

УДК 519.816

ББК 22.18

СНИЖЕНИЕ ЗАТРАТ НА ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПО СРАВНЕНИЮ С ТРАДИЦИОННЫМ ПОДХОДОМ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Салтыков С.А.¹

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

По результатам вычислительного эксперимента использование решающих правил теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности примерно в 2-5 раз по сравнению с традиционным подходом теории полезности. Для отбора из двух вариантов на основании двух критериев доказана теорема, определяющая количественно, во сколько раз при использовании теории важности критериев снижается доля случаев, когда нужно строить функцию ценности.

Ключевые слова: многокритериальный анализ решений, теория важности критериев, функция ценности, снижение затрат, имитационное моделирование.

1. Введение

Решать многокритериальные задачи можно разными методами: методом теории полезности (с построением функции полезности или ценности) [2], теории важности критериев [3], методом взвешенной суммы. В работе [9] были

¹ Салтыков Сергей Анатольевич, младший научный сотрудник (ssaltykov@mail.ru)

проанализированы эти три метода, и было показано, что доля случаев, когда использование метода взвешенной суммы может привести к ошибочному отбору из множества вариантов, весьма высока – может достигать 35-40%. Даже в самых «благоприятных» для метода взвешенной суммы случаях эта доля не опускается ниже полутора процентов. Если из специфики предметной области известно, что «цена» одной такой ошибки значительна, то, по-видимому, придется использовать методы, корректно учитывающие характер роста предпочтений ЛПР при движении вдоль шкалы. Например, методы теории полезности или методы теории важности критериев. Поскольку построение функции ценности – всегда весьма трудоемкая операция, актуальным становится снижение доли случаев, когда придется строить функцию ценности. В работе [9] показано, что использование решающих правил теории важности критериев позволяет определять наилучший вариант, не строя функцию ценности примерно в 39-66% случаев. В данной работе мы пойдем дальше и выясним, во сколько раз использование теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности по сравнению с традиционным подходом теории полезности. На наш взгляд, количественная оценка снижения затрат времени будет еще более способствовать технико-экономическому обоснованию применения решающих правил теории важности критериев. В данной работе анализируется класс ситуаций, когда варианты оцениваются по нескольким критериям, имеющим общую балльную шкалу.

Работа является продолжением и развитием исследований [6, 1, 7, 8, 9].

2. Описание используемой многокритериальной модели

Многокритериальная модель, рассматриваемая в статье, может быть представлена следующим образом:

$$(1) \langle S, K_1, \dots, K_m, R \rangle,$$

где S – это множество вариантов решений (стратегий, планов, альтернатив и т.д.), далее называемое множеством вариантов; $K_1, \dots, K_m$ – критерии (целевые функции и т.д.); R – отношение нестрогого предпочтения.

Поясним представленную модель (1). Каждый вариант s из множества S всех (данных) вариантов характеризуется значениями $m \geq 2$ критериев K_i . Под критерием K_i мы понимаем функцию, определенную на множестве S и принимающую значения из множества X_i , называемого шкалой (а также множеством оценок, шкальных градаций, значений критериев). Без ограничения общности будем считать, что все оценки выражены в численном виде, и большие значения предпочтительней меньших. Таким образом, каждый вариант s характеризуется значениями $K_i(s)$ всех критериев, формирующих вектор оценок этого варианта, или его векторную оценку $x(s) = (K_1(s), \dots, K_m(s))$. Следовательно, варианты сравниваются по предпочтительности посредством сопоставления их векторных оценок. Множество всех векторов оценок $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Мы предполагаем далее, что критерии являются однородными, т. е. имеют одинаковую (общую) шкалу $X_0 = X_1 = \dots = X_m$ (так что $X = X_0^m$); более того, если критерий K_j заменить на $\xi(K_j)$, где ξ – некоторое допустимое преобразование, определяемое типом шкалы, то и все остальные критерии K_i следует заменить на $\xi(K_i)$. Примем также, что множество X_0 конечно: $X_0 = \{1, \dots, q\}$. Элементы этого множества будем называть шкальными градациями.

