УДК 629.7.052
ББК 22.18

ИГРОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Андриенко А.Я.[1], Тропова Е.И.,[2] Чадаев А.И.[3]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Рассмотрена игровая постановка задачи импульсного терминального управления линейным нестационарным объектом при ограничении управляющих воздействий. Представлены принципы решения этой задачи с учетом действия априори ограниченных помех (ошибок измерения) в канале обратной связи системы. Даётся пример.

Ключевые слова: игровая постановка задачи управления, нестационарный объект, ограниченные помеха и управление.

1. Введение

Игровые задачи управления правомерно ставятся в следующих случаях.

1. Когда возмущения, действующие на разрабатываемую систему управления, определяются стратегией управления другой системы (или человека), цель которой противоположна цели искомого управления. Подобного рода конфликтная ситуация имеет место, например, в задаче преследования [2].

2. Когда неизвестны вероятностные характеристики возмущений и априори задаются лишь ограничения, стесняющие возмущения (например, ограничения по модулю возмущений). Заметим, что в этом случае возможны и другие подходы к фор-

[1] *Анатолий Яковлевич Андриенко, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор* (*vladguc@ipu.rssi.ru*).
[2] *Елена Ивановна Тропова, научный сотрудник* (*тел.* (*495*) *334-88-71*).
[3] *Александр Иванович Чадаев, старший научный сотрудник, кандидат технических наук* (*тел.* (*495*) *334-88-71*).

мированию управлений: вероятностный (в предположении равномерности распределения возмущений в допустимом диапазоне) [3] и адаптивный [4].

3. Когда в силу особой важности результатов работы системы управления требуется, чтобы отклонения от цели управления, характеризующие точность управления, не превосходили заданных значений при любых априорно допустимых сочетаниях возмущений и помех. Такое положение характерно, например, для систем жизнеобеспечения человека.

В статье ставится и решается задача формирования игровых принципов терминального управления линейным нестационарным объектом с учетом ограничений на управляющие воздействия; основное отличие этой задачи от известных [1 и др.] состоит в учете действия в канале обратной связи системы помех – ошибок измерения.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейный нестационарный объект управления, выходная координата которого измеряется в дискретные моменты времени i. Уравнения, описывающие объект, имеют вид

(1) $x_{i+1} = A_i \mathbf{v} + B_i \overline{u}_{1i}\ , \quad i = 0,1,..., I\ ,$

где $A_i = \| a_{in} \|$ – матрица-строка коэффициентов a_{in}, $n = 1,2,\ldots,N$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^{\mathrm{T}}$ – вектор возмущений, действующих на объект; $B_i = \| b_{ir} \|$ – матрица-строка коэффициентов b_{ir} $(r = 1,2,\ldots,i)$, $\overline{u}_{1i}$ – временная последовательность управлений $u_1, u_2,\ldots,u_i$; отметим, что в (1) отсутствует начальное управление u_0, обоснованный выбор которого в условиях поставленной задачи невозможен.

Измеренная сумма величины x_i и аддитивной случайной ошибки h_i $(y_i = x_i + h_i,\ i=1,2,\ldots,I)$ поступает на вход управляющего устройства. Управление должно удовлетворять неравенству

(2) $|u_i| \le U_i\ , \quad i = 1,2,...,I$ (2) ;

где U_i - допустимое значение абсолютной величины u_i.

Считается, что возмущения и ошибки измерения по абсолютной величине не превосходят соответственно некоторых известных величин $V^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots,N$, и H_i, $i = 1,2,\ldots,I$:

(3) $\left|v^{(n)}\right| \le V^{(n)}, \quad \left|h_i\right| \le H_i$.

При формулировке задачи синтеза системы управления условно будем рассматривать процесс управления объектом (1) как некоторую игру между «природой», воздействующей на процесс управления выбором значений $v^{(n)}$, а также ошибок измерения h_i , и «конструктором», определяющим функцию управления u_i , $i = 1,2,\ldots,I$, от измеренных координат объекта и предшествующих управлений u_j , $j = 1,2,\ldots,i$-1.

Примем, что исход игры характеризуется величиной $|x_{I+1}|$ (т.е. модулем значения выходной координаты в терминальный (I+1)-й момент времени), которую будем рассматривать как выигрыш для природы и проигрыш для конструктора: в интересах природы увеличить выигрыш $|x_{I+1}|$, а в интересах конструктора сделать свой проигрыш $|x_{I+1}|$ возможно меньшим.

