

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ПРЯМОМ МЕХАНИЗМЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ НА СТРОГО ВЫПУКЛОМ КОМПАКТЕ

Бурков В.Н., Искаков М.Б., Коргин Н.А.
(Институт проблем управления РАН, Москва)
vlab17@bk.ru , mih_iskakov@mail.ru , 002@123.ru

Ключевые слова: активная экспертиза, неманипулируемые механизмы, эквивалентные прямые механизмы, диктаторство.

В статье рассматривается игровая задача активной экспертизы, в которой множество возможных результатов является многомерным, строго выпуклым и компактным. Для заданного механизма исследуется игра экспертов, манипулирующих своими сообщениями. В многокритериальной задаче для механизма строится соответствующий прямой механизм, который исследуется на неманипулируемость. Доказывается результат, что не существует эквивалентного прямого механизма, эквивалентного данному. Обсуждаются подходы к дальнейшему исследованию подобных задач – построение неманипулируемых механизмов наиболее близких к исходному.

Введение

Построение многокритериальных неманипулируемых механизмов активной экспертизы представляется актуальной практической задачей, т.к. подобные задачи встречаются повсеместно, а необходимость обеспечения объективности результатов экспертизы крайне важно. На данный момент задача построения неманипулируемого механизма активной экспертизы решена для однопиковых функций предпочтения экспертов и отдельных случаев множества возможных сообщений (и наиболее предпочтительных с их точки зрения результатов экспертизы) экспертов:

отрезка (одномерного компакта) [1, 2] – при моделировании экспертизы по одному критерию;

двумерного симплекса [3] – при моделировании экспертизы по двум критериям, связанным балансовым ограничением;

многомерного прямоугольника (декартова произведения одномерных отрезков) [3] – при моделировании многокритериальной экспертизы с несвязанными критериями, когда множество возможных значений каждого отдельно взятого критерия не зависит от конкретных значений остальных критериев.

Для более сложных видов множества возможных заявок экспертов задача построения неманипулируемых механизмов активной экспертизы остается актуальной. Одним из основных методов решения задачи является выяснение вопроса о существовании эквивалентного прямого механизма и его построение. Для исследования конкретного механизма экспертизы требуется определить равновесные стратегии экспертов для соответствующей игровой задачи, построить соответствующий прямой механизм и исследовать его на неманипулируемость. Именно таким методом было получено решение задачи экспертизы по одному критерию [1].

При распространении данного метода на многомерный случай возникают сложности с определением равновесных сообщений экспертов. Для решения задачи в предлагаемой статье используются методы нелинейной оптимизации, полунепрерывных отображений и неподвижной точки. Для наиболее часто рассматриваемых условий задачи активной экспертизы – механизма усреднения и функций предпочтения экспертов пропорциональных евклидовому расстоянию между точкой пика эксперта и результатом экспертизы – доказано существование и единственность равновесия, когда множество возможных сообщений и результата экспертизы является строго выпуклым компактом. Построен соответствующий прямой механизм. Приведен пример игры экспертов с манипуляцией при применении полученного механизма.

1. Постановка задачи

Рассматривается игровая задача активной экспертизы [1, 4]. Задача активной экспертизы является частным случаем задачи исследования и синтеза механизмов планирования (механизмов с сообщением информации). Приведем общую постановку этой задачи [5]. Рассматривается

двухуровневая многоэлементная организационная система, состоящая из центра и n агентов. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру информации $s_i \in S_i, i \in N = \{1, \dots, n\}$. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам планы $x_i = p_i(s) \in X_i \subseteq \mathcal{R}^1$, где $p_i: S \rightarrow X_i, i \in N$ – процедура (механизм) планирования, $s = (s_1, \dots, s_n) \in S = \prod_i S_i$ – вектор

сообщений всех агентов. Функция предпочтения агента $K_i(x_i, r_i): X_i \times R_i \rightarrow \mathcal{R}^1$ зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и некоторого параметра – типа агента r_i , под которым обычно понимается точка пика, единственного, как обычно предполагается, максимума его функции предпочтения, то есть наиболее выгодного с точки зрения агента значения плана. Для задачи активной экспертизы множества сообщений, значений плана и возможных значений точек пика совпадают: $S_i = X_i = R_i = A$.

При исследовании задачи планирования обычно считается, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть s^* – вектор равновесных стратегий. Если равновесий более чем одно, то вводится соответствие отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное. Точка равновесия $s^* = s^*(r)$ в общем случае зависит от типа всех агентов $r = (r_1, \dots, r_n)$. Первым этапом исследования задачи планирования является поиск равновесия $s^*(r)$ в игре агентов и центра.