Предпочтения ЛПП моделируются отношением предпочтения R на X : xRu означает, что вектор оценок x не менее предпочтителен, чем u . Отношение R порождает отношения безразличия I и (строгого) предпочтения P : xIu имеет место, когда справедливо xRu и uRx ; xPu выполнено, когда верно xRu и неверно uRx .

В данной работе рассматриваются отношения нестрогого предпочтения Парето P^0 ; количественной важности критериев с порядковой шкалой $R^\ominus$ [4] или шкалой первой порядковой

метрики при замедлении роста предпочтений вдоль шкалы $R^{\Theta \& D}$ [5].

Информацию о количественной важности критериев будем использовать в форме значений важности критериев – чисел β_i , $1 \leq i \leq m$, так как это более удобно для целей проводимого вычислительного эксперимента. Функцию ценности будем задавать в аддитивном виде, сопоставляя каждой шкальной градации k её ценность $v(k)$.

3. Описание вычислительного эксперимента с использованием отношений предпочтения P^0 , R^{Θ} , $R^{\Theta \& D}$ и его результатов

Итак, проведем вычислительные эксперименты для получения ответов на вопросы, поставленные во введении. Сначала исследуем случай, когда используется отношение предпочтения Парето. В ходе проведения нового имитационного моделирования (вычислительного эксперимента) было решено 64 миллиона случайно сгенерированных многокритериальных задач. Предполагается, что отношение Парето является «очевидным», точнее очевидным для ЛПР является, доминирует ли какой-либо вариант над другим по Парето или нет. В то время как для других, более «сильных» отношений предпочтения почти всегда является не очевидным, доминирует ли данный вариант по ним над другим вариантом. То есть если есть два варианта, один оценивается по двум критериям на «отлично» и «отлично», а второй на «удовлетворительно» и «плохо», очевидно без построения функции ценности, что первый вариант лучше. Поэтому для того, чтобы определить долю случаев, когда приходится строить функцию ценности в традиционном подходе теории полезности, надо от ста процентов отнять долю случаев, когда отношения Парето достаточно для определения единственного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта. Вычислительный эксперимент для определения такой доли случаев был проведен в данном

исследовании, его результаты представлены в таблице 1. Кроме того, предполагается, что на определение значений критериев и важности критериев тратятся минуты работы одного специалиста, а на построение функции ценности при вдумчивом подходе – часы, а иногда и дни работы чаще всего нескольких специалистов, именно поэтому снижение доли случаев, когда необходимо строить функцию ценности так актуально.

Для определения того, в какой доле случаев придется строить функцию ценности при использовании решающих правил теории важности критериев, нужно от ста процентов отнять долю случаев, когда отношения предпочтения R^Θ или $R^{\Theta \& D}$ достаточно для определения единственного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта. Вычислительные эксперименты по определению вышеуказанных долей были проведены в работе [9], и для удобства читателя мы продублируем результаты из того эксперимента в таблицах 2 и 3 соответственно. Напомним, что варианты сравниваются по отношению предпочтения R^Θ , когда информации о скорости роста предпочтений вдоль шкалы критериев нет и, следовательно, можно применить методы теории количественной важности критериев с порядковой шкалой.

И если предполагать наличие информации о том, что предпочтения ЛПР растут вдоль шкалы (при движении от меньших градаций к большему) с затуханием (так называемая информация D), то можно применить методы теории количественной важности критериев со шкалой первой порядковой метрики. То есть варианты в этом случае будут сравниваться по отношению нестрогого предпочтения $R^{\Theta \& D}$.

Расчеты проводились при помощи специально разработанной компьютерной программы. Схема проведения вычислительного эксперимента подробно описана в работе¹ [9].

¹ В данном исследовании, как и в работе [9], используется «школьная» пятибалльная шкала («урезанная» до четырехбалльной). Более подробно возможность ее использования обсуждается в [9]. Для

Таблица 1. Доля случаев, когда отношения Парето достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта.