Таким образом, ставится игровая задача определения функций $u_i = u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$, i=1,2,…,I, обеспечивающих выполнение условия

(4) $R = \inf\limits_{\mathbf{u}_I \in \omega_\kappa} \sup\limits_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_n} \left| x_{I+1}(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}, \bar{h}_I) \right|$,

где допустимые области ω_κ и ω_n определяются соответственно условиями (2) и (3).

Отметим, что одна из сторон в игре (природа) влияет на процесс управления не только воздействием возмущениями, но и посредством искажения используемой другой стороной информации об игровой обстановке (через помехи h_i в измерительном канале).

3. Решение задачи

Введя вектор $\bar{x}_i^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_I^*)$, координаты которого определяются соотношением

$$x_i^* = x_i - B_{i-1}\,\bar{u}_{1(i-1)} ,$$

будем использовать форму записи уравнений объекта:

(5) $\quad \bar{x}_{i+1}^{*} = \mathbf{A}_i \mathbf{v}\,, \quad i = 0,1,...,I \;\;,$

где $\mathbf{A}_i$ – матрица, составленная их строк A_r, $r = 0,1,\ldots,i$.

В соответствии с принципом динамического программирования вначале будем определять управление u_I^* в дискретный момент времени I. Представим для этого игровой критерий (4) в виде

(6) $$R = \inf_{\mathbf{u}_I \in \omega_\kappa} \; \sup_{\mathbf{v},\bar{h}_I \in \omega_n} \left| A_I \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{I-1} b_{Ir} u_r + b_{II} u_I \right| \;.$$

Рассмотрим вначале случай, когда отсутствуют ограничения (2) на управления. Величина u_I тогда представляет собой линейную функцию измеренных координат $\bar{y}_I$ и предшествующих управлений $\bar{u}_{I-1}$, которая с учетом критерия (6), а также уравнения (5) может быть представлена в виде

(7) $$u_I^* = -\frac{1}{b_{II}} \left(G_I \bar{y}_I^* + \sum_{r=1}^{I-1} b_{Ir} u_r \right) \;,$$

где $G_I = \| g_{I\ell} \|$ – матрица-строка искомых коэффициентов оптимального управления u_I^*; $\bar{y}_I^*$ – вектор, составленный из измеренных значений $y_i^* = x_i^* + h_i$ величин x_i^* $(i = 1,2,\ldots,I)$.

С учетом (7) игровой критерий запишем следующим образом:

(8) $$R(u_I^*) = \inf_{G_I} \; \sup_{\mathbf{v},\bar{h}_I \in \omega_n} \left| A_I \mathbf{v} - G_I \bar{y}_I^* \right| \;.$$

Любые сочетания по N уравнениям из числа I+1 уравнений (5) составляют равносильные системы линейных уравнений, т.е. они имеют одно и то же решение относительно вектора $\mathbf{v}$. Поэтому можно составить линейные комбинации из этих уравнений:

(9) $$\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1} \mathbf{v} = \boldsymbol{\theta}^{(I)} \bar{x}_I^* \;,$$

где $\boldsymbol{\theta}^{(I)} = \left\| \vartheta_{n\ell}^{(I)} \right\|$ – неособенная матрица произвольных коэффициентов $\vartheta_{n\ell}^{(I)}$ $(n = 1,2,\ldots,N; \quad \ell = 1,2,\ldots,I)$.

Решение системы уравнений (9)

$$\mathbf{v} = \left(\boldsymbol{\theta}^{(I)}\mathbf{A}_{I-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}^{(I)}\bar{x}_I^*$$

не зависит от выбора коэффициентов $\vartheta_{nI}^{(I)}$.

Для любой матрицы $\mathbf{G}_\text{I}$ возможно подобрать такую матрицу $\boldsymbol{\theta}^{(\text{I})}$ размера $N\times I$ и диагональную матрицу $\boldsymbol{\Delta}^{(I)} = \left\|\vartheta_n^{(I)}\right\|$ порядка N, чтобы соблюдалось равенство

(10) $\mathbf{G}_I = \mathbf{A}_I\boldsymbol{\Delta}^{(I)}\left(\boldsymbol{\theta}^{(I)}\mathbf{A}_{I-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}^{(I)}$.

