pi(2n-1), \overline{\tau}_n)$, $n \ge N_\gamma + 1$. *Этим парам нулей функции* $\hat{P}(\hat{\zeta})$ *соответствуют пары сопряжённых комплексных нулей*

(2.5) $$p_n^0 = \left(\frac{\zeta_n^0}{\alpha l}\right)^2$$

функции P(p). При $\gamma > \tilde{\gamma}_1 = -4.5697$ *все нули функции* $\hat{P}$ *удовлетворяют условию* $|\operatorname{Re}\zeta_{nk}^0| < |\operatorname{Im}\zeta_{nk}^0|$, *поэтому все нули функции P(p) располагаются в полуплоскости* $\mathbf{C}^- = \{p\colon \operatorname{Re} p < 0\}$. *Если же* $\gamma < \tilde{\gamma}_1$, *то P(p) приобретает такие нули вида* $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 \pm i\tau_n^0$, *у которых* $\sigma_n^0 \ge \tau_n^0$, *что означает неустойчивость объекта управления.*

Доказательство теоремы см. в Приложении (см. П1).

Исходя из требования устойчивости объекта и опираясь на теорему 1, в дальнейшем будем полагать $\gamma > \tilde{\gamma}_1$. Как показывают вычисления, минимумы функции $h(\tau)$ в первых трех интервалах $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ достигаются в точках

$$\bar{\tau}_1 = 4{,}49341\,, \quad \bar{\tau}_2 = 10{,}90412\,, \quad \bar{\tau}_3 = 17{,}22076$$

и, соответственно, равны

$$\bar{h}_1 = -0{,}21723\,,\ \bar{h}_2 = -0{,}09133\,,\ \bar{h}_3 = -0{,}05797\,.$$

Поэтому при $|\gamma| > 0{,}21723$ функция $\hat{P}$ не имеет чисто мнимых нулей ($N_\gamma = 0$), а функция P, соответственно, не имеет вещественных нулей. При $0{,}01933 < |\gamma| \leq 0{,}21723$ имеем $N_\gamma = 1$. При меньших значениях $|\gamma|$ величину N_γ можно оценить следующим образом:

Т е о р е м а 2. *При* $|\gamma| < 0{,}0194$ *величина* N_γ *находится в диапазоне*

$$N_\gamma \in \left(\frac{1}{2\pi|\gamma|} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2\pi|\gamma|} + \frac{1}{2} \right). \tag{2.6}$$

Если при этом

$|\gamma| \in \mathbf{\Gamma}_1 = (|\bar{h}_{N_\gamma+1}|, 1/\rho_{N_\gamma}]$, *где* $\rho_{N_\gamma} = \pi(2N_\gamma - 0{,}5)$, *то*

$$N_\gamma = \operatorname{int}\left(\frac{1}{2\pi|\gamma|} + \frac{1}{4} \right), \tag{2.7}$$

где $\operatorname{int}(x)$ − *целая часть числа* x.

Если же $|\gamma| \in \mathbf{\Gamma}_2 = (1/\rho_{N_\gamma}, h^*]$, где $h^* = |\bar{h}_{N_\gamma}|$, *то*

$$N_\gamma = \operatorname{int}\left(\frac{1}{2\pi|\gamma|} + \frac{1}{2} \right). \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы см. в Приложении, п. П2.

3. *Разложение операторов на составляющие по полюсам их передаточных функций* $R_{J_\xi P}$ ($J = H, S$)

Введём в рассмотрение функции

(3.1) $\quad F_J = \dfrac{R_{J_\xi P}}{\Theta}, \quad J = H, S,$

где Θ (*p*) = *θp*, *θ* – см. раздел 1, и систему $\{\mathbf{G}_n, n \geq 1\}$ окружностей

(3.2) $\quad \mathbf{G}_n = \{p \in \mathbf{C} : |\, p\,| = \rho_n^2 / (\alpha l)^2\}$, где $\rho_{N_\gamma} = \pi(2N_\gamma - 1/2)$.

Л е м м а. *Значения функций* F_J ($J = H, S$) *на окружностях* $\mathbf{G}_n$ *стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Доказательство леммы дано в Приложении, п.П3. Лемма позволяет применить к функциям F_J теорему Коши [3, п. 71]:

Т е о р е м а 3. *Функция* F_J *представима в виде суммы ряда, составленного из главных частей её разложений в ряд Лорана в окрестностях полюсов* p_n^0 ($n \geq 1$):

(3.3) $\quad F_J = W_{J0} + W_{J\,\mathrm{r}} + \widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,N_\gamma} + W_J^* + W_{J\mathbf{c}},$

где $W_{J0}(p) = \dfrac{C_{J0}}{p}$, $\; W_{J\,\mathrm{r}} = \sum\limits_{n=1}^{N_\gamma - 1} \widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}$,

$\widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}(p) = \sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}}$, *где* $n = 1 \div N_\gamma$,

$$W_J^*(p) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \gamma \in (\overline{h}_{N_{\gamma+1}}, h^*), \\ \dfrac{C_{J1}^*}{p - p^*} + \dfrac{C_{J2}^*}{(p - p^*)^2} & \textit{при} \quad \gamma = h^*, \end{cases}$$

$$W_{J\mathbf{c}}(p) = \sum_{n = N_\gamma + 1}^{\infty} \left(\frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\overline{C}_{Jn}^0}{p - \overline{p}_n^0} \right),$$

$p \in \mathbf{C}$, p_{nk}, p_n^0, p^*, h^* – *см. формулировку теоремы* 1.

$$C_{H0} = \frac{1}{\theta(\gamma - 1)},\; C_{S0} = \frac{\alpha l}{\theta^{3/2}} \frac{\xi}{l} \frac{1}{\gamma - 1},\; C_{Hnk} = \frac{2}{\theta} \frac{\cos((\xi/l)\tau_{nk})}{\gamma + s_{nk}\sqrt{1 - \gamma^2 \tau_{nk}^2}},$$

$$C_{Snk} = \frac{2\alpha l}{\theta^{3/2}} \frac{\sin((\xi/l)\tau_{nk})}{\tau_{nk}(\gamma + s_{nk}\sqrt{1 - \gamma^2 \tau_{nk}^2})},$$

$s_{n1} = 1 \ \textit{при} \ n \in [1, N_\gamma]$, $\ s_{n2} = -1 \ \textit{при} \ n \in [1, N_\gamma - 1]$,

$s_{N_\gamma 2} = sign(|\gamma| - 1/\rho_{N_\gamma})$,

$$C^*_{H1} = \frac{4}{\tau^*\theta}\sqrt{1+(\tau^*)^2}\left(\frac{\cos((\xi/l)\tau^*)}{3\tau^*} - \frac{\xi}{l}\sin((\xi/l)\tau^*)\right),$$

$$C^*_{S1} = \frac{4\alpha l}{(\tau^*)^2}\frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{\theta^{3/2}}\left(\frac{4}{3}\frac{\sin((\xi/l)\tau^*)}{\tau^*} - \frac{\xi}{l}\cos((\xi/l)\tau^*)\right),$$

$$C^*_{H2} = \frac{8}{(\alpha l)^2\theta}\cos((\xi/l)\tau^*)\sqrt{1+(\tau^*)^2},$$

$$C^*_{S2} = \frac{8}{\alpha l\theta^{3/2}}\frac{\sin((\xi/l)\tau^*)}{\tau^*}\sqrt{1+(\tau^*)^2},$$

$$C^0_{Hn} = \frac{2}{\theta}\frac{\mathrm{ch}((\xi/l)\zeta^0_n)}{\gamma - \mathrm{ch}\,\zeta^0_n}, \quad C^0_{Sn} = \frac{2\alpha l}{\theta^{3/2}}\frac{\mathrm{sh}((\xi/l)\zeta^0_n)}{\zeta^0_n(\gamma - \mathrm{ch}\,\zeta^0_n)},$$

Доказательство теоремы дано в Приложении, п. П4

Из (3.3) следуют разложения для функций $R_{J_\xi P}$ ($J = H, S$):

(3.4) $$R_{J_\xi P} = C_{J0}\theta + \Theta(W_{J\mathrm{r}} + \widetilde{W}_{J\mathrm{r}N_\gamma} + W^*_J + W_{J\mathbf{c}}).$$

Функции $C_{J0}\theta$, $\widetilde{W}_{J\mathrm{r}n}$ ($n = 1 \div N_\gamma$), $W_{J\mathrm{r}}$, W^*_J и $W_{J\mathbf{c}}$ являются соответственно передаточными функциями операторов

$\underline{C_{J0}\theta}$, $\underline{\widetilde{W}_{J\mathrm{r}n}}$ ($n = 1 \div N_\gamma$), $\underline{W_{J\mathrm{r}}}$, $\underline{W^*_J}$ и $\underline{W_{J\mathbf{c}}}$;

эти операторы входят в пространство **B** ограниченных операторов **Q** → **Q** (см. раздел 1). Норма оператора с передаточной функцией $C_{J0}\,\theta$ в пространстве **B** равна, естественно, $C_{J0}\,\theta$. Оператор с передаточной функцией Θ, который пропорционален оператору обобщённого дифференцирования, входит в пространство $\mathbf{B}_1$ операторов $\mathbf{Q}_1$ → **Q** ($\mathbf{Q}_1$ – см. раздел 1), и его норма в пространстве $\mathbf{B}_1$ равна 1.

Ниже будут рассмотрены вопросы вычисления или оценки норм остальных операторов с передаточными функциями, входящими в правую часть (3.14).

4. Вычисление норм операторов $\underline{\widetilde{W}_{J\,\text{г}\,n}}$ ($n \le N_\gamma,\ J = H, S$) и оценка норм операторов $\underline{W_{J\,\text{г}}}$

Т е о р е м а 4. *Нормы операторов* $\underline{\widetilde{W}_{J\,\text{г}\,n}}$ $(n = 1 \div N_\gamma)$ *в пространстве* **B** *вычисляются следующим образом*:

(4.1) $$\| \underline{W_{H\,\text{г}\,n}} \|_{\mathbf{B}} = \frac{2(\alpha l)^2}{\theta} \left| \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{Hk}}{b_k \tau_{nk}^2} \cos((\xi/l)\tau_{nk}) \right|,$$

(4.2) $$\| \underline{W_{S\,\text{г}\,n}} \|_{\mathbf{B}} = \frac{2(\alpha l)^3}{\theta^{3/2}} \left| \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{Sk}}{b_k \tau_{nk}^3} \sin((\xi/l)\tau_{nk}) \right|,$$

где $c_{Jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad Q_J \le 1, \\ 2Q_J^{-r_k} - 1 & \text{при} \quad Q_J > 1, \end{cases}$ $\quad k = 1, 2,\ \ r_k = \dfrac{\tau_{nk}^2}{\tau_{n2}^2 - \tau_{n1}^2}$,

$J = H, S,\ Q_H = -\dfrac{b_1}{b_2} \dfrac{\cos((\xi/l)\tau_{n2})}{\cos((\xi/l)\tau_{n1})},\ Q_S = -\dfrac{b_1}{b_2} \dfrac{\tau_{n1}}{\tau_{n2}} \dfrac{\sin((\xi/l)\tau_{n2})}{\sin((\xi/l)\tau_{n1})}$,

$b_k = \gamma + s_{nk}\tau_{nk}\sqrt{\tau_{nk}^2 - \gamma^2}$, s_{nk} – *см. формулировку теоремы* 3; *значения* τ_{n1}, τ_{n2} ($\tau_{n1} \in \mathbf{M}_n = (\pi(2n-1), \bar{\tau}_n)$, $\tau_{n2} \in \mathbf{L}_n = (\bar{\tau}_n, 2\pi n)$) *вычисляются путем численного решения уравнения* (2.2) *в интервалах* $\mathbf{M}_n$ *и* $\mathbf{L}_n$.

Доказательство теоремы дано в Приложении (см. П5).