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,718	0,473	0,301	0,190	0,119	0,075	0,047	0,029
3	0,589	0,298	0,143	0,068	0,032	0,015	0,007	0,003
4	0,533	0,229	0,092	0,036	0,014	0,006	0,002	0,001
5	0,511	0,197	0,070	0,024	0,008	0,003	0,001	0,000
6	0,503	0,182	0,060	0,019	0,006	0,002	0,001	0,000
7	0,506	0,176	0,055	0,016	0,005	0,002	0,000	0,000
8	0,515	0,174	0,052	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
9	0,529	0,176	0,051	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000

Таблица 2. Доля случаев, когда количественной важности критериев достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта; 5 различных значений важности критериев

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,850	0,738	0,669	0,627	0,602	0,585	0,574	0,566
3	0,778	0,624	0,536	0,484	0,454	0,435	0,422	0,415

других стран результаты, полученные на ее основе, могут быть менее репрезентативными.

4	0,754	0,574	0,472	0,413	0,380	0,359	0,345	0,336
5	0,753	0,554	0,439	0,374	0,336	0,313	0,298	0,287
6	0,763	0,549	0,422	0,350	0,307	0,281	0,265	0,255
7	0,778	0,550	0,412	0,333	0,288	0,259	0,243	0,231
8	0,796	0,554	0,406	0,323	0,273	0,243	0,224	0,212
9	0,813	0,560	0,404	0,315	0,263	0,230	0,210	0,197

Таблица 3. Доля случаев, когда количественной важности критериев и информации D достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта; 5 различных значений важности критериев

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,938	0,888	0,863	0,832	0,813	0,816	0,806	0,807
3	0,903	0,831	0,783	0,743	0,731	0,720	0,710	0,713
4	0,898	0,801	0,739	0,698	0,660	0,649	0,637	0,633
5	0,890	0,788	0,705	0,659	0,635	0,609	0,594	0,585
6	0,897	0,773	0,696	0,637	0,603	0,581	0,551	0,558
7	0,907	0,778	0,691	0,628	0,589	0,564	0,535	0,530
8	0,910	0,787	0,694	0,618	0,575	0,539	0,517	0,508
9	0,920	0,781	0,683	0,605	0,550	0,533	0,501	0,481

4. Количественная оценка снижения затрат на построение функции ценности при использовании решающих правил теории важности критериев

Определим, во сколько раз снижаются затраты на построение функции ценности при использовании решающих правил теории важности критериев по сравнению с традиционным подходом теории полезности. Другими словами, во сколько раз снижается доля случаев, когда не удается определить единственный недоминируемый вариант по отношению P^{Θ} и $P^{\Theta \& D}$ по сравнению долей случаев, когда не

удается определить единственный недоминируемый вариант по отношению Парето. Предполагается, что операция определения доминируемости по отношению Парето является «очевидной» для ЛПР в отличие от отношений $P^\ominus$ и $P^{\ominus \& D}$.

Например, для случая отбора из трех вариантов на основании трех критериев вероятность определить наилучший вариант по отношению Парето – 29,8%, а по отношению $P^\ominus$ – 62,4%. То есть, при следовании традиционному подходу теории полезности функцию ценности придется строить в $100 - 29,8 = 70,2\%$ случаев, а при использовании решающего правила теории важности критериев, не налагающего никаких ограничений на характер возрастания предпочтений ЛПР вдоль шкалы, $100 - 62,4 = 37,6\%$ случаев. Получается, что доля случаев, когда нужно тратить время на построение функции ценности уменьшается в $70,2 / 37,6 \approx 1,87$ раза! Аналогично, можно посчитать, что если для данной балльной шкалы критериев верен закон «убывающей предельной полезности» (полезности/ценности для ЛПР), то эти затраты времени по сравнению с традиционным подходом сократятся в $(100 - 29,8)/(100 - 83,1) \approx 4,15$ раза! Результаты, полученные таким образом, представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4. Отношение долей случаев, когда функцию ценности придется строить в подходе теории полезности и при использовании количественной важности критериев; 5 различных значений важности критериев.