Так как решение, принимаемое центром (результат экспертизы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностями своего влияния на решения центра, чтобы получить наиболее предпочтительный для себя результат экспертизы. При этом полученная центром информация может не быть истинной. Если в механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией всех агентов, то такой механизм называется *неманипулируемым*. Важнейшей задачей, решаемой при синтезе механизма планирования, наряду с поиском оптимального механизма, является задача поиска неманипулируемых механизмов.

Одним из основных путей поиска неманипулируемых механизмов является выяснение вопроса о существовании эквивалентного механизма и его построение. Соответствующим механизму $p(\cdot): S \rightarrow X$ прямым механизмом планирования $h(\cdot): R \rightarrow X$ называется механизм $h(r) = p(s^*(r))$, ставящий в соответствие вектору точек пика агентов вектор планов. Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией всех агентов (то есть если соответствующий механизм неманипулируем), то такой механизм называется *эквивалентным прямым механизмом*.

Теперь сформулируем постановку задачи активной экспертизы. На множестве A заданы точки предпочтений (точки пика) $r_i \in A$ экспертов $i = 1, \dots, n$. Действиями экспертов являются их сообщения $s_i \in A$, по которым определяется результат экспертизы $x = p(s)$. При выборе действий игроки руководствуются своими целевыми функциями $K_i(x) = K_i(p(s))$. Таким образом, чтобы сформулировать условия конкретной задачи активной экспертизы, требуется задать три элемента: множество A , функцию $p(\cdot)$, задающую механизм экспертизы, и целевые функции $K_i(\cdot)$. Для исследования механизма экспертизы требуется определить равновесные стратегии игровой задачи, построить соответствующий прямой механизм и исследовать его на неманипулируемость.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть A – m -мерный строго выпуклый компакт. Результат экспертизы определяется согласно механизму усреднения

$$(1) \quad p_j(s) = x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{ij}, j = 1, \dots, m.$$

Целевая функция эксперта определяется как отрицательное значение евклидова расстояния между его точкой предпочтения и результатом экспертизы:

$$(2) \quad K_i(x(s_1, \dots, s_n)) = -d(x, r_i) = -\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - r_{ki})^2}.$$

2. Условие равновесия в игровой задаче и построение соответствующего прямого механизма

Для решения задачи предлагается рассмотреть отображение множества A в себя $s = F(x)$: $A \rightarrow A$, определяемое следующим образом. Предположим, что $x \neq r_i$, $i = 1, \dots, n$ – результат экспертизы. Тогда попробуем по известным параметрам x и r_i восстановить сообщения эксперта s_i . Восстановленным значениям этих сообщений будет решение задачи максимизации функции полезности (2), которую можно рассматривать как задачу нелинейной оптимизации (см. рис. 1):

$$(3) \quad s_i(x, r_i) = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x)s).$$

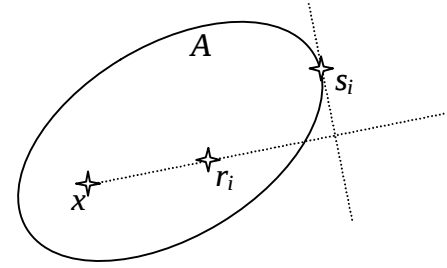


Рис. 1

Решение оптимизационной задачи единственно, так как в силу строгой выпуклости множества M значение аргмаксимума единственно. Теперь по восстановленным значениям стратегий игроков, соответствующим нашему предположению о результате экспертизы, можно определить вытекающий из этого результата действительный результат экспертизы:

$$(4) \quad F(x, r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i(x, r).$$

Для точки $x = r_j$ значения $s_i(x)$ определены только для $i \neq j$, так как под аргмаксимумом оказывается тождественный 0. В качестве результата отображения $F(x)$ в этом случае доопределим не единственную точку, а целое множество:

$$(5) \quad S_j = F(r_j) = \left\{ \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n s_i(x, r) + s \right) \mid s \in A \right\},$$

которое назовем областью диктаторства эксперта j . Решением задачи активной экспертизы будут такие наборы сообщений, при которых начальное предположение о результате экспертизы совпадет с восстановленным из него значением этого же результата $x \in F(x, r)$. Теперь сформулируем и докажем приведенные рассуждения строго.