Т е о р е м а 5. *При* $|\gamma| < 0.04$ *нормы операторов* $\underline{W_{J\,\text{г}}}$ ($J = H, S$) *в пространстве* **B** *могут быть оценены сверху с помощью следующих соотношений*:

(5.1) $$\| \underline{W_{J\,\text{г}}} \|_{\mathbf{B}} < k_J (M_{J1} + M_{J2}),$$

где

$$k_H = \frac{2}{\theta} \frac{(\alpha l)^2}{\pi^2},\ k_S = \frac{2}{\theta^{3/2}} \frac{(\alpha l)^3}{\pi^3} \mu_{N_\gamma},\ \mu_{N_\gamma} = \min\left(1, \left|2\pi(N_\gamma - 1)\xi / l\right|\right),$$

$$M_{H2} = \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{4N_\gamma - 5}\right),\ M_{S2} = \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{11}{27} - \frac{1}{(4N_\gamma - 5)^2}\right),$$

$$M_{J1}=r_J+m_{J1}+m_{J2}\,,\quad r_J=\begin{cases}0 & \textit{при}\quad n_J=N_\gamma-1,\\ \dfrac{\pi(2n_J+3/2)}{(2n_J+1)^{\beta_J}} & \textit{при}\quad n_J\le N_\gamma-2,\end{cases}$$

$$n_H=\operatorname{int}\left(\frac{1-2\pi\gamma+\sqrt{1-4\pi\gamma}}{|8\pi\gamma|}\right),\quad n_S=\operatorname{int}\left(\frac{2-3\pi\gamma+\sqrt{4-6\pi\gamma}}{|12\pi\gamma|}\right),$$

$$\beta_H=2\,,\quad \beta_S=3\,,$$

$$m_{J1}=\frac{2}{3\pi+2\gamma}+\frac{B_J}{2}\ln\frac{2+3\pi\gamma}{2+(4n_J-1)\pi\gamma}+$$

$$+\frac{A_{J1}}{2}\ln(2n_J-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\beta_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(1-\frac{1}{(2n_J-1)^i}\right),$$

$m_{J2}=0$ *при* $n_J\ge N_\gamma-2$, *а в случае* $n_J\le N_\gamma-3$

$$m_{J2}=\frac{\pi(4N_\gamma-5)}{(2N_\gamma-3)^{\beta_J}(2+\pi\gamma(4N_\gamma-5)}+$$

$$+\frac{B_J}{2}\ln\frac{2+\pi\gamma(4n_J+7)(4n_J+7)}{2+\pi\gamma(4N_\gamma-5)}+\frac{A_{J1}}{2}\ln\frac{4N_\gamma-5}{4n_J+7}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\beta_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(\frac{2^{i-2}}{(4n_J+7)^{i-1}}-\frac{2^{i-2}}{(4N_\gamma-5)^{i-1}}\right),$$

$$n_H=\operatorname{int}\left(\frac{1+2\pi|\gamma|+\sqrt{1+4\pi|\gamma|}}{8\pi|\gamma|}\right),$$

$$n_S=\operatorname{int}\left(\frac{2+3\pi|\gamma|+\sqrt{4+6\pi|\gamma|}}{12\pi|\gamma|}\right),$$

$$B_H=\left(\frac{\pi}{a_\gamma}\right)^2,\quad B_S=\left(\frac{\pi}{a_\gamma}\right)^3\gamma^2,\quad A_{H1}=\frac{\pi}{a_\gamma^2},\ A_{H2}=A_{S3}=\frac{\pi}{2a_\gamma},$$

$$A_{S1}=\frac{\pi^2|\gamma|}{a_\gamma^3},\ A_{S2}=\frac{\pi|\gamma|}{a_\gamma^2},\ \ a_\gamma=1+\frac{\pi}{2}\gamma\,,\ \beta_H=2\,,\ \beta_S=3\,.$$

Доказательство теоремы см. в Приложении П.6.

5. Вычисление норм операторов $\underline{W_J^*}$ $(J = H, S)$

Т е о р е м а 6. *Нормы операторов с передаточной функцией* W_J^* $(J = H, S)$ *в пространстве* **B** *вычисляются следующим образом*:

(5.1) $\quad \| \underline{W_J^*} \|_{\mathbf{B}} = a_{J1} + a_{J2} b_J$,

где $a_{H1} = \dfrac{4(\alpha l)^2}{(\tau^*)^3} \sqrt{1+(\tau^*)^2} \left(\dfrac{7}{3} \cos((\xi/l)\tau^*) + \dfrac{\xi}{l} \sin((\xi/l)\tau^*) \right)$,

$$a_{H2} = -16 \frac{(\alpha l)^2}{(\tau^*)^4} \sqrt{1+(\tau^*)^2} \cos((\xi/l)\tau^*),\ e_H = \frac{1}{3} + \frac{\xi}{l} \tau^* \operatorname{tg}((\xi/l)\tau^*),$$

$$b_H = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad e_H \ge 0, \\ \exp(-|e_H|/2) & \text{\textit{при}} \quad e_H < 0, \end{cases}$$

$$a_{S1} = \frac{4(\alpha l)^3}{(\tau^*)^4 \sqrt{\theta}} \sqrt{1+(\tau^*)^2} \left(\frac{10}{3} \frac{\sin((\xi/l)\tau^*)}{\tau^*} - \frac{\xi}{l} \cos((\xi/l)\tau^*) \right),$$

$$a_{S2} = -16 \frac{(\alpha l)^3}{(\tau^*)^5 \sqrt{\theta}} \sqrt{1+(\tau^*)^2} \sin((\xi/l)\tau^*),$$

$$e_S = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - \dfrac{\xi}{l} \dfrac{\tau^*}{2} \operatorname{ctg}((\xi/l)\tau^*) & \text{\textit{при}} \quad \xi > 0, \\ \dfrac{1}{6} & \text{\textit{при}} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

$$b_S = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad e_S \ge 0, \\ \exp(-e_S) & \text{\textit{при}} \quad e_S < 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы дано в Приложении, п. П7.

6. Оценка норм операторов $\underline{W_{J\mathbf{c}}}$ $(J = H, S)$

Т е о р е м а 7. *Нормы операторов с передаточной функцией* $W_{J\mathbf{c}}$ $(J = H, S)$ *в пространстве* **B** *оцениваются сверху следующим образом*:

1) *при* $|\gamma|< g_1 = 1\big/\sqrt{\pi^2-1} \approx 0{,}3358$

$$\text{(6.1)} \qquad \|\underline{W_{\mathbf{Jc}}}\|_{\mathbf{B}} \le \frac{4(\alpha l)^2}{\theta}\frac{1}{\vartheta_{N_\gamma+1}}\left|\frac{J_\xi(\zeta^0_{N_\gamma+1})}{(\gamma-\operatorname{ch}\,\zeta^0_{N_\gamma+1})}\right| +$$

$$+\frac{4(\alpha l)^2}{\theta} a_J\,|\gamma|\left(\frac{\mu_{1J}}{\Phi_\gamma(N_\gamma+2)}+\widetilde{I}_{1J}\right),$$

где $\zeta^0_n = \sigma^0_n + i\tau^0_n$ *− нуль функции* $\hat{P}$ (*см.* (1.4)), *лежащий в полосе* $\{\sigma+i\tau\in\hat{\mathbf{C}}:\sigma>0,\tau\in\mathbf{J}_n\}$:

$\zeta^0_n \in \{\sigma+i\tau\in C:\sigma>0,\tau\in\mathbf{J}_n=(2\pi(n-1),\pi(2n-0{,}5))\}$,

$\vartheta_n = (\tau^0_n)^2-(\sigma^0_n)^2$, $H_\xi(p)=\operatorname{ch}((\xi/l)\zeta)$, $S_\xi(p)=\dfrac{\alpha l}{\sqrt{\theta}\zeta}\operatorname{sh}((\xi/l)\zeta)$,

$a_H=\pi$, $a_S=\alpha l\big/\sqrt{\theta}$, $n_\gamma = 2N_\gamma+3$,

$\mu_{1H}=n_\gamma$, $\mu_{1S}=1$, $\Phi_\gamma(n)=\Phi_{1\gamma}(n)\Phi_{2\gamma}(n)$,

$\Phi_{1\gamma}(n)=\pi^2(2n-1)^2-2{,}7|\gamma|\sqrt{1+\pi^2(2n-1{,}5)^2}$,

$\Phi_{2\gamma}(n)=\gamma+\sqrt{\pi^2(2n-1)^2\gamma^2-1}$,

$$\widetilde{I}_{1H}=\frac{\sqrt{1+\gamma^2}\,\Lambda(n_\gamma)}{2\pi^2\gamma^2\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}+\frac{27a_\gamma}{\pi^2 b_\gamma}\left(\frac{2\varphi(N_\gamma)}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}+\gamma\right),$$

$n_\gamma = 2N_\gamma+3$, $\varphi(N_\gamma)=\pi n_\gamma-\sqrt{1+\pi^2(2N_\gamma+2{,}5)^2}$,

$b_\gamma=\sqrt{2{,}7|\gamma|(4\varphi(N_\gamma)-2{,}7|\gamma|)}$, $a_\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{b_\gamma}{2\pi n_\gamma+2{,}7\gamma}$,

$y_\gamma=\dfrac{1}{\pi\gamma}\sqrt{1+\gamma^2}$, $\Lambda(n_\gamma)=\ln\dfrac{\sqrt{\widetilde{\alpha}_\gamma(n_\gamma)}}{\pi(n_\gamma-y_\gamma)}$,

$\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)=2{,}7\pi|\gamma|\varphi(N_\gamma)+(1+\gamma^2)/\gamma^2-2{,}7\sqrt{1+\gamma^2}$

$\widetilde{\alpha}_\gamma(n_\gamma)=(\pi n_\gamma)^2-2{,}7|\gamma|\sqrt{1+\pi^2(2N_\gamma+2{,}5)^2}$

2) *при* $|\gamma|\in[g_1,|\widetilde{\gamma}_1|))$

$$(6.2)\qquad \left\|\underline{W_{J\text{c}}}\right\|_{\mathbf{B}} \le \frac{4(\alpha l)^2}{\theta}\left(+a_J|\gamma|\left(\sum_{n=p_\gamma+1}^{k_\gamma} m_{2Jn}+\widetilde{I}_{2J}\right)\right)\sum_{n=1}^{p_\gamma}\frac{1}{\vartheta_n}\left|\frac{\hat{J}_\xi\left(\zeta_n^0\right)}{\gamma-\operatorname{ch}\zeta_n^0}\right|.$$

Здесь $m_{2Jn}=\dfrac{\mu_{2Jn}}{\Phi_\gamma(n)}$, $\mu_{2Hn}=2n-1$, $\mu_{2Sn}=1$,

$$\widetilde{I}_{2H}=\frac{1}{\pi^2\sqrt{1+\gamma^2}}\ln\frac{l_\gamma}{l_\gamma-y_\gamma},$$

$$\widetilde{I}_{2S}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{|\gamma|}{1+\gamma^2}\ln\frac{l_\gamma}{l_\gamma-y_\gamma}+\frac{1}{\pi l_\gamma\sqrt{1+\gamma^2}}\right).$$

При этом пределы суммирования k_y *и* p_y *в формуле* (6.2) *зависят от величины следующим образом: представим множество значений* $|\gamma|$ *как объединение полуинтервалов*

$[g_1,|\widetilde{\gamma}_1|)=\bigcup_{i=1}^{5}[g_i,g_{i+1})$

с границами $g_2=0{,}38$, $g_3=1{,}49$, $g_4=2{,}65$, $g_5=3{,}8$, $g_6=|\widetilde{\gamma}_1|$.
Тогда если $|\gamma|\in[g_i,g_{i+1})\subset[g_1,\widetilde{\gamma}_1)$ при некотором i, *то* $k_\gamma=i$, *а*

$$p_\gamma=\begin{cases}0 & \textit{при}\quad |\gamma|\in[g_1,g_2),\\ 1 & \textit{при}\quad |\gamma|\in[g_2,g_4),\\ 2 & \textit{при}\quad |\gamma|\in[g_4,g_6).\end{cases}$$

Доказательство теоремы см. в Приложении (п. П8).

7. Заключение

Выполненное в разделах 4 – 6 исследование показывает ограниченность сужений операторов

$$\underline{W_{J\text{r}}},\ \widetilde{W}_{J\text{r}N_\gamma},\ \underline{W_J^*},\ \ \underline{W_{J\text{c}}}$$

на пространство **Q** как операторов **Q** → **Q** и даёт оценки сверху их норм. С учётом представления (3.14) для функций $R_{J_\xi P}$ это означает ограниченность сужений соответствующих им операторов на пространство $\mathbf{Q}_1$ (см. раздел 3) как операторов $\mathbf{Q}_1$ → **Q**, т.е. устойчивость исследуемого объекта по отношению к паре пространств ($\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}$) (см. [5], п. 2.2). Следовательно, роль пространства $\mathbf{U}$ управлений (см. раздел 1) может играть пространство $\mathbf{Q}_1$.

Полученные в разделах 4-6 оценки дают возможность определения класса **FB** обратных связей $u_\alpha = F_\alpha(\Delta T, f)$, для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы управления (см. раздел 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Доказательство теоремы 1.

а) Вещественных нулей функция $\hat{P}(\hat{\zeta})$ не имеет в силу выбора параметра γ ($\gamma < 0$). Рассмотрим вопрос о её чисто мнимых нулях. Так как минимумы $\overline{h}_n$ функции $h(\tau) = \sin\tau/\tau$ (см. пояснения к тереме 1) стремятся к нулю при $n \to \infty$, а

(П1.1) $\quad \hat{P}(i\tau) = \gamma - \dfrac{\sin\tau}{\tau} = \gamma - h(\tau)$,

то при любом $\gamma < 0$ функция $\hat{P}$ имеет лишь конечное число чисто мнимых нулей и вообще не имеет их при

$$\gamma < \overline{h}_1 = \cos\overline{\tau}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\overline{\tau}_1^2}}.$$

Так как $\gamma < 0$, при $n \le N_\gamma$ функция $\hat{P}$ имеет чисто мнимые нули в полосе $\mathbf{G}_n = \{\sigma + i\tau : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{I}_n\}$, где $\mathbf{I}_n = (\pi(2n-1), 2\pi n)$.

Если $\gamma > \overline{h}_n$, то $\hat{P}$ имеет пару простых мнимых нулей $i\tau_{nk}$: $\tau_{n1} \in \mathbf{M}_n = (\pi(2n-1), \overline{\tau}_n)$, $\tau_{n2} \in \mathbf{L}_n(\overline{\tau}_n, 2\pi n)$, τ_{nk} − решения уравнения $h(\tau) = \gamma$, $k = 1, 2$.