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1,880	2,011	2,112	2,172	2,214	2,229	2,237	2,237
3	1,851	1,867	1,847	1,806	1,773	1,743	1,718	1,704
4	1,898	1,810	1,720	1,642	1,590	1,551	1,524	1,505
5	1,980	1,800	1,658	1,559	1,494	1,451	1,423	1,403

6	2,097	1,814	1,626	1,509	1,434	1,388	1,359	1,342
7	2,225	1,831	1,607	1,475	1,397	1,347	1,321	1,300
8	2,377	1,852	1,596	1,455	1,370	1,320	1,289	1,269
9	2,519	1,873	1,592	1,438	1,351	1,297	1,266	1,245

Таблица 5. Отношение долей случаев, когда функцию ценности придется строить в подходе теории полезности и при использовании количественной важности критериев с информацией D; 5 различных значений важности критериев.

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4,548	4,705	5,102	4,821	4,711	5,027	4,912	5,031
3	4,237	4,154	3,949	3,626	3,599	3,518	3,424	3,474
4	4,578	3,874	3,479	3,192	2,900	2,832	2,749	2,722
5	4,445	3,788	3,153	2,862	2,718	2,550	2,461	2,410
6	4,825	3,604	3,092	2,702	2,504	2,382	2,225	2,262
7	5,312	3,712	3,058	2,645	2,421	2,289	2,151	2,128
8	5,389	3,878	3,098	2,579	2,344	2,167	2,070	2,033
9	5,888	3,763	2,994	2,494	2,213	2,139	2,004	1,927

5. Аналитический вывод

Для класса ситуаций отбора из двух вариантов на основе двух критериев произведем следующие аналитические выводы, представленные двумя нижеследующими теоремами и следствиями из них. Для других классов ситуаций получить

применением одной формулы числа, приведенные в таблицах 4 и 5, пока не удастся.

Теорема 1. Пусть l – максимальное число различных значений важности критериев, n – число вариантов, m – число критериев, а $Q(n, m, l)$ – доля случаев, когда функцию ценности можно не строить (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения для ЛПР). Тогда:

$$Q(2,2,l) = \frac{107l + 9}{128l}.$$

Доказательство.

Доказательство основано на переборе сопоставлений всех векторных оценок с четырьмя градациями друг с другом по отношению предпочтения P^θ . Это сопоставление основывается на применении решающего правила, приведенного в [4]. Рассмотрим его применение на примере сравнения по предпочтительности двух векторных оценок $s_1 = (5;3)$ и $s_2 = (4;4)$. Предположим, что значения важности критериев есть $x > 0$ и $y > 0$. Их сравнение по отношению предпочтения P^θ сводится к сравнению по отношению Парето оценок $e_1 = (x; x; x+y)$ и $e_2 = (0; x+y; x+y)$. Эти оценки получены следующим образом: первая компонента векторной оценки показывает, есть ли в исходной векторной оценке компонента, равная 5. Если она есть, то она учитывается столько раз, каково значение важности критерия. Вторая компонента оценки e показывает, есть ли в векторной оценке s компонента, большая или равная 4. Учитывается столько раз, каково значение важности критериев, где она присутствует. Аналогично определяется третья компонента векторной оценки e . Легко видеть, что оценки e_1 и e_2 не сравнимы по Парето, из этого следует, что оценки s_1 и s_2 не сравнимы по отношению P^θ . Результаты, полученные таким образом для случая, когда $x > y$, занесены в таблицу, изображенную на рисунке в Приложении 2. А для ситуации, когда важности двух критериев равны между собой – в Приложении 1. Темно-серым цветом выделены ячейки,

соответствующие случаям, когда варианты несравнимы по данному отношению предпочтения.