В результате с учетом соотношения $\bar{y}_i^* = \bar{x}_i^* + \bar{h}_i$ условие (8) может быть представлено в виде

(11) $R(u_I^*) = \inf\limits_{\boldsymbol{\Delta}^{(I)},\boldsymbol{\theta}^{(I)}} \sup\limits_{\mathbf{v},\bar{h}_I\in\omega_n} \left| A_I\left[\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}^{(I)}\mathbf{v} - \boldsymbol{\Delta}^{(I)}\left(\boldsymbol{\theta}^{(I)}\mathbf{A}_{I-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}^{(I)}\bar{h}_I\right]\right|$.

Здесь $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}^{(I)}$ – диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны $1-\delta_n^{(I)}$.

Наибольшее значение критерия $|x_{I+1}|$ по всем возможным величинам возмущений и помех достигается, если величины $v^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots,N$, и h_i, $i = 1,2,\ldots,I$, равны по абсолютной величине их предельно допустимым значениям $V^{(\text{n})}$ и H_i соответственно, а знак совпадает со знаком коэффициентов, с которыми эти величины входят в (11). Таким образом, для определения управления u_I^* получаем условие

(12) $R(u_I^*) = \inf\limits_{\boldsymbol{\Delta}^{(I)},\boldsymbol{\theta}^{(I)}}\left(\left|\Xi_I\right|\mathbf{V} + \left|G_I\right|\overline{H}_I\right)$,

где $\Xi_I = \left\|\xi_{In}\right\| = A_I\widetilde{\Delta}^{(I)}$ – матрица-строка коэффициентов $\xi_{in} = a_{in}(1-\delta_n^{(I)})$, $n = 1,2,\ldots,N$; G_I определяется соотношением (10), а вертикальные черточки, в которые заключаются матрицы, означают, что все элементы матриц берутся по абсолютной величине; $\mathbf{V}$ – вектор, составленный из предельных значений возмущений.

В рассматриваемом случае, когда отсутствуют ограничения на управление, величина $R(u_I^*)$ не зависит от управлений, предшествующих последнему, и поэтому определение u_i^*, i =

1,2,…,I-1, может быть проведено исходя из других условий, формулируемых, например, в виде дополнительного игрового критерия.

В случае же, когда на управление наложено ограничение (2), оптимальное управление в момент I принимает вид

$$u_I^* = \begin{cases} u_I\,, & \text{если} \quad |u_I| \le U_{доп.I}\,, \\ U_{доп.I}\,\operatorname{sign} u_I\,, & \text{если} \quad |u_I| > U_{доп.I}\,, \end{cases}$$

где u_I – линейная функция измеренных в предшествующие моменты времени координат и предшествующих управлений, коэффициенты которой определяются при помощи матриц $\Delta^{(I)}$, $\theta^{(I)}$, полученных из условия (12).

Определение предшествующих управлений u_i^*, i = 1,2,…,I-1, может проводиться в нескольких вариантах. Ограничимся представлением одного из них.

Полагается, что величина $U_{доп.i}$ является неизвестной в моменты времени j = 1,2,…,i-1 и принимающей любое значение в диапазоне (0,U). Такой вариант имеет место, например, при оптимизации одной из взаимосвязанных систем с общими управляющими органами. В этом же варианте целесообразно определять управление и в том случае, когда значение $U_{доп.i}$ априори известно, но к качеству управления не предъявляется никаких дополнительных требований, помимо оговариваемых критерием $R(u)$.

При выборе управления u_i^*, i = 1,2,…,I-1, наиболее тяжелые для «конструктора» условия будущих управлений складываются при $U_{доп.s}$ = 0, s = i+1,i+2,…,I. С учетом ранее приведенных соотношений оптимальное управление определяется следующим образом:

$$(13)\quad u_i^* = \begin{cases} u_i\,, & \text{если} \quad |u_i| \le U_{доп.i}\,, \\ U_{доп.i}\,\operatorname{sign} u_i\,, & \text{если} \quad |u_i| > U_{доп.i}\,. \end{cases}$$

Здесь

$$u_i = \frac{1}{b_{Ii}}\left(G_i \bar{y}_i^* + \sum_{r=1}^{i-1} b_{ir} u_r \right),$$