Если же $\gamma = h^*$ (см. теорему 1), где

(П1.2) $\quad h^* = \dfrac{\sin\tau^*}{\tau^*} = \min\limits_{\mathbf{I}_{N_\gamma}} \dfrac{\sin\tau}{\tau}$,

функция $\hat{P}$ имеет нуль $\zeta^* = i\tau^*$, а τ^* удовлетворяет уравнениям

$$(\text{П}1.3)\quad \begin{cases} \tau = \operatorname{tg}\tau, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \gamma \end{cases}.$$

Этот нуль 2-го порядка, ибо

$$(\text{П}1.4)\quad P'(i\tau^*) = i\frac{\tau^*\cos\tau^* - \sin\tau^*}{(\tau^*)^2} = 0,$$

$$(\text{П}1.5)\quad P''(i\tau^*) = -\cos\tau^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau^*)^2}} \neq 0.$$

б) Рассмотрим теперь вопрос о комплексных нулях функции $\hat{P}$. Пусть $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ – такой нуль функции $\hat{P}(\hat{\zeta})$, что $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in [2\pi(n-1), 2\pi n)$. В области $\mathbf{C}^+$ при $\sigma > 0$ Уравнение

$$(\text{П}1.6)\quad \hat{P}(\hat{\zeta}) = \gamma - \operatorname{sh}(\hat{\zeta}) \,/\, \hat{\zeta} = 0, \text{ где } \hat{\zeta} = \sigma + i\tau,$$

в области $\mathbf{C}^+$ при $\sigma > 0$ эквивалентно уравнению

$$\operatorname{sh}(\sigma + i\tau) - \gamma(\sigma + i\tau) = 0$$

или системам уравнений

$$(\text{П}1.7)\quad \begin{cases} \operatorname{Re}(\hat{\zeta}\hat{P}(\hat{\zeta})) = 0 \\ \operatorname{Im}(\hat{\zeta}\hat{P}(\hat{\zeta})) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sh}\sigma\cos\tau - \sigma\gamma = 0, \\ i\operatorname{ch}\sigma\sin\tau - i\tau\gamma = 0, \end{cases}$$

которые при приводимы к виду

$$(\text{П}1.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\sigma\cos\tau}{\sigma} - \gamma = 0, \\ \dfrac{\operatorname{tg}\tau}{\tau} - \dfrac{\operatorname{th}\sigma}{\sigma} = 0. \end{cases}$$

Введем функции двух переменных $Z(\sigma,\tau)$ и $G(\sigma,\tau)$:

$$(\text{П}1.9)\quad Z(\sigma,\tau) = \frac{\operatorname{sh}\sigma\cos\tau}{\sigma} - \gamma,\; G(\sigma,\tau) = \frac{\operatorname{tg}\tau}{\tau} - \frac{\operatorname{th}\sigma}{\sigma}.$$

Из выражений для функций Z и G видно, что эти функции чётны по τ. Поэтому далее мы будем искать нули лишь в первом открытом квадранте $\{\sigma > 0, \tau > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}^+$.

Если $\hat{P}(\sigma_n^0 + i\tau_n^0) = 0$, σ_n^0 и τ_n^0 должны удовлетворять уравнениям системы (П1.8), т.е.

(П1.10) $Z(\sigma_n^0, \tau_n^0) = 0$,

(П1.11) $G(\sigma_n^0, \tau_n^0) = 0$.

Отсюда с учетом неравенств $\gamma < 0$, $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 > 0$ следует, что $\cos\tau_n^0 < 0$, $\sin\tau_n^0 < 0$, т. е. $\tau_n^0 \in \mathbf{J}_n = (\pi(2n-1), \pi(2n-0{,}5))$.

Так как $\operatorname{th}\sigma / \sigma < 1$, из (П1.11) следует, что $\tau_n^0 > \operatorname{tg}\tau_n^0$, т.е. $\tau_n^0 \cos\tau_n^0 - \sin\tau_n^0 < 0$ и $h'(\tau_n^0) < 0$.

Поэтому τ_n^0 лежит в $\mathbf{M}_n = (\pi(2n-1), \bar{\tau}_n)$ − интервале убывания функции *h:* $\tau_n^0 < \bar{\tau}_n$. Так как $\bar{\tau}_n \in \mathbf{J}_n$, то $|\cos\tau_n^0| > |\cos\bar{\tau}_n| = |\bar{h}_n|$.

Учтя, что $\operatorname{sh}\sigma > \sigma$, из (П1.10) получаем: $|\gamma| > |\cos\tau_n^0|$. Поэтому

(П1.12) $|\gamma| > |\cos\tau_n^0| > |\cos\bar{\tau}_n| = |\bar{h}_n|$.

Следовательно, при $n \le N_\gamma$ (т.е. если $\gamma \ge \bar{h}_n$) функция $\hat{P}$ не имеет нулей в полосе $\{\sigma + i\tau : \sigma > 0, \tau \in [2\pi(n-1), 2\pi n)\}$.

в) Итак, если $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ − ноль функции $\hat{P}$ и $\sigma_n^0 > 0$, то $n > N_\gamma$, $|\bar{h}_n| < |\gamma|$, и $\zeta_n^0 \in \{(\sigma + i\tau) : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{M}_n)\}$.

Докажем теперь, что при любом $n > N_\gamma$, т.е. при $|\bar{h}_n| < |\gamma|$, в области $\mathbf{G}_n$ функция $\hat{P}$ имеет один и только один ноль.

В области $\mathbf{\Pi}_n = \{(\sigma, \tau) : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{J}_n)\} \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ уравнение (П1.10) неявно задает функцию $\tau = u(\sigma)$. Действительно, частные производные функции $Z(\sigma, \tau)$ всюду в $\mathbf{\Pi}_n$ отличны от 0, при этом

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = -\frac{\operatorname{sh}\sigma \sin\tau}{\sigma} > 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \sigma} = \frac{\sigma \operatorname{ch}\sigma - \operatorname{sh}\sigma}{\sigma^2}\cos\tau < 0.$$

Поэтому из теоремы о неявной функции следует, что заданная уравнением (П1.10) функция $\tau = u(\sigma)$ монотонно возрастает, стремясь при $\sigma \to \infty$ к $\tau = \pi(2n-0{,}5)$, так как $\cos(u(\sigma)) \to 0$. При $\sigma \to 0$ согласно (П1.10) $\cos(u(\sigma)) \to \gamma$, и так как по условию $|\gamma| > |\bar{h}_n| = |\cos\bar{\tau}_n|$, то

(П1.13) $\lim\limits_{\sigma \to 0} u(\sigma) < \bar{\tau}_n$.

Далее, частные производные функции $G(\sigma,\tau)$ (см. П1.11) в области $\mathbf{П}_n$ строго положительны:

(П1.14) $\dfrac{\partial G}{\partial \sigma} = \dfrac{-\sigma + \operatorname{sh}\sigma \operatorname{ch}\sigma}{\sigma^2 \operatorname{ch}^2 \sigma} > 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial \tau} = \dfrac{\tau - \sin\tau\cos\tau}{\tau^2\cos^2\tau} > 0$,

поэтому уравнение $G(\sigma,\tau) = 0$ в области $\mathbf{П}_n$ тоже неявно задает функцию $\tau = v(\sigma)$, которая монотонно убывает с ростом σ; при этом при $\sigma \to 0$ значения $v(\sigma)$ стремятся к $\bar{\tau}_n$, так как $\bar{\tau}_n = \operatorname{tg}\bar{\tau}_n$, а при $\sigma \to +\infty$ − к $\tau = \pi(2n-1)$. Из неравенств

$\lim\limits_{\sigma\to 0} u(\sigma) < \bar{\tau}_n = \lim\limits_{\sigma\to 0} v(\sigma)$, и

$\lim\limits_{\sigma\to\infty} v(\sigma) = \pi(2n-1) < \pi(2n-0{,}5) = \lim\limits_{\sigma\to\infty} u(\sigma)$

следует, что возрастающая функция $\tau = u(\sigma)$ и убывающая функция $\tau = v(\sigma)$ пересекаются в некоторой точке $(\sigma_n^0, \tau_n^0) \in \mathbf{П}_n$. Эта точка пересечения единственная в силу строгой монотонности этих функций. Отсюда и из выводов пункта **в)** этого раздела следует, что при $|\bar{h}_n| < |\gamma|$ функция $\hat{P}$ имеет один и только один ноль вида $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ в области $\mathbf{G}_n$.

г) Для устойчивости объекта необходимо, чтобы все нули функции D располагались в $\mathbf{C}^- = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p < 0\}$. Нули функции D, соответствующие чисто мнимым нулям функции $\hat{P}$, удовлетворяют этому требованию; для комплексных нулей, наличие которых установлено в п. **в**, это условие означает необходимость выполнения неравенства:

(П1.15) $\operatorname{Re}\zeta_n^0 < |\operatorname{Im}\zeta_n^0|$

При любом σ число $\sigma + iv(\sigma)$ (см. п. **в**) является нулём функции $\hat{P}$, если значение γ равно

(П1.16) $\gamma = \dfrac{\operatorname{sh}\sigma\cos(v(\sigma))}{\sigma}$.

Из этого равенства следует, что $|\gamma(\sigma)|$ монотонно растет при $\sigma \to \infty$, так как значения убывающей функции $\tau = v(\sigma)$ лежат в интервале $\mathbf{J}_n$, где $|\cos\tau|$ монотонно растет при убывании τ, а, следовательно, $|\cos(\nu(\sigma))|$, как и отношение $\operatorname{sh}\sigma/\sigma$, монотонно растет с ростом σ.

Поскольку при фиксированном n отношение $\nu(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает при $\sigma \to \infty$, стремясь к нулю, при некотором значении σ, которое обозначим как $\tilde{\sigma}_n$, выполняется равенство

$\nu(\tilde{\sigma}_n) = \tilde{\sigma}_n$.

Это значение можно найти из (П1.8) как решение уравнения

(П1.17) $\operatorname{th}\tilde{\sigma}_n = \operatorname{tg}\tilde{\sigma}_n$

в интервале $\mathbf{J}_n$. Число $\tilde{\sigma}_n + i\tilde{\sigma}_n$ будет нулем функции $\hat{P}$, если

(П1.18) $\gamma = \tilde{\gamma}_n = \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{\sigma}_n \cos\tilde{\sigma}_n}{\tilde{\sigma}_n}$.

В силу монотонной зависимости γ от σ лежащий в области $\mathbf{G}_n$ нуль функции $\hat{P}$

$\sigma_n^0 + i\tau_n^0 = \sigma_n^0 + i\nu_n(\sigma_n^0)$,

удовлетворяет требованию (П1.15) лишь при

(П1.19) $|\gamma| < |\tilde{\gamma}_n|$,

так как тогда $\sigma_n^0 < \nu_n(\sigma_n^0)$, а $\sigma_n^0 \geq \nu_n(\sigma_n^0)$ при $|\gamma| \geq |\tilde{\gamma}_n|$.

Из (П1.17) и (П1.16) следует, что $\tilde{\gamma}_n$ монотонно возрастает с ростом n. Поэтому, если при $n = 1$ неравенство (П1.19) выполняется, то оно справедливо для любого n.

Следовательно, выполнение условия (П1.15) для всех нулей функции $\hat{P}$ (что необходимо для устойчивости объекта) имеет место лишь для значений γ, строго больших величины $\tilde{\gamma}_1$. Из (П1.17) и (П1.18) находим численные значения $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\gamma}_1$:

(П1.20) $\tilde{\sigma}_1 = 3{,}9266$, $\tilde{\gamma}_1 = -4{,}5687$.

Теорема 1 доказана.

П2. Доказательство теоремы 2.

Введём обозначение $\rho_n = \pi(2n - 0{,}5)$. Так как

(П2.1) $h(\rho_n) = -1/\rho_n$,

то $|\bar h_n| > 1/\rho_n$.

С другой стороны (см. (2.1)),

(П2.2) $\quad |\bar h_n| = 1\Big/\sqrt{1+\bar\tau_n^2} < 1/\pi(2n-1)$,

поэтому

$$\frac{1}{\rho_{N_\gamma+1}} < |\bar h_{N_\gamma+1}| < \frac{1}{\pi(2N_\gamma+1)} < \frac{1}{\pi(2N_\gamma-0{,}5)} < |\bar h_{N_\gamma}| < \frac{1}{\pi(2N_\gamma-1)}.$$

Отсюда, если $|\gamma| \in (\bar h_{N_\gamma+1}, \bar h_{N_\gamma}]$, то

$$\frac{1}{\pi(2N_\gamma+1{,}5)} < |\bar h_{N_\gamma+1}| < |\gamma| \le |\bar h_{N_\gamma}| < \frac{1}{\pi(2N_\gamma-1)};$$

следовательно,

(П2.3) $\quad N_\gamma \in \left(\dfrac{1}{2\pi\gamma} - 0{,}75, \dfrac{1}{2\pi\gamma} + 0{,}5\right)$,

что допускает два возможных значения для N_γ.

Если же

(П2.4) $\quad \gamma \in \mathbf{\Gamma}_1 = (1/\rho_{N_\gamma}, |\bar h_{N_\gamma}|]$,

то $\dfrac{1}{\pi(2N_\gamma-0{,}5)} < |\gamma| < \dfrac{1}{\pi(2N_\gamma-1)}$,

т.е. $N_\gamma - 0{,}5 < \dfrac{1}{2\pi|\gamma|} < N_\gamma - 0{,}25$.