Таким образом, если важности критериев равны между собой, то доля случаев, когда функцию ценности можно не строить, будет:

$$1 - \frac{12 \times 2}{16^2} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}.$$

А если важности критериев не равны, то

$$1 - \frac{21 \times 2}{16^2} = 1 - \frac{21}{128} = \frac{107}{128}.$$

Предполагаем, что важность критерия представляется через значения важности критериев и принимает значения от 1 до l , тогда вероятность того, что значение важности второго критерия совпадет с первым (то есть, важности критериев будут

равны) будет $\frac{1}{l}$, соответственно, что важности критериев будут

не равны $\frac{l-1}{l}$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} Q(2,2,l) &= \frac{1}{l} \times \frac{29}{32} + \frac{l-1}{l} \times \frac{107}{128} = \frac{4 \times 29 + (l-1) \times 107}{128l} = \\ &= \frac{116 + 107l - 107}{128l} = \frac{107l + 9}{128l}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1 из теоремы 1. Пусть l – максимальное число различных значений важности критериев, n – число вариантов, m – число критериев, а $Q(n, m, l)$ – доля случаев, когда функцию ценности можно не строить. Тогда $Q(2,2,l)$ заключено в следующих пределах:

$$\frac{107}{128} \leq Q(2,2,l) < \frac{29}{32}$$

Следствие 2 из теоремы 1. Сравнение результатов теоремы 1 и экспериментальных расчетов.

$$Q(2,2,5) = \frac{17}{20} = 0,85$$

что в точности совпадает с опубликованными экспериментальными данными [9].

$$Q(2,2,9) = \frac{27}{32} = 0,84375 .$$

В работе [8] было опубликовано значение, округленное до трех знаков после запятой, 0,844. Отметим также, что теорема 1 позволяет не только получить данные, совпадающие с результатами вычислительного эксперимента для 5-ти и 9-ти различных значений важности критериев, но и получить результаты для любого числа различных значений важности критериев. В этом смысле эта теорема дает более общие результаты, нежели вычислительный эксперимент.

Следствие 3 из теоремы 1. Сравнение результатов теоремы 1 и ранее сделанных предположений: в статье [9] по результатам экспериментов было сделано предположение, что число различных значений важности критериев не влияет на содержательные выводы статьи, поэтому, где не указано обратное, далее использовалось 5 различных значений важности критериев. Теперь это показано аналитически. Действительно, при любом числе различных значений важности критериев доля случаев для двух вариантов и двух критериев, когда функцию ценности можно не строить колеблется от примерно 0,836 до 0,906, что не меняет содержательных выводов.

Теорема 2. Для данного класса ситуаций снижение затрат $Z(2,2,l)$ на построение функции ценности при использовании решающих правил Подиновского (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения ЛПР) по сравнению с традиционным подходом теории полезности составляет

$$Z(2,2,l) = \frac{12l}{7l-3} .$$

Доказательство.

Согласно перебору сравнения вариантов по отношению Парето, приведенному в таблице в Приложении 3 вероятность того, что при данных условиях взятия отношения предпочтения Парето будет достаточно для определения единственного недоминируемого варианта (с точностью до эквивалентности) будет равна:

$$1 - \frac{36 \times 2}{256} = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}.$$

В этой доле случаев строить функцию ценности не придется.

А отношение доли случаев, когда функцию ценности придется строить в традиционном подходе теории полезности и при использовании решающего правила теории важности критериев (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения ЛПР) будет

$$\begin{aligned} Z(2,2,l) &= \frac{1 - \frac{23}{32}}{1 - \frac{107l+9}{128l}} = \frac{9}{32} \div \frac{128l-107l-9}{128l} = \\ &= \frac{9}{32} \times \frac{128l}{21l-9} = \frac{3}{1} \times \frac{4l}{7l-3} = \frac{12l}{7l-3}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1 из теоремы 2. Для различных значений l (максимального значения различных значений важности критериев) $Z(l)$ заключено в пределах:

$$1,714 \approx \frac{12}{7} < Z(l) \leq 3.$$

Следствие 2 из теоремы 2.

$$Z(5) = \frac{60}{32} = \frac{15}{8} = 1,875,$$

что совпадает с экспериментально полученными данными в этой работе с точностью до ошибок округления.