а коэффициенты G_i определяются из условий

$$
(14)\quad \begin{aligned} & G_i = A_I \Delta^{(i)} \left(\theta^{(i)} A_{i-1}\right)^{-1} \theta^{(i)}; \\ & R(u_i^*) = \min_{\Delta^{(i)},\theta^{(i)}} \left(\left|\Xi_i\right| V + \left|G_i\right| \overline{H}_i\right); \quad \Xi_i = A_I \widetilde{\Delta}^{(i)}. \end{aligned}
$$

4. Демонстрационный пример

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим простейший пример: на объект управления, представляющий собой интегрирующее звено, действует одно возмущение V, а выходная координата измеряется через равные промежутки времени ΔT. Уравнение (1) в этом примере имеет вид

$$
(15)\quad x_{i+1} = (i+1)\Delta T\, v + \Delta T \sum_{r=1}^{i} u_r\,, \quad i = 0,1,..., I\ .
$$

Измеренное в моменты времени $i\Delta T$ с аддитивной ошибкой h_i значение выходной координаты y_i поступает на вход управляющего устройства, формирующего управление u_i, ограниченное по модулю величиной $U_{доп.i}$. Ограничиваются также и абсолютные величины ошибок измерения – величиной $H_i = H$, $i = 1,2,\ldots,I$. Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение условия (4).

Поскольку возмущение V является скаляром, то матрица коэффициентов θ содержит только одну строку, а матрицы $\mathbf{A}_i$ и $\Delta^{(i)}$ состоят из одного элемента, причем, как следует из (15), $\mathbf{A}_i = a_i = (i+1)\ \Delta T$. Ограничения на величину v не наложено; следовательно, в соответствии с изложенным $\Delta^{(i)} = 1$ ($i = 1,2,\ldots,I$). Как следует из (14), коэффициенты функции управления в момент времени i определяются из условий

$$
(16)\quad g_{i\ell} = (I+1)\vartheta_{1\ell}^{(i)} \Big/ \sum_{j=1}^{i} j\, \vartheta_{1j}^{(i)}\,, \quad \ell = 1,2,..., i;
$$

$$
(17)\quad R(u_i^*) = \min_{\vartheta_{i\ell}^{(i)}} \left[(I+1) H \sum_{\ell=1}^{i} \left|\vartheta_{1\ell}^{(i)}\right| \Big/ \left|\sum_{\ell=1}^{i} \ell\, \vartheta_{1\ell}^{(i)}\right| \right]; \quad i = 1,2,...,I\ .
$$

Условие (17) достигается при $\vartheta_{1\ell}^{(i)} = 0$ (ℓ = 1,2,…,i-1) и $\vartheta_{1i} \neq 0$. Это означает, что в (16) $g_{i\ell} = 0$ (ℓ = 1,2,…,i-1) и $g_{ii} = (I+1)/i$, а искомая оптимальная функция управления имеет вид (13), где

$$u_i = -\frac{1}{i\,\Delta T}\left[(I+1)y_i - (I+1-i)\Delta T\sum_{r=1}^{i-1} u_r\right], \quad i = 1,2,...,I \ .$$

В рассмотренном примере проявляется довольно типичная для игровых задач управления особенность: несмотря на то, что при синтезе системы не накладывалось ограничений на структуру алгоритма управления, оптимальное в игре управление формируется с учетом только части располагаемой информации о предыстории процесса управления.

Литература

1. КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Об одной задаче преследования* // Прикладная математика и механика. –1963. –вып.2. С.27-32.
2. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. –М.: Физматгиз, 1963.
3. ЦЫПКИН Я.З. *Адаптация и обучение в автоматических системах.*– М.: Наука, 1960.
4. Гаджиев М.Ю. О применении теории игр к некоторым задачам автоматического управления // Автоматика и телемеханика. –1964. –№6.

GAME PRINCIPLES TERMINAL CONTROL OF NON-STATIONARY OBJECT

Anatolii Andrienko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru).

Elena Tropova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

Alexander Chadaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, cand. Sc., senior scientific worker, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

Abstract: Game statement of a problem of pulsed terminal control by linear non-stationary object is considered at restriction of control actions. Principles of the decision of this problem taking into account action of a priori limited noises in the channel of feedback of system are presented. The example is set.

Keywords: game statement of a problem control, non-stationary object, the limited noise and control.