Поэтому

$$N_\gamma \in \left(\frac{1}{2\pi|\gamma|} + 0{,}25, \frac{1}{2\pi|\gamma|} + 0{,}5\right),$$

откуда следует, что

$$N_\gamma \in \operatorname{int}\left(\frac{1}{2\pi\gamma} + 0{,}5\right).$$

Если

(П2.5) $\quad \gamma \in \mathbf{\Gamma}_2 = (|\bar h_{N_\gamma+1}|, 1/\rho_{N_\gamma}]$,

то

$$\frac{1}{\pi(2N_\gamma - 0{,}5)} \le |\gamma| < \frac{1}{\pi(2N_\gamma + 1{,}5)},$$
поэтому
$$N_\gamma \in \left(\frac{1}{2\pi|\gamma|} - 0{,}75\,, \frac{1}{2\pi|\gamma|} + 0{,}25 \right],$$
откуда следует, что
$$N_\gamma \in \operatorname{int}\left(\frac{1}{2\pi\gamma} + 0{,}25 \right).$$

Теорема 2 доказана.

П3. Доказательство леммы.

Рассмотрим функции

(П3.1) $$F_H = \frac{R_{H_\xi P}}{\theta p} = \frac{H_\xi}{P(p)}, \quad F_S = \frac{R_{S_\xi P}}{\theta p} = \frac{S_\xi}{P(p)}.$$

Оценим модули функций $|R_{J_\xi P}|$ ($J = H$, S, см. (1.10))

(П3.2) $$|R_{H_\xi P}| = \left| \frac{\operatorname{ch}((\xi/l)\alpha l\sqrt{p})}{P(p)} \right| \le \frac{|\zeta||\operatorname{ch}(\zeta)|}{||\gamma|\zeta + \operatorname{sh}\zeta|} \le \frac{|\zeta||\operatorname{ch}\sigma|}{||\gamma|\zeta + \operatorname{sh}\zeta|},$$

(П3.3) $$|R_{S_\xi P}| = \left| \frac{\operatorname{sh}((\xi/l)\alpha l\sqrt{p})}{\sqrt{\theta p}P(p)} \right| \le \frac{\alpha l|\operatorname{ch}\sigma|}{\sqrt{\theta}||\gamma|\zeta + \operatorname{sh}\zeta|}$$

где $\zeta = \alpha l\sqrt{p} = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}$.

Из (П3.2)-(П3.3) следует, что лемма справедлива, если функция

(П3.4) $$f(\zeta) = \left| \frac{|\gamma|\zeta}{\operatorname{ch}\sigma} + \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\sigma} \right|$$

при $n \to \infty$ равномерно ограничена на полуокружностях
$\mathbf{\Gamma}_n = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| = r_n = 2\pi n + 0{,}5\pi, \arg\zeta \in (-\pi/2, \pi/2]\}$,
так как отсюда следует, что при $n \to \infty$ модули F_H и F_S равномерно стремятся к нулю на системе окружностей $\{ \mathbf{G}_n \}$.

Обозначим через M, $M1$ и $M2$ модули следующих функций:

(П3.5) $M(\zeta)=\left|\dfrac{\zeta\,|\gamma|}{\operatorname{ch}\sigma}+\dfrac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\sigma}\right|$,

(П3.6) $M_1(\zeta)=\left|\dfrac{\zeta\,|\gamma|}{\operatorname{ch}\sigma}\right|=\dfrac{r_n\,|\gamma|}{\operatorname{ch}\sigma}$, $M_2(\zeta)=\left|\dfrac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\sigma}\right|$.

Заметим, что справедливы неравенства:

(П3.7) $\operatorname{th}\sigma\le M_2(\zeta)$, $M\ge|M_2-M_1|$.

Нужно показать, что существует такое целое N, что для любого $n>N$ выполняется неравенство $M\ge m$, где m − некоторое число, большее нуля. В силу четности M по σ и τ, достаточно рассмотреть только дугу окружности, лежащую в I-й четверти комплексной плоскости (т.е. если $0\le\sigma\le r_n$).

Сначала оценим величину $M(\zeta)$ в такой точке $\zeta_n=\sigma_n+i\,\tau_n$ дуги $\mathbf{\Gamma}_n$, в которой $\tau_n=r_n-0{,}5\pi$. Точка ζ_n делит рассматриваемую четверть окружности на две дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ и $\mathbf{\Gamma}_{n2}$:

$\mathbf{\Gamma}_{n1}=\{\zeta:\ \zeta\in\mathbf{\Gamma}_n,\operatorname{Im}\zeta\le\tau_n\}$, $\mathbf{\Gamma}_{n2}=\{\zeta:\ \zeta\in\mathbf{\Gamma}_n,\operatorname{Im}\zeta>\tau_n\}$.

Действительная часть числа ζ_n равна

(П3.8) $\sigma_n=\sqrt{r_n^2-\tau_n^2}=\sqrt{r_n^2-(r_n-0{,}5\pi)^2}=\sqrt{\pi r_n-0{,}25\pi^2}$,

следовательно, если $n\to\infty$, то $\sigma_n\to\infty$.

Выберем числа m_1 и m_2 так, что $0<m_1<m_2<1$.

Из неравенств

(П3.9) $M_2(\sigma_n)=\sqrt{(\operatorname{sh}^2\sigma+\sin^2\tau)}\big/\operatorname{ch}\sigma\ge\operatorname{th}\sigma_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{th}\sigma_n=1$,

(П3.10) $\lim\limits_{n\to\infty}M_1(\zeta_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(r_n-0{,}5\pi)\,|\gamma|}{\operatorname{ch}\sqrt{\pi r_n-0{,}25\pi^2}}\right)=0$

следует существование таких целых N_1 и N_2, что $M_1(\zeta_n)<m_1$ при всех $n>N_1$, а $M_2(\zeta_n)\ge\operatorname{th}\sigma_n>m_2$ при всех $n>N_2$. Если же $n>\max(N_1,N_2)$, то

(П3.11) $M(\zeta_n)\ge M_2(\zeta_n)-M_1(\zeta_n)>m_2-m_1=m>0$

(например, выберем $m_1=0{,}25$ и $m_2=0{,}5$, тогда $m=0{,}25$).

Далее, в точках $\zeta=\sigma+i\tau$ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n2}$, лежащих ниже точки ζ_n (т.е. $\sigma>\sigma_n$), модуль $M_2(\zeta)\ge\operatorname{th}\sigma>\operatorname{th}\sigma_n>m_2$, а $M_1(\zeta)$ с ростом σ

убывает. Поэтому из (П3.11) следует, что для всех точек ζ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n2}$ при любом $n > \max(N_1, N_2)$ выполняется неравенство

(П3.12) $M(\zeta) \geq M_2(\zeta) - M_1(\zeta) > M_2(\zeta_n) - M_1(\zeta_n) > m$.

Оценим величину $M(\zeta)$ в точках дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$. Согласно (П3.5)

(П3.13) $M(\zeta) = \sqrt{\dfrac{(\sigma\,|\gamma\,| + \operatorname{sh}\sigma\cos\tau)^2 + (\tau\,|\gamma\,| + \operatorname{ch}\sigma\sin\tau)^2}{\operatorname{ch}^2\sigma}}$.

Заметим, что в точках дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ величины $\sin\tau$ и $\cos\tau$ положительны. Поэтому на $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ функция $M(\zeta)$ ограничена снизу положительной функцией, зависящей только от σ :

(П3.14) $M_n(\zeta) > \sqrt{\dfrac{r_n^2\,|\gamma\,|^2}{\operatorname{ch}^2\sigma} + \operatorname{th}^2\sigma}$.

Стоящая под корнем в (П3.14) функция

(П3.15) $g(\sigma) = \dfrac{r_n^2\,|\gamma\,|^2}{\operatorname{ch}^2\sigma} + \operatorname{th}^2\sigma$

с ростом σ убывает на дуге $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ при каждом n, превосходящем некоторое целое N_3, так как ее производная

$$g'(\sigma) = 2\frac{(1 - r_n^2\,|\gamma\,|^2)\operatorname{th}\sigma}{\operatorname{ch}^2\sigma} < 0$$

на $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ отрицательна, если $n \geq N_3 > 1/\,|\,\gamma\,|$. При $\sigma = 0$ (в точке ir_n) эта функция равна $(\gamma r_n)^2$, а в точке $\zeta_n = \sigma_n + i\tau_n$ она равна

$$g(\zeta_n) = \frac{r_n^2\,|\gamma\,|^2}{\operatorname{ch}^2\sigma_n} + \operatorname{th}^2\sigma_n > \operatorname{th}^2\sigma_n > m_2^2 \quad \text{(см. (П3.11)).}$$

Поэтому при $n \geq N_3$ во всех точках ζ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$:

(П3.16) $M(\zeta) > \sqrt{g(\zeta)} \geq \sqrt{g(\zeta_n)} > m_2 > m$.

Положим $n > N = \max(N_1, N_2, N_3)$.

Согласно (П3.16), (П3.12), при $n > N$ для всех точек $\mathbf{\Gamma}_n$ справедливо неравенство $M(\zeta) > m > 0$, т.е. функция $f(\zeta)$ равномерно ограничена на $\{\mathbf{\Gamma}_n\}$, откуда следует справедливость леммы.

П4. Доказательство теоремы 3

а) Так как

$$F_J = \frac{R_{J_\xi P}(p)}{\theta p} = \frac{\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p})}{\theta p\hat{P}(\alpha l\sqrt{p})},$$

,

из выражения для W_{J0} (см. пояснения к (3.3)) следует, что

(П4.1) $$C_{J0} = \operatorname*{res}_0 F_J = \frac{R_{J_\xi P}(0)}{\theta}$$

(см. [3, п. 23]). Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для C_{J0} ($J = H, S$).

б) Из выражения для $\widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}$ (см. там же) следует, что

(П4.2) $$C_{Jnk} = \operatorname*{res}_{p_{nk}} F_J = -i\frac{2\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p_{nk}})}{\theta\tau_{nk}\hat{P}'(i\tau_{nk})} = -\frac{2}{\theta}\frac{\hat{J}_\xi(i\tau_{nk})}{\tau_{nk}h'(\tau_{nk})} =$$

$$= \frac{2}{\theta}\frac{\hat{J}_\xi(i\tau_{nk})}{\gamma - \cos\tau_{nk}} = \frac{2}{\theta}\frac{\hat{J}_\xi(i\tau_{nk})}{\gamma + s_{nk}\sqrt{1-\gamma^2\tau_{nk}^2}}, \quad k = 1, 2, \quad J = H, S.$$

Здесь величина коэффициента s_{nk} определяется так:

$s_{n1} = 1$ при $n \in [1, N_\gamma]$, так как $\cos\tau_{n1} < \cos\bar{\tau}_n < 0$;

$s_{n2} = -1$ при $n \in [1, N_\gamma - 1]$, так как в точке τ_{n2} функция $|h(\tau)|$ убывает, но

(П4.3) $$|h(\tau_{n2})| < |h(\bar{\tau}_{n+1})| < \frac{1}{\bar{\tau}_{n+1}} < \frac{1}{\rho_n} = |h(\rho_n)|,$$

где $\rho_n = \pi(2n - 0{,}5)$, следовательно, $\tau_{n2} > \rho_n$ и $\cos\tau_{n1} > 0$;

$s_{N_\gamma 2} = \operatorname{sign}(|\gamma| - 1/\rho_{N_\gamma})$ (считая $\operatorname{sign}(0) = 0$), так как $\cos\tau_{N_\gamma 2} < 0$ при $\tau_{N_\gamma 2} \in (\bar{\tau}_{N_\gamma}, \rho_{N_\gamma})$, и $\cos\tau_{N_\gamma 2} > 0$ при $\tau_{N_\gamma 2} \in (\rho_{N_\gamma}, 2\pi n)$.

Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов C_{Jnk}.

в) Так как при $\gamma = h^*$ функция F_J имеет в точке

$$p^* = \frac{-(\tau^*)^2}{(\alpha l)^2}$$

полюс второго порядка, то в этом случае

(П4.4) $W_J^*(p) = \frac{C_{J1}^*}{p-p^*} + \frac{C_{J2}^*}{(p-p^*)^2}$.

Так как $P(p^*) = 0$, $P'(p^*) = 0$ и

(П4.5) $\frac{d^2P}{(dp)^2}(p^*) = -\frac{(\alpha l)^4}{4(\zeta^*)^2}\frac{\operatorname{sh}\zeta^*}{\zeta^*} = -\frac{(\alpha l)^4}{4(\tau^*)^2\sqrt{1+(\tau^*)^2}}$,

то

(П4.6) $C_{J2}^* = \lim_{p\to p^*}(F_J(p-p^*)^2) = \frac{2\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p^*})}{\theta p^* P''(p^*)}$.

Отсюда с учетом равенств (П1.4) и (П1.5) получаем:

(П4.7) $C_{J2}^* = \frac{8\hat{J}_\xi(i\tau*)}{\theta(\alpha l)^2}\sqrt{1+(\tau^2)}$ $(\hat{J}_\xi = \hat{H}_\xi, \hat{S}_\xi)$.