6. Выводы

Для многокритериальных задач с однородными критериями с числом вариантов от 5 до 9 и числом критериев от 5 до 9:

1. Применение решающих правил теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности в 2-5 раз.
2. Одно лишь предположение о том, что закон убывающей «предельной полезности» верен для имеющейся в данной задаче балльной шкалы, позволяет существенно снизить затраты на построение функции ценности – преимущество перед теорией полезности растет примерно с 1,2-2 раз до 2-5 раз. Это обуславливает актуальность поиска операциональных способов констатирования наличия затухания скорости роста предпочтений ЛПР вдоль балльной шкалы.

Проведенное исследование позволяет более обоснованно применять теорию важности критериев как эффективный инструмент анализа многокритериальных задач принятия решений.

Литература

1. БАРЫШНИКОВ Ю. М. *О среднем числе вариантов, недоминируемых по сравнению В. В. Подиновского* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №6. – С. 161–167.
2. КИНИ Р. Л., РАЙФА Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения* / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981.
3. ПОДИНОВСКИЙ В. В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений*. – М.: Физматлит, 2007.

4. ПОДИНОВСКИЙ В. В. *Количественная важность критериев* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 5. – С. 110–123.
5. ПОДИНОВСКИЙ В. В. *Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №8. – С. 196–203.
6. ПОДИНОВСКИЙ В. В. *Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 3–9.
7. ПОДИНОВСКИЙ В. В. *Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах* // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 308–324.
8. САЛТЫКОВ С. А. *Экспериментальное сопоставление различных многокритериальных подходов* // Материалы XXXVI Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе», Ялта, Гурзуф, май 2009 г. Приложение к журналу «Открытое образование». – С. 315–317.
9. САЛТЫКОВ С. А. *Экспериментальное сопоставление методов взвешенной суммы, теории полезности и теории важности критериев для решения многокритериальных задач с балльными критериями* / Управление большими системами. Выпуск 29. М.: ИПУ РАН, 2010. С.16-41.

REDUCING COSTS OF CONSTRUCTION OF THE VALUE FUNCTION BY USING DECISION RULES OF THE CRITERIA IMPORTANCE THEORY FOR COMPARISON WITH THE TRADITIONAL APPROACH OF UTILITY THEORY

Sergey Saltykov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher, (ssaltykov@mail.ru).

Abstract: According to the results of computational experiment using the decision rules of the criteria importance theory can reduce the time spent on the construction of the value function at about 2-5 times compared with the traditional approach of utility theory. For the case of selection of the two variants on the basis of two criteria proved a theorem that quantified how many times reduces the proportion of cases, when you need to build a value function using the criteria importance theory.

Keywords: criteria importance theory, value function, reducing costs.

	5; 5; 5; 4	5; 3	5; 2	4; 5	4; 4	4; 3	4; 2	3; 5	3; 4	3; 3	3; 2	2; 5	2; 4	2; 3	2; 2
5; 5	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;2k;2k
5; 4		k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k
5; 3			k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k
5; 2				k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k
4; 5					k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k k;2k;2k
4; 4						0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k	0;2k;2k 0;2k;2k
4; 3							0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k
4; 2								0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k	0;k;k k;k;2k
3; 5									k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k k;k;2k
3; 4										0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;k;2k
3; 3											0;0;2k 0;0;2k	0;0;2k 0;0;2k	0;0;2k 0;0;2k	0;0;2k 0;0;2k	0;0;2k 0;0;2k
3; 2												0;0;k k;k;k	0;0;k k;k;k	0;0;k k;k;k	0;0;k k;k;k
2; 5													k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k	k;k;k k;k;k
2; 4														0;0;k 0;0;k	0;0;k 0;0;k
2; 3															0;0;k 0;0;k
2; 2															

Приложение 3

5,5	5,5:4	5,5:3	5,5:2	4,5	4,4	4,3	4,2	3,5	3,4	3,3	3,2	2,5	2,4	2,3	2,2
5,5															
5,4															
5,3															
5,2															
4,5															
4,4															
4,3															
4,2															
3,5															
3,4															
3,3															
3,2															
2,5															
2,4															
2,3															
2,2															