Так как

(П4.8) $\hat{H}_\xi(i\tau^*) = \cos((\xi/l)\tau^*)$, $\hat{S}_\xi(i\tau^*) = \frac{\alpha l}{\tau^*\sqrt{\theta}}\sin((\xi/l)\tau^*)$,

находим, что

(П4.9) $C_{H2}^* = \frac{8}{(\alpha l)^2\theta}\cos((\xi/l)\tau^*)\sqrt{1+(\tau^*)^2}$,

(П4.10) $C_{S2}^* = \frac{8}{\alpha l\theta^{3/2}}\frac{\sin((\xi/l)\tau^*)}{\tau^*}\sqrt{1+(\tau^*)^2}$.

Далее,

(П4.11) $C_{J1}^* = \operatorname{res}_{p^*} F_J = \lim_{p\to p^*}\frac{d(F_J(p-p^*)^2)}{dp} =$

$$= \lim_{p\to p^*}\frac{d}{dp}\left(\frac{\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p})(p-p^*)^2}{\theta pP}\right) =$$

$$= \lim_{p\to p^*} \frac{(p-p^*)^2}{\theta P} \frac{d}{dp}\left(\frac{\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p})}{p}\right) +$$

$$+ \lim_{p\to p^*} \frac{\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p})}{\theta p} \frac{d}{dp}\left(\frac{(p-p^*)^2}{P}\right) =$$

$$= \frac{2}{\theta P''(p^*)} \lim_{p\to p^*}\left(\frac{p(\hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p}))'_p - \hat{J}_\xi(\alpha l\sqrt{p})}{p^2}\right) +$$

$$- \frac{(\alpha l)^2 \hat{J}_\xi(i\tau^*)}{\theta(\tau^*)^2} \lim_{p\to p^*}\left(\frac{2(p-p^*)P - (p-p^*)^2 P'}{P^2}\right).$$

РазложивИз тэйлоровских разложений функцийи P и P' в ряды Тэйлора в точке p^*, следует: (П4.12)

$$2(p-p^*)P(p) = P''(p^*)(p-p^*)^3 +$$
$$+ P'''(p^*)(p-p^*)^4/3 + (p-p^*)^4 o(p-p^*),$$

(П4.13) $(p-p^*)^2 P'(p) = P''(p^*)(p-p^*)^3 + P'''(p^*)(p-p^*)^4/2 +$

$$+ (p-p^*)^4 o(p-p^*).$$

Поэтомунаходим:

$$\lim_{p\to p^*}\left(\frac{2(p-p^*)P - (p-p^*)^2 P'}{P^2}\right) =$$

$$= \lim_{p\to p^*} - \frac{2(p-p^*)^4 P'''(p^*)/3 + (p-p^*)^4 o(p-p^*)}{(P''(p^*))^2 (p-p^*)^4 + (p-p^*)^4 o((p-p^*))} = \frac{-2P'''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}$$

,

$$= -\frac{2P'''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}$$

и, следовательно,

$$= -\frac{5(\alpha l)^6}{4(\tau^*)^4\sqrt{1+(\tau^*)^2}} \frac{16(\tau^*)^4\left(\sqrt{1+(\tau^*)^2}\right)^2}{(\alpha l)^8} = -\frac{20\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{(\alpha l)^2}$$

Поэтому (см.)

$$C_{1J}^{*}=\frac{-8\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta(\tau^{*})^{2}}\left(i\tau^{*}(\hat{J}_{\xi}(i\tau^{*}))'_{\zeta}/2-\hat{J}_{\xi}(i\tau^{*})\right)+$$

$$+\frac{8i\tau^{*}J_{\xi}(i\tau^{*})\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta}=+\frac{(\alpha l)^{2}\hat{J}_{\xi}(i\tau^{*})}{\theta(\tau^{*})^{2}}\ \frac{2P'''(p^{*})}{3(P''(p^{*}))^{2}}.$$

Используя соотношения

(П4.14) $$\frac{d^{2}P(p^{*})}{(dp)^{2}}=-\frac{(\alpha l)^{4}\operatorname{sh}\zeta}{4\zeta^{3}}=-\frac{(\alpha l)^{4}}{4(\tau^{*})^{2}}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}},$$

(П4.15) $$\frac{d^{3}P(p^{*})}{(dp)^{3}}=-\frac{5(\alpha l)^{6}}{8(\tau^{*})^{4}}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}},$$

а также (см. (П4.8) и (1.5))

$$H_{\xi}(p)=\operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{l}\alpha l\sqrt{p}\right),\ S_{\xi}(p)=\frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{\theta}}\operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{l}\alpha l\sqrt{p}\right),$$

или $\hat{H}_{\xi}(\zeta)=\operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right),\ \hat{S}_{\xi}(\zeta)=\frac{\alpha l}{\zeta\sqrt{\theta}}\operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right),$

нахо-

дим: $$=\frac{-8\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta(\tau^{*})^{2}}\left((J_{\xi}(i\tau^{*}))'_{\zeta}\frac{i\tau^{*}}{2}-J_{\xi}(i\tau^{*})\right)+$$

$$\frac{40J_{\xi}(i\tau^{*})\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{2\theta(\tau)^{2}}.$$

$$C_{H1}^{*}=\frac{4}{\theta}\frac{\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\tau^{*}}\left(\frac{\xi}{l}\tau^{*}\sin((\xi/l)\tau^{*})+\frac{\cos((\xi/l)\tau^{*})}{3\tau^{*}}\right),$$

$$C_{S1}^{*} = \frac{4\alpha l}{(\tau^{*})^{2}} \frac{\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta^{3/2}} \left(\frac{4}{3} \frac{\sin((\xi/l)\tau^{*})}{\tau^{*}} - \frac{\xi}{l} \cos((\xi/l)\tau^{*}) \right).$$

$$C_{1H}^{*} = \frac{4\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta\tau^{*}} \left(\frac{\xi}{l} \sin((\xi/l)\tau) + \frac{2\cos((\xi/l)\tau)}{\tau^{*}} \right) +$$

$$\frac{40 J_{\xi}(i\tau^{*})\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{2\theta(\tau)^{2}} =$$

$$= C_{1H}^{*} = \frac{4\sqrt{1+(\tau^{*})^{2}}}{\theta\tau^{*}} \left(\frac{\xi}{l} \sin((\xi/l)\tau) + \frac{7\cos((\xi/l)\tau)}{\tau^{*}} \right) +$$

г) Из выражения для W_{Jc} (см. (3.3)) следует, что

$$(\text{П4.14})\ C_{Jn}^{0} = \operatorname*{res}_{p_n^0} F_J = \frac{1}{\theta} \frac{J_{\xi}(p_n^0)}{p_n^0 P'(p_n^0)} = \frac{2}{\theta} \frac{\hat{J}_{\xi}(\zeta_n^0)}{\zeta_n^0 \hat{P}'(\zeta_n^0)} =$$

$$= \frac{2}{\theta} \frac{\zeta_n^0 \hat{J}_{\xi}(\zeta_n^0)}{\operatorname{sh}(\zeta_n^0) - \zeta_n^0 \operatorname{ch}(\zeta_n^0)} = \frac{2}{\theta} \frac{\hat{J}_{\xi}(\zeta_n^0)}{\gamma - \operatorname{ch}(\zeta_n^0)},$$

Здесь учитываются соотношения:

$$J_{\xi}(p_n^0) = \hat{J}_{\xi}(\zeta_n^0), \quad J'_{\xi}(p_n^0) = (\hat{J}_{\xi})'_p \frac{d\zeta}{dp} = \frac{(\alpha l)^2 \hat{J}'_{\xi}(\zeta_n^0)}{2\zeta_n^0},$$

$$\hat{P}'(\zeta) = \frac{\operatorname{sh}\zeta - \zeta \operatorname{ch}\zeta}{\zeta^{2}}.$$

$$C_{H1}^{*} = \frac{4}{\tau^{*}\theta} \sqrt{1+\left(\tau^{*}\right)^{2}} \left(\frac{\cos\left(\left(\xi/l\right)\tau^{*}\right)}{3\tau^{*}} + \frac{\xi}{l} \sin\left(\left(\xi/l\right)\tau^{*}\right) \right)$$

$$= \lim_{p \to p^{*}} \frac{d}{dp} \left(\frac{J_{\xi}(\alpha l\sqrt{p})(p-p^{*})^{2}}{\theta p \hat{P}(\alpha l\sqrt{p})} \right) =$$

Используя (П4.8), получаем приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов C_{Jn}^{0}.

$$C_{J1}^{*} = \operatorname*{res}_{p^*} F_J = \lim_{p \to p^*} \frac{d(F_J (p-p^*)^2)}{dp}$$

$$\zeta = \alpha l \sqrt{p} \quad p = \zeta^2 \big/ (\alpha l)^2 \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\,p} = \frac{\alpha l}{2\sqrt{p}} = \frac{(\alpha l)^2}{2\zeta}$$

Так как

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{J(p-p^*)^2}{\theta p P}\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{J}{p}\right)' \frac{(p-p^*)^2}{P} - \frac{1}{\theta}\frac{J}{p}\left(\frac{(p-p^*)^2}{P}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\theta}\frac{J'p - J}{p^2}\frac{(p-p^*)^2}{P} - \frac{1}{\theta}\frac{J}{p}\frac{2(p-p^*)P - (p-p^*)^2}{P^2} =$$

$$= \frac{1}{\theta}\frac{J'(p-(p^*))^2}{pP} + \frac{1}{\theta}\frac{2J(p-p^*)}{pP} -$$

$$- \frac{1}{\theta}\frac{J(p-p^*)^2}{p^2 P} - \frac{1}{\theta}\frac{J(p-p^*)^2 P'}{pP^2} =$$

$$= \frac{2}{\theta}\frac{J'(p-(p^*))^2}{p(P''(p^*)(p-p^*)^2 + P'''(p^*)(p-p^*)^3/3 + o((p-p^*)^3))} +$$

$$+ \frac{2}{\theta}\frac{2(J(p^*) + J'(p^*)(p-p^*)}{p(P''(p^*)(p-p^*)^2 + P'''(p^*)(p-p^*)^3/3 + o((p-p^*)^3))} -$$

$$- \frac{2}{\theta}\frac{J(p-p^*)^2}{p^2(P''(p^*)(p-p^*)^2 + P'''(p^*)(p-p^*)^3/3 + o((p-p^*)^3))} -$$

$$- \frac{4}{\theta}\frac{J(p-p^*)^2 P'}{p(P''(p^*)(p-p^*)^2 + P'''(p^*)(p-p^*)^3/3 + o((p-p^*)^3))^2} =$$

$$= \frac{2}{\theta}\frac{J'}{p(P''(p^*) + P'''(p^*)(p-p^*)/3 + o(p-p^*))} +$$

$$+ \frac{2}{\theta}\frac{2J}{(p-p^*)p(P''(p^*) + P'''(p^*)(p-p^*)/3 + o(p-p^*))} -$$

$$-\frac{2}{\theta}\frac{J}{p^2(P''(p^*)+P'''(p^*)/3+o(p-p^*))}-$$

$$-\frac{4}{\theta}\frac{JP'}{p(p-p^*)^2(P''(p^*)+P'''(p^*)(p-p^*)/3+o(p-p^*))^2},$$

переходя к пределу при $p\circ\!\!\to\!\circ p^*$, получаем:

$$C^*_{J1}=\operatorname*{res}_{p^*}F_J=\frac{2}{\theta}\frac{J'(p^*)}{p^*P''(p^*)}+\frac{4}{\theta}\frac{J'(p^*)}{p^*P''(p^*)}-$$

$$-\frac{2}{\theta}\frac{J(p^*)}{(p^*)^2(P''(p^*)+P'''(p^*)/3)}-\frac{4}{\theta}\frac{J'(p^*)P''(p^*)}{p^*(P''(p^*))^2}=$$

$$=\frac{2}{\theta}\frac{J'(p^*)}{p^*P''(p^*)}-\frac{6}{\theta}\frac{J(p^*)}{(p^*)^2(3P''(p^*)+P'''(p^*))}$$

$$C^*_{J1}(i\tau^*)=\frac{2}{(\alpha l)^2\theta}\sqrt{1+(\tau^*)^2}\,J'(p^*)-$$

$$-\frac{6}{\theta}\frac{4(\alpha l)^4J(p^*)(\tau^*)^2\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{(\tau^*)^4(-3(\alpha l)^4+(\alpha l)^6 i\tau^*)}=$$

$$=\frac{2}{(\alpha l)^2\theta}\sqrt{1+(\tau^*)^2}\,J'(p^*)-\frac{6}{\theta}\frac{4J(p^*)(\tau^*)^2\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{(\tau^*)^4(-3+(\alpha l)^2 i\tau^*)}=$$

$$\frac{d^2P}{(dp)^2}(p^*)=-\frac{(\alpha l)^4}{4(\zeta^*)^2}\frac{\operatorname{sh}\zeta^*}{\zeta^*}=-\frac{(\alpha l)^4}{4(\tau^*)^2\sqrt{1+(\tau^*)^2}}$$

$$\frac{d^3P}{(dp)^3}(p^*)=-\left(\frac{(\alpha l)^4\operatorname{sh}\zeta^*}{4(\zeta^*)^3}\right)'\frac{d\zeta}{dp}=\frac{-(\alpha l)^6 i}{4\tau^*\sqrt{1+(\tau^*)^2}}$$

П6. Доказательство теоремы 5

Норму функции $w(\underline{\widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}})$ в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ при n от 1 до $N_\gamma-1$ включительно можно оценить сверху следующим образом:

(П6.1) $\| w(\underline{\widetilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}}) \|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \le \left|\dfrac{C_{Jn1}}{p_{n1}}\right| + \left|\dfrac{C_{Jn2}}{p_{n2}}\right| = \alpha l \left(\dfrac{C_{Jn1}}{\tau_{n1}^2} + \dfrac{C_{Jn2}}{\tau_{n2}^2} \right).$

Используя выражения для C_{Jnk} (см пояснения к (3.3)) и учитывая соотношения

(П6.2) $L_n = \pi(2n-1) < \tau_{n1} < \bar{\tau}_n < \rho = \pi(2n-0{,}5)$,

(П6.3) $\cos\tau_{n1} < \cos\bar{\tau}_n = \bar{h}_n = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\bar{\tau}_n^2}}$,

(П6.4) $|\sin x| \le \mu(x) = \min(1, x)$,

получаем оценки:

(П6.5) $$\| \underline{\widetilde{W}_{H\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}} \le \frac{2(\alpha l)^2}{\theta} \left[\frac{\cos((\xi/l)\tau_{n1}}{\tau_{n1}^2(\gamma - \cos\tau_{n1})} + \frac{\cos((\xi/l)\tau_{n2}}{\tau_{n2}^2(|\gamma| + \cos\tau_{n2})} \right] \le$$
$$\le \frac{2(\alpha l)^2}{\theta} \left[\frac{1}{L_n^2(|\bar{h}_n| - |\gamma|)} + \frac{1}{\rho_n^2\,|\gamma|} \right],$$

(П6.6) $$\| \underline{\widetilde{W}_{S\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}} \le \frac{2(\alpha l)^3}{\theta^{3/2}} \left[\frac{\sin((\xi/l)\tau_{n1}}{\tau_{n1}^3(\gamma - \cos\tau_{n1})} + \frac{\sin((\xi/l)\tau_{n2}}{\tau_{n2}^3(|\gamma| + \cos\tau_{n2})} \right] \le$$
$$\le \frac{2(\alpha l)^2}{\theta} \left[\frac{\mu((\xi/l)\bar{\tau}_n)}{L_n^3(|\bar{h}_n| - |\gamma|)} + \frac{\mu(2\pi(\xi/l)n)}{\rho_n^3\,|\gamma|} \right].$$

Так как $\bar{h}_n > 1/\rho_n$, из (П6.5) и (П6.6) следуют оценки сверху для $\| \underline{\widetilde{W}_{S\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}}$ ($J = H, S$):

(П6.7) $\left\| \underline{W_{Jr}} \right\| \le k_J (Q_{J1} + Q_{J2})$,

где

$$k_H = \frac{2}{\theta}\left(\frac{\alpha l}{\pi}\right)^2,\ k_S = \frac{2}{\theta^{3/2}}\left(\frac{\alpha l}{\pi}\right)^3 \mu((\xi/l)\pi(N_\gamma - 1)),$$

$$Q_{Ji} = \sum_{n=1}^{N_\gamma - 1} \Phi_{Ji}(n), \quad \varPhi_{J1}(n) = \frac{1}{F_J(n)},$$

$$F_J(n) = (2n-1)^{\beta_J}\left(\frac{1}{\pi(2n-0{,}5)} - |\gamma|\right),$$

$$\Phi_{J2}(n) = \frac{1}{(2n-0{,}5)^{\beta_J}\ |\gamma|}, \ \beta_H = 2, \ \beta_S = 3.$$

В качестве диапазона значений параметра $|\gamma|$ принимаем промежуток (0, 0,04]; при этом, согласно (2.6), $N_\gamma \geq 4$.

Так как значения функций Φ_{J2} убывают с ростом n , сумма Q_{J2} при $N_\gamma \geq 2$ может быть оценена сверху следующим образом (см. [1], с. 61, формула (2.28)):

$$\text{(П6.8)} \quad Q_{J2} < \varPhi_{J2}(1) + \frac{1}{|\gamma|}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \int_1^{N_\gamma - 1} \frac{dx}{(2x-0{,}5)^{\beta_J}}\right) =$$

$$= \frac{1}{|\gamma|}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta_J} + \frac{1}{2(\beta_J - 1)}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta_J - 1} - \frac{1}{(2N_\gamma - 2{,}5)^{\beta_J - 1}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2^{\beta_J - 2}}{|\gamma|(\beta_J - 1)}\left[\frac{4\beta_J - 1}{3^{\beta_J}} - \frac{1}{(4N_\gamma - 5)^{\beta_J - 1}}\right].$$

Таким образом,

$$\text{(П6.9)} \quad Q_{H2} < \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{4N_\gamma - 5}\right),$$

$$\text{(П6.10)} \quad Q_{S2} < \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{11}{27} - \frac{1}{(4N_\gamma - 5)^2}\right).$$

Общий же член каждой из сумм Q_{J1} − более сложная функция n, имеющая участок убывания и участок возрастания. Для оценки этих сумм введём в рассмотрение функцию

$$\text{(П6.11)} \quad \widetilde{F}_J(x) = (2x-1)^{\beta_J}\left(\frac{1}{\pi(2x-0{,}5)} - |\gamma|\right)$$

скалярного переменного x ($1 \le x \le N_\gamma - 1$), функцию $\Phi_J = 1/F_J$ и, наконец, функцию

(П6.12) $\hat{F}_J(y) = (y - 0{,}5)^{\beta_J} (1/\pi y - |\gamma|)$

скалярного переменного $y = 2x - 0{,}5$ ($1{,}5 \le y \le 2N_\gamma - 2{,}5$).

Согласно (2.6) за максимальный диапазон изменения y можно принять промежуток $\mathbf{Y} = [\ 1{,}5,\ \ 1/\pi|\gamma|)$.

Из выражения для производной функции $\hat{F}_J(y)$:

(П6.13) $\hat{F}_J'(y) = (y - 0{,}5)^{\beta_J - 1} \dfrac{\beta_J - \beta_j \pi y - 0{,}5}{\pi y}$

видно, что эта функция принимает на положительные значения и имеет максимум в точке

(П6.14) $y_J = \dfrac{\beta_J - 0{,}5}{\pi \beta_J}$,

поэтому функция $\Phi_J = 1/F_J$ имеет в этой точке минимум.

Введем еще в рассмотрение функции от $|\gamma|$.

(П6.15) $f_J(|\gamma|) = (y_J + 0{,}5)/2$,

(П6.16) $f_{N1}(|\gamma|) = (1/\pi|\gamma| + 1{,}5)/2$, при этом $N_\gamma - 1 = \operatorname{int} f_{N1}(|\gamma|)$.

Заметим, что число $n_J = \operatorname{int} f_J(|\gamma|)$ не превышает $N_\gamma - 1$. Действительно, функции

(П6.17) $\delta_J(|\gamma|) = (f_{N1} - f_J) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\pi|\gamma|} - \dfrac{\beta_J - 0{,}5}{\pi\beta_J} + 1\right)$ ($J = H, S$),

убывают с ростом $|\gamma|$ и при $|\gamma| = 0{,}04$ принимают значение $\delta_H(0{,}04) = 0{,}7646$, $\delta_S(0{,}04) = 0{,}2068$. Поэтому

$\operatorname{int} f_{N1}(|\gamma|) \ge \operatorname{int} f_J(|\gamma|)$

Так как функция $\hat{\Phi}_J$ убывает при $y \in (3/2, y_J)$ и возрастает при $y \in (y_J, (1/\pi y - 2))$, то для оценки сверху суммы Q_{J1} разобьём её на слагаемые:

(П6.18) $Q_{J1} = Q_{J11} + q_J + Q_{J12}$,

где $Q_{J11} = \sum\limits_{n=1}^{n_J} \Phi_{J1}(n)$, $q_J = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n_J = N_\gamma - 1, \\ \Phi_{J1}(n_J + 1) & \text{при} \quad n_J \le N_\gamma - 2, \end{cases}$

$$Q_{J12} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n_J \geq N_\gamma - 2, \\ \sum\limits_{n=n_J+2}^{N_\gamma - 1} \Phi_{J1}(n) & \text{при} \quad n_J \leq N_\gamma - 3, \end{cases}$$

Суммы Q_{J11}, Q_{J12} оцениваются сверху согласно [1] (с. 61, (2.28)):

(П6.19) $$Q_{J11} < \Phi_{J1}(1) + \int\limits_1^{n_J} \widetilde{\Phi}_J(x)dx = \Phi_{J1}(1) + 0{,}5 \int\limits_{1{,}5}^{2n_J - 0{,}5} \hat{\Phi}_J(y)dy,$$

(П6.20) $$Q_{J12} < \Phi_{J1}(N_\gamma - 1) + \int\limits_{n_J+2}^{N_\gamma - 1} \widetilde{\Phi}_J(x)dx =$$

$$= \Phi_{J1}(N_\gamma - 1) + 0{,}5 \int\limits_{2n_J+3{,}5}^{2N_\gamma - 2{,}5} \hat{\Phi}_J(y)dy.$$

Используя разложение функции $\hat{\Phi}_J(y) = 1/\hat{F}_J(y)$ (см. (П6.12))

(П6.21) $$\hat{\Phi}_J(y) = \frac{\pi y}{(y - 0{,}5)^{\beta_J}(1 - |\gamma|\pi y)}$$

на элементарные рациональные дроби:

(П6.22) $$\hat{\Phi}_J(y) = \frac{B_J}{1 - |\gamma|\pi y} + \sum_{i=1}^{\beta_J} \frac{A_{Ji}}{(y - 0{,}5)^i},$$

где $B_J = \left(\dfrac{\pi}{a_\gamma}\right)^{\beta_J} |\gamma|^{\beta_J - 1}$, $a_\gamma = 1 - \pi|\gamma|/2$,

$$A_{Ji} = \frac{\pi^{\beta_J - i}|\gamma|^{\beta_J - i - 1}}{a_\gamma^{\beta_J - i + 1}} \text{ при } i = 1 \div (\beta_J - 1), \; A_{J\beta_J} = \frac{\pi}{2a_\gamma},$$

из (П6.19), (П6.20) получаем выражения для оценок сумм Q_{J11}, Q_{J12}:

(П6.23) $$Q_{J11} < \frac{2}{3\pi - 2|\gamma|} + \frac{B_J}{2}\ln\frac{1 - 1{,}5\pi|\gamma|}{1 - (2n_J - 0{,}5)\pi|\gamma|} +$$

$$+ \frac{A_{J1}}{2}\ln(2n_J - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i-2}^{\beta_j} \frac{A_{Ji}}{i-1}\left(1 - \frac{1}{(2n_J - 1)^i}\right);$$

$Q_{J12} = 0$ при $n_J \geq N_\gamma - 2$, а при $n_J \leq N_\gamma - 3$

(П6.24) $Q_{J12} < \dfrac{\pi(2N_\gamma - 2{,}5)}{(2N_\gamma - 3)^{\beta_J} d_\gamma} + \dfrac{B_J}{2}\ln\dfrac{1-\pi|\gamma|(2n_J - 3{,}5)}{d_\gamma} +$

$$+\frac{A_{J1}}{2}\ln\frac{(2N_\gamma - 2{,}5)}{(2n_J - 3{,}5)} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\beta_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(\frac{1}{(2n_J - 3{,}5)^{i-1}} - \frac{1}{(2N_\gamma - 2{,}5)^{i-1}}\right),$$

где $d_\gamma = 1 - \pi|\gamma|(2N_\gamma - 2{,}5)$.

Добавляя сюда выражение для q_J:

(П6.25) $q_J = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n_J = N_\gamma - 1, \\ \dfrac{\pi(2n_J + 1{,}5)}{(2n_J + 1)^{\beta_J}(1 - \pi(2n_J + 1{,}5)|\gamma|)} & \text{при} \quad n_J \le N_\gamma - 2, \end{cases}$

получаем оценки для $\|\underline{W_{S\Gamma n}}\|_{\mathbf{B}}$, приведенные в формулировке теоремы 5 (раздел 4).

Замечание. Величина d_γ, входящая в знаменатели некоторых выражений из правой части (П6.24), при фиксированном $|\gamma|$ ограничена снизу. Действительно, в силу (П2.3) имеем:

(П6.26) $\pi|\gamma|(2N_\gamma - 2{,}5) < 1 - 1{,}5\pi|\gamma|$,

(П6.27) $d_\gamma \ge 1{,}5\pi|\gamma|$,

что означает ограниченность сверху (при фиксированном $|\gamma|$) оценки (П6.24).

Этим завершается доказательство теоремы 5 (см. раздел 4).

П7. Доказательство теоремы 6

Норма оператора $\underline{W_J^*}$ в пространстве **B** при $\gamma{\circ}{=}{\circ}h^*$ вычисляется следующим образом:

(П7.1) $\left\|\underline{W_J^*}\right\|_{\mathbf{B}} = \int_0^\infty |C_{J1}^* + C_{J2}^* t|\exp(p^* t)\,\mathrm{d}t$,

(см. пояснения к (3.3). Эта норма в зависимости от знака произведения $C_{J1}^* C_{J2}^*$ равна

(П7.2) $\left\| \underline{W_J^*} \right\|_{\mathbf{B}} = \left| \int\limits_0^\infty \varphi(\xi,t)\,\mathrm{d}\,t \right| = | a_{J1} |$

при $C_{J1}^* C_{J2}^* \ge 0$,

(П7.3) $\left\| \underline{W_J^*} \right\|_{\mathbf{B}} = \left| \int\limits_0^{t_{0J}} \varphi(\xi,t)\,\mathrm{d}\,t \right| - \left| \int\limits_{t_{0J}}^\infty \varphi(\xi,t)\,\mathrm{d}\,t \right| = a_{J1} + a_{J2} b_J$

при $C_{J1}^* C_{J2}^* < 0$. Здесь

$$t_{0J} = -\frac{C_{J1}^*}{C_{J2}^*}, \quad a_{J1} = \frac{C_{J1}^*}{| p^* |} + \frac{C_{J2}^*}{| p^* |^2},$$

$$a_{J2} = 2\left[\frac{C_{J1}^*}{| p^* |} + C_{J2}^* \left(\frac{t_{0J}}{| p^* |} - \frac{1}{| p^* |^2} \right) \right] = -2\frac{C_{J2}^*}{| p^* |^2},$$

$$b_J = \exp\left(-\left| p^* \frac{C_{J1}^*}{C_{J2}^*} \right| \right).$$

Используя приведённые в пояснениях к (3.3) выражения для C_{J1}^* и C_{J2}^* ($J = H, S$), получаем выражения для нормы оператора и коэффициентов a_{J1}, a_{J2} и b_J, приведенные в формулировке теоремы 6.

П8. Доказательство теоремы 7

Применяя процедуру исследования, изложенную в [1, раздел 1, п. 5], составим ряд $R_0(W_{J\text{c}})$ из оригиналов членов разложения функции $W_{J\text{c}}$ (см. пояснения к (3.3)). Оригинал n-го члена этого разложения имеет вид

(П8.1) $$\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p - \overline{p_n^0}} \right) = 2\,\mathrm{Re}\,(C_{Jn}^0 \exp(p_n^0 t)) =$$

$$= 2\left| C_{Jn}^0 \right| \exp(-\mu_n t) \cos(\omega_n t + \arg C_{Jn}^0),$$

где $\mathbf{L}^{-1}$ − оператор, обратный оператору Лапласа,

$$\mu_n = \frac{\vartheta_n}{(\alpha l)^2}, \quad \vartheta_n = (\tau_n^0)^2 - (\sigma_n^0)^2, \quad \omega_n = 2\frac{\sigma_n^0 \tau_n^0}{(\alpha l)^2},$$

$$\arg C_{Jn}^0 = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\, C_{Jn}^0}{\mathrm{Re}\, C_{Jn}^0} + \alpha\pi, \quad \alpha = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{Re}\, C_{Jn}^0 \geq 0, \\ 1 \text{ при } \mathrm{Re}\, C_{Jn}^0 < 0. \end{cases}$$

Норма этого оригинала в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ оценивается сверху, согласно (П4.16), величиной

(П8.2) $\quad M_{J\,n} = 2\dfrac{|C_{Jn}^0|}{\mu_n} = \dfrac{4}{\theta}\dfrac{(\alpha l)^2}{\vartheta_n}\left|\dfrac{\hat{J}(\zeta_n^0)}{\gamma - \mathrm{ch}\,\zeta_n^0}\right|.$

а) Оценим по модулю сверху величину

(П8.3) $\quad r_{Hn} = \left|\dfrac{\hat{H}_\xi(\zeta_n^0)}{\gamma - \mathrm{ch}\,\zeta_n^0}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{ch}((\xi/l)\zeta_n^0)}{\gamma - \mathrm{ch}\,\zeta_n^0}\right|.$

В силу неравенств

$$\left|\mathrm{ch}((\xi/l)\zeta_n^0)\right| < \mathrm{ch}((\xi/l)\sigma_n^0) \leq \mathrm{ch}\,\sigma_n^0, \quad |\mathrm{ch}\,\zeta_n^0| > \mathrm{sh}\,\sigma_n^0$$

при выполнении условия

(П8.4) $\quad \mathrm{sh}\,\sigma_n^0 > |\gamma|$

имеем оценку для r_{Hn}:

(П8.5) $\quad r_{Hn} \leq \dfrac{1}{\mathrm{th}\sigma_n^0 - (|\gamma|/\mathrm{ch}\sigma_n^0)}.$

б) При $n \to \infty$ величина σ_n^0 возрастет неограниченно. Действительно, при фиксированном $\sigma > 0$ из (П1.6) и (П1.7) следует соотношение

(П8.6) $\quad \gamma = -\dfrac{\mathrm{sh}\,\sigma}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\nu_n(o)(\mathrm{th}\,\sigma/\sigma))^2}}.$

Так как модуль правой части (П8.5) оценивается сверху величиной $\mathrm{ch}\,\sigma/\nu_n(o)$ и $\nu_n(\sigma) \geq \pi(2n-1)$, отсюда следует оценка:

(П8.7) $\quad \sigma_n^0 > \mathrm{Arch}(\pi(2n-1)|\gamma|);$

т.е. $\sigma_n^0 \to \infty$ при $n \to \infty$.

То же можно сказать о величине

(П8.8) $r_{Sn} = \left| \dfrac{\hat{S}_\xi(\zeta_n^0)}{\gamma - \operatorname{ch}\zeta_n^0} \right| = \dfrac{\alpha l}{\sqrt{\theta}} \left| \dfrac{\operatorname{sh}((\xi/l)\zeta_n^0)}{\zeta_n^0(\gamma - \operatorname{ch}\zeta_n^0)} \right|$

(она даже стремится к нулю при $n \to \infty$).

в) Теперь оценим снизу величину ϑ_n, для чего нужно оценить снизу величину τ_n^0 и сверху – величину σ_n^0. Нуль ζ_n^0 функции $\hat{P}$ лежит в области $\widetilde{\mathbf{Q}}_n = \{\zeta \in \mathbf{C} : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{M}_n\}$ (см. формулировку теоремы 1), т.е. $\tau_n^0 > \pi(2n-1)$. Для оценки сверху величины σ_n^0 используем соотношение (П1.6), из которого следует:

(П8.9) $\dfrac{\operatorname{sh}\sigma_n^0}{\sigma_n^0} = \left| \dfrac{\gamma}{\cos\nu(\sigma_n^0)} \right| < \left| \dfrac{\gamma}{\cos\nu(0)} \right| =$

$= |\gamma| \sqrt{1 + (\bar{\tau}_n)^2} < |\gamma| \sqrt{1 + \rho_n^2}$,

где $\rho_n = \pi(2n - 0{,}5)$.

Величина же $\operatorname{sh}\sigma_n^0 / \sigma_n^0$ может быть оценена снизу величиной $k(\sigma_n^0)^2$ для некоторых $k > 0$. Обозначим максимальное из таких чисел k как k_m; k_m может быть определено из решения системы уравнений

(П8.10) $\begin{cases} \operatorname{sh}\sigma_0 & = & k_m\sigma_0^3, \\ \operatorname{ch}\sigma_0 & = & 3k_m\sigma_0^2, \end{cases}$

где σ_0 – точка касания графиков функций $\operatorname{sh}\sigma$ и $k_m\sigma^3$. Из (П8.10) следует, что σ_0 определяется как решение уравнения

(П8.11) $\operatorname{th}\sigma_0 = \dfrac{\sigma_0}{3}$.

Численное решение этого уравнения даёт значение $\sigma_0 \approx 2{,}985$, откуда получаем значение $k_m = \operatorname{sh}\sigma_0 / \sigma_0^3 \approx 0{,}371$.

Таким образом, из (П8.9) следует оценка

(П8.12) $(\sigma_n^0)^2 \le \frac{1}{k_m}\frac{\operatorname{sh}\sigma_n^0}{\sigma_n^0} < c\,|\gamma|\,\sqrt{1+(\overline{\tau}_n)^2} < c\,|\gamma|\,\sqrt{1+\rho_n^2}$,

где $c = 1/k_m \approx 2{,}7$.

Полученные оценки показывают, что норма в $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ каждого из членов ряда $R_0(W_{\text{Jc}})$ является величиной $O(1/n^2)$; поэтому ряд в этом пространстве сходится, а это означает [1, см. раздел 1, п. 5], что сумма ряда $R_0(W_{\text{Jc}})$ является импульсной переходной функцией оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ и, следовательно, этот оператор входит в пространство **B**.

г) Переходя к оценке нормы оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ **,** отметим, что выполнение условия (П8.4) при всех n ≥ 1 гарантировано лишь для значений |γ|, больших величины

$g_1 = 1/\sqrt{\pi^2 - 1} \approx 0{,}3358$.

Действительно, из (П8.7) следует, что величина

(П8.13) $\delta_{Hn} = \operatorname{sh}^2 \sigma_n^0 - \gamma^2$

оценивается снизу величиной

$(\pi^2(2n-1)^2 - 1)\gamma^2 - 1 \ge (\pi^2 - 1)\gamma^2 - 1$

и что, следовательно, выполнение условия (П8.4) при любых $n \ge 1$ гарантировано лишь при $|\gamma| > g_1$. Так как $\overline{h}_1 = -0{,}2173$ (см. раздел 2), этому диапазону значений $|\gamma|$ соответствует $N_\gamma = 0$.

Для меньших значений $|\gamma|$, учитывая (П8.7) и соотношение

(П8.14) $|\gamma| > -\overline{h}_{N_\gamma+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\overline{\tau}^2_{N_\gamma+1}}} > \frac{1}{\sqrt{1+\overline{\rho}^2_{N_\gamma+1}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2(2N_\gamma+1{,}5)^2}} ,$$

получаем для δ_{Hn} оценку снизу:

(П8.15) $\delta_{Hn} > \dfrac{\pi^2[4n(n-1)-4N_\gamma^2-6N_\gamma-1{,}25]-2}{1+\pi^2(2N_\gamma+1{,}5)^2}$,

из которой следует, что положительность δ_{Hn} гарантирована лишь для $n \geq N_\gamma + 2$, в то время как ряд $R_0(W_{J\mathrm{c}})$, определяющий функцию W_{Jc} (см. пояснения к (3.3)), начинается с $n = N_\gamma + 1$. Поэтому первый член этого ряда необходимо вычислять и оценивать по норме пространства $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ отдельно.

д) Рассмотрим сначала случай $|\gamma| < g_1$. Величина ϑ_n в знаменателе оценки M_{Jn} нормы оригинала n-го члена разложения функции W_{Jc} (см. (П8.2)) оценивается снизу (см. (П8.12)) согласно п. **в)** положительной при $|\gamma| < g_1$ функцией $\varphi_\gamma(n)$:

(П8.16) $\varphi_\gamma(n) = \varphi_{\mathrm{im}}(n) - \varphi_{\mathrm{r}}(n)|\gamma|$,

где $\varphi_{\mathrm{im}}(n) = \pi^2(2n-1)^2$, $\varphi_{\mathrm{r}}(n) = c\sqrt{1+\rho_n^2} = c\sqrt{1+\pi^2(2n-1{,}5)^2}$

Величины r_{Jn} ($J = H, S$), также входящие в выражение (П8.2) для M_{Jn}, оцениваются сверху, при выполнении условия (П8.4) и с учётом (П8.7), следующим образом:

(П8.17) $r_{Hn} < \dfrac{\mathrm{ch}\,\sigma_n^0}{\mathrm{sh}\,\sigma_n^0 - |\gamma|} < \dfrac{\pi(2n-1)|\gamma|}{\psi_\gamma(n)}$,

где $\psi_\gamma(n) = \sqrt{\pi^2(2n-1)\gamma^2 - 1} - |\gamma|$;

(П8.18) $r_{Sn} < \dfrac{\alpha l}{\sqrt{\theta}} \dfrac{\mathrm{ch}\,\sigma_n^0}{\tau_n^0(\mathrm{sh}\,\sigma_n^0 - |\gamma|)} < \dfrac{\alpha l}{\sqrt{\theta}} \dfrac{|\gamma|}{\psi_\gamma(n)}$,

Таким образом, для получения оценок норм операторов $\underline{W_{J\mathrm{c}}}$ ($J = H, S$) необходимо оценить суммы рядов

(П8.19) $R_{1H} = \sum\limits_{n=N_\gamma+2}^{\infty} \dfrac{2n-1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$,

(П8.20) $R_{1S} = \sum\limits_{n=N_\gamma+2}^{\infty} \dfrac{1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$.

Так как общие члены рядов R_{1J} ($J = H, S$) убывают с ростом n, их суммы могут быть оценены сверху суммами соответственно $m_{1J} + I_{1J}$, где

(П8.21) $m_{1H} = \dfrac{n_\gamma}{\varphi_\gamma(N_\gamma + 2)\psi_\gamma(N_\gamma + 2)}$,

(П8.22) $I_{1H} = \int\limits_{N_\gamma+2}^{\infty} \dfrac{2x-1}{\varphi_\gamma(x)\psi_\gamma(x)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{n_\gamma}^{\infty}\dfrac{y\,\mathrm{d}y}{\alpha_\gamma(y)\beta_\gamma(y)}$,

(П8.23) $m_{1S} = \dfrac{1}{\varphi_\gamma(N_\gamma + 2)\psi_\gamma(N_\gamma + 2)}$,

(П8.24) $I_{1S} = \int\limits_{N_\gamma+2}^{\infty} \dfrac{1}{\varphi_\gamma(x)\psi_\gamma(x)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{n_\gamma}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{\alpha_\gamma(y)\beta_\gamma(y)}$,

(П8.25) $\alpha_\gamma(y) = (\pi y)^2 - c\,|\gamma|\sqrt{1+\pi^2(y-0{,}5)^2}$,

(П8.26) $\beta_\gamma(y) = \sqrt{(\pi y)^2\gamma^2 - 1} - |\gamma|$,

(П8.27) $n_\gamma = 2N_\gamma + 3$.

Ввиду сложности интегрирования иррациональных функций φ_γ и ψ_γ минорируем их соответственно полиномом

(П8.28) $\tilde{\alpha}_\gamma(y) = (\pi y)^2 - c\pi\,|\gamma|(y - n_\gamma) - d_\gamma$,

где $d_\gamma = c\,|\gamma|\sqrt{1+\pi^2(2N_\gamma + 2{,}5)^2}$,

и линейной функцией

(П8.29) $\tilde{\beta}_\gamma(y) = \pi\,|\gamma|\,y - \sqrt{1+\gamma^2}$.

Разложим рациональные функции

(П8.30) $F_{1H}(y) = \dfrac{y}{\tilde{\alpha}_\gamma(y)\tilde{\beta}_\gamma(y)}$

(П8.31) $F_{1S}(y) = \dfrac{1}{\tilde{\alpha}_\gamma(y)\tilde{\beta}_\gamma(y)}$

на элементарные рациональные дроби:

(П8.32) $F_{1J}(y)=\dfrac{A_{1J}y+B_{1J}}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y)}+\dfrac{C_{1J}}{\widetilde{\beta}_\gamma(y)}\quad (J=H,S)$,

где $C_{1H}=\dfrac{y_\gamma}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}$, $y_\gamma=\dfrac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\pi\,|\gamma\,|}$,

$$A_{1H}=-\frac{\pi}{|\gamma\,|}C_{1H}=-\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma^2\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)},$$

$$B_{1H}=\frac{1+C_{1H}c\pi\,|\gamma\,|+A_{1H}\sqrt{1+\gamma^2}}{\pi\,|\gamma\,|}=$$

$$=\frac{1}{\pi\,|\gamma\,|}\left(1+c\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}-\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}\right)\;C_{1S}=\frac{1}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)},$$

$$A_{1S}=-\frac{\pi}{|\gamma\,|}C_{1S}=-\frac{\pi}{|\gamma\,|\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)},$$

$$B_{1S}=C_{1S}c+\frac{A_{1S}\sqrt{1+\gamma^2}}{\pi\,|\gamma\,|}=\frac{1}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_\gamma)}\left(c-\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma^2}\right).$$

Используя разложения (П8.33), получаем выражения для значений интегралов

(П8.33) $\widetilde{I}_{1H}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n_\gamma}^{\infty}\dfrac{y\,\mathrm{d}\,y}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y)\widetilde{\beta}_\gamma(y)}$

(П8.34) $\widetilde{I}_{1S}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n_\gamma}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y)\widetilde{\beta}_\gamma(y)}$,

мажорирующих соответствующие интегралы I_{1J} ($J=H,S$):

(П8.35) $\widetilde{I}_{1H}=\dfrac{\Lambda(n_\gamma)\sqrt{1+\gamma^2}}{2(\pi\gamma)^2\widetilde{\alpha}_\gamma(y_0)}+$

$$+\frac{a_\gamma}{\pi^2\,|\gamma\,|b_\gamma}\left[1+\frac{1}{\widetilde{\alpha}_\gamma(y_0)}\left(\frac{c\sqrt{1+\gamma^2}}{2}-\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\right)\right],$$

где $\Lambda(n_\gamma)=\ln\left(\frac{\sqrt{\widetilde{\alpha}_\gamma(n_\gamma)}}{\pi(n_\gamma-y_0)}\right)$, $b_\gamma=\sqrt{4(c\pi n_\gamma\,|\gamma|-d_\gamma)-c^2\gamma^2}$;

$a_\gamma=\operatorname{arctg}\frac{b_\gamma}{2\pi n_\gamma-c\,|\gamma|}$.

(П8.36) $$\widetilde{I}_{1S}=\frac{\Lambda(n_\gamma)}{2\pi\,|\gamma|\,\alpha_\gamma(y_0)}-$$

$$-\left[\frac{c\,|\gamma|}{4\pi}+\frac{\sqrt{1+\gamma^2}-\gamma^2}{2\widetilde{\alpha}_\gamma(y_0)\gamma^2}\right]\operatorname{arctg}\frac{b_\gamma}{2\pi n_\gamma-c\,|\gamma|}.$$

Таким образом, при $|\gamma|<g_1$ норма оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ ($J=H,S$) оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{\theta}(\alpha l)^2\left(\frac{1}{\vartheta_{N_\gamma+1}}\left|\frac{\hat{J}_\xi(\zeta^0_{N_\gamma+1})}{\gamma-\operatorname{ch}\zeta^0_{N_\gamma+1}}\right|+a_J|\gamma|(m_{1J}+\widetilde{I}_{1J})\right),$$

где $a_H=\pi$, $a_S=\alpha l/\sqrt{\theta}$, $\zeta^0_{N_\gamma+1}$ должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6), (П1.7).

е) Теперь рассмотрим случай $|\gamma|\ge g_1$ (при этом $N_\gamma=0$, т.е., ряд $R_0(W_{J\text{c}})$ начинается с $n=1$). Из вида функции φ_γ следует, что условие её положительности при всех $n\ge1$ выполняется лишь для значений $|\gamma|$, меньших $q_1=0{,}76$; для значений |γ|$|\gamma|$, меньших $q_2=2{,}98$, функция φγ φ_γ положительна при всех n◦≥◦2 $n\ge2$; и, наконец, положительность этой функции для всех $|\gamma|<\widetilde{\gamma}_1$ ($|\widetilde{\gamma}|=4{,}5697$, см. формулировку теоремы 1) гарантируется лишь при $n\ge3$. Поэтому разобьём диапазон $[g_1,|\widetilde{\gamma}_1|)$ на промежутки $\mathbf{G}_k=[g_k,g_{k+1})$ ($k=1\div5$), где g_k ($k=2\div5$) вычисляются из условия: $\varphi_{\text{r}}(k)\,|\gamma|\le\varphi_{\text{im}}(k)/2$ для $|\gamma|\le g_{k+1}$ (тогда соотношение $\varphi_{\text{r}}(n)\,|\gamma|\le\varphi_{\text{im}}(n)/2$ будет выполнено для всех $n\ge k$), $g_6=|\widetilde{\gamma}|$. Подсчёт даёт значения $g_2=q_1/2=0{,}38$,

$g_3 = q_2 / 2 = 1{,}49$, $g_4 = 2{,}65$, $g_5 = 3{,}8$. В соответствии со значениями g_k и q_i ($i = 1, 2$) для $|\gamma|$ из диапазона $\mathbf{G}_k$ мы можем оценить лишь суммы рядов

(П8.37) $R_{2H} = \sum\limits_{n=n_{k_\gamma}}^{\infty} \dfrac{2n-1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$,

(П8.38) $R_{2S} = \sum\limits_{n=n_{k_\gamma}}^{\infty} \dfrac{1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$,

где $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 3$, k_γ определяется тем из промежутков $\mathbf{G}_k$, в который попадает модуль заданного значения параметра γ (приведённые значения n_k определяются из условия положительности значений φ_n при $n \ge n_{k_\gamma}$).

Первые члены ряда $R_0(W_{Jc})$, определяющего функцию W_{Jc} (см. (3.2)) ($n \in [1, n_{k_\gamma} - 1]$, т.е. первый член для $|\gamma| \in [0{,}38, 2{,}65)$ и два первых члена для $|\gamma| \in [2{,}65, |\tilde{\gamma}|)$) приходится вычислять и оценивать отдельно.

Суммы рядов R_{2J} ($J = H, S$) оцениваются сверху суммами

(П8.39) $\sum\limits_{n=n_{k_\gamma}}^{k_\gamma} m_{2Jn} + I_{2J}$,

где

(П8.40) $m_{2Hn} = \dfrac{2n-1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$,

(П8.41) $m_{2Sn} = \dfrac{1}{\varphi_\gamma(n)\psi_\gamma(n)}$,

(П8.42) $I_{2H} = \int\limits_{k_\gamma}^{\infty} \dfrac{2x-1}{\varphi_\gamma(x)\psi_\gamma(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{l_\gamma}^{\infty} \dfrac{y\,\mathrm{d}y}{\alpha_\gamma(y)\beta_\gamma(y)}$,

(П8.43) $I_{2S} = \int\limits_{k_\gamma}^{\infty} \dfrac{1}{\varphi_\gamma(x)\psi_\gamma(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{l_\gamma}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{\alpha_\gamma(y)\beta_\gamma(y)}$,

(П8.44) $l_\gamma = 2k_\gamma - 1$,

φ_γ – см. (П8.17), ψ_γ – см. пояснения к (П8.18),
α_γ, β_γ – см. соответственно (П8.27)

Так как для $y \ge l_\gamma$ выполняется соотношение

(П8.45) $\alpha_\gamma(y) \ge (\pi y)^2/2$,

интегралы I_{2J} ($J = H, S$) мажорируются интегралами

(П8.46) $\tilde{I}_{2H} = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{l_\gamma}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y\tilde{\beta}_\gamma(y)}$

(П8.47) $\tilde{I}_{2S} = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{l_\gamma}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y^2\tilde{\beta}_\gamma(y)}$,

где $\tilde{\beta}_\gamma$ – см. (П8.30).

Разложим рациональные функции

(П8.48) $F_{2H}(y) = \dfrac{1}{y\tilde{\beta}_\gamma(y)}$,

(П8.49) $F_{2S}(y) = \dfrac{1}{y^2\tilde{\beta}_\gamma(y)}$,

на элементарные рациональные дроби:

(П8.50) $F_{2H}(y) = \dfrac{A_{2H}}{y} + \dfrac{C_{2H}}{\tilde{\beta}_\gamma(y)}$,

где $A_{2H} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, $C_{2H} = \dfrac{1}{y_0} = \dfrac{\pi|\gamma|}{\sqrt{1+\gamma^2}}$,

(П8.51) $F_{2S}(y) = \dfrac{A_{2S}}{y} + \dfrac{B_{2S}}{y^2} + \dfrac{C_{2S}}{\tilde{\beta}_\gamma(y)}$,

где $C_{2S} = \dfrac{1}{y_0^2} = \dfrac{\pi^2\gamma^2}{1+\gamma^2}$, $A_{2S} = -\dfrac{C_{2S}}{\pi\,|\gamma\,|} = -\dfrac{\pi\,|\gamma\,|}{1+\gamma^2}$,

$B_{2S} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$.

Используя разложения (П8.50) и (П8.51), получаем выражения для значений интегралов $\widetilde{I}_{2J}$ ($J = H, S$):

(П8.52) $\widetilde{I}_{2H} = \dfrac{1}{\pi^2\sqrt{1+\gamma^2}} \ln \dfrac{l_\gamma}{l_\gamma - y_0}$,

(П8.53) $\widetilde{I}_{2S} = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{|\gamma|}{1+\gamma^2} \ln \dfrac{l_\gamma}{l_\gamma - y_0} + \dfrac{1}{\pi l_\gamma \sqrt{1+\gamma^2}} \right)$.

Таким образом, при $|\gamma| \geq g_1$ норма оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ ($J = H, S$) оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{\theta}(\alpha l)^2 \left(\sum_{n=1}^{n_{k_\gamma}-1} \frac{1}{\vartheta_n} \left| \frac{\hat{J}_\xi(\zeta_n^0)}{\gamma - \operatorname{ch}\zeta_n^0} \right| + a_J\,|\gamma|\,(m_{2J} + \widetilde{I}_{2J}) \right),$$

где $a_H = \pi$, $a_S = \alpha l / \sqrt{\theta}$, ζ_n^0 для $n \in [1, n_{k_\gamma} - 1]$ должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6) и (П1.7).

Литература

1. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределенным объектом* // АиТ. – 2006. – № 4. – С. 53-85.
2. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М., ЧЕРЁМУШКИНА Л. А. *Исследование условий устойчивости системы управления линейным объектом* теплопроводности // УБС. – 2010. – № 4. – С. 53-85.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ШАБАТ Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Физматгиз, 1958.
   СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью ао граничным условиям* // АиТ. – 2002. – № 9. – С. 15-26.
4. СОЛНЕЧНЫЙ Э. *М. Вырожденные системы и их использование в задаче синтеза заданного поведения.* – М.: Наука, 1989.

INVESTIGATION OF CAUSALITY AND STABILITY CONDITION OF A LINEAR HEAT-CONDUCTIVITY OBJECT CONTROL SYSTEM (SPECIAL CASES). PART II

Engel Solnechnyi, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, solnechn@ipu.ru)
Ludmila Cheryomushkina, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, l.a.cheryom@yandex.ru)

Abstract: For more one special kind of boundary conditions of stable one-dimensional object of heat conductivity of finite length estimations of norms of the operators translating boundary influences in the object temperature are received. These estimations are used for finding of a sufficient condition of causality and stability for the system consisting of studied object and a nonlinear feedback.

Keywords: system with feedback, causality, stability, distributed dynamic system, a linear heat conduction object, complex-variable functions theory.