Утверждение 1. Точка s^* – равновесие Нэша для игровой задачи активной экспертизы на строго выпуклом компакте $\Leftrightarrow x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^* \in F(x^*)$, $s_i^* = s_i^*(x) = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x)s)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть s^* – равновесие Нэша для игровой задачи активной экспертизы и $x^* \neq r_i$, $i = 1, \dots, n$. Допустим, что $s_i^* \neq \arg \max_{s \in A} ((r_i - x^*)s)$. Рассмотрим стратегию $s_i^* + (s_i^* - s_i^*)d$, где d – малая величина, а $s_i^* = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x^*)s)$. Игрок i сместившись в эту стратегию из s^* , тем самым изменит результат экспертизы с x^* на $x^* + (s_i^* - s_i^*) \frac{d}{n}$. Для любой стратегии $s_i^* \in A$, $s_i^* \neq s_i^*$ верно $(s_i^* - s_i^*)(r_i - x^*) > 0$, так как через точку s_i^* проходит касательная к множеству A , ортогональная вектору $(r_i - x^*)$. Из этого следует, что новый, смещенный результат экспертизы, вызванный изменением стратегии игрока i , находится ближе к точке r_i , чем исходный x^* . То есть игрок своим изменением стратегии увеличил свою целевую функцию, что в положении равновесия Нэша невозможно. Полученное противоречие показывает, что $s_i^* = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x)s)$. Это

означает, что $s_i^* = s_i^*(x)$ и, следовательно $x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^* = F(x^*)$.

Теперь рассмотрим случай $x^* = r_j$. Для всех игроков $i \neq j$ из аналогичного рассуждения следует, что $s_i^* = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x)s)$. Так как $s_j^* \in A$, то $x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^* \in S_j = F(x^*)$.

$\Leftarrow$. Пусть $x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^* \in F(x^*)$, $s_i^* = s_i^*(x) = \arg \max_{s \in A} ((r_i - x)s)$, и $x^* \neq r_i, i = 1, \dots, n$. Для

любой стратегии $s_i \in A, s_i \neq s_i^*$ верно $(s_i - s_i^*)(r_i - x^*) < 0$, так как через точку s_i^* проходит касательная к множеству M , ортогональная вектору $(r_i - x^*)$. Из этого следует, что изменившийся результат экспертизы $x^* + \frac{s_i - s_i^*}{n}$, будет находится дальше от точки r_i , чем x^* , то есть значение

целевой функции игрока i уменьшится. Это есть выполнение условий определения равновесия по Нэшу.

Допустим, $x^* = r_i$. Для любой стратегии $s_i \neq s_i^*, i \neq j$ верно $(s_i - s_i^*)(r_i - x^*) < 0$, то есть из аналогичных предыдущим рассуждений следует, что для всех экспертов, кроме j условия равновесия по Нэшу выполняются. Целевая функция эксперта j при $x^* = r_j$ принимает максимально возможное для нее значение 0, и это означает, что и для него условие равновесия тоже выполняется. •

Замечание. Если $F(r_j) \in S_j$, то неподвижная точка отображения x^* принадлежит области диктаторства S_j . Это означает, что эксперт j является диктатором, то есть может обеспечить совпадение результата экспертизы со своей точкой предпочтения.

Рассмотрим механизм активной экспертизы $h(r)$, ставящий в соответствие сообщаемому экспертами вектору точек их предпочтения неподвижную точку отображения $F(x)$. Из определения соответствующего прямого механизма и утверждения 1 вытекает следующее.

Следствие 1. Механизм $h(r)$ является соответствующим механизму $p(s)$ прямым механизмом.

3. Существование и единственность равновесия и соответствующего прямого механизма

Отображение $F(x)$ является полунепрерывным сверху отображением компакта в себя. Из этого следует существование неподвижной точки. Рассмотрим неподвижную точку $x^* \in F(x^*)$, и образ некоторой точки $x^* + d$ относительно гиперплоскости $xd = x^*$. Из построения функции $F(x)$ следует, что точка $F(x^* + d)$ не может находиться в полупространстве $xd > x^*$. То есть $x^* + d \neq F(x^* + d)$, и неподвижная точка единственна. Теперь сформулируем и докажем данное рассуждение строго.

Утверждение 2. Для отображения $F(x)$ существует единственная неподвижная точка $x^* \in F(x^*)$.

Доказательство. Существование неподвижной точки следует из теоремы Какутани о неподвижной точке [6, 7]. Приведем ее [7, т.2, с.699]:

«Пусть X – непустое выпуклое компактное множество в $\mathbf{R}^n$, X^* – множество его подмножеств и $f: X \rightarrow X^*$ – такое полунепрерывное сверху отображение, что для каждой точки $x \in X$ множество $f(x)$ непусто, замкнуто и выпукло; тогда отображение f имеет неподвижную точку».

Множество A – выпукло и компактно. Для $\forall x \neq r_j, x \in A$, отображение $f(x)$ является точкой, то есть непустым выпуклым компактным множеством. Для $x = r_j$ результатом отображения является множество диктаторства S_j , подобное множеству A , с коэффициентом подобия $1/n$, и следовательно непустым выпуклым компактом.

Покажем, что $F(x)$ полунепрерывно сверху, то есть, что $\overline{\lim} x_k = x \Rightarrow \overline{\lim} F(x_k) \subseteq F(x_k)$. Для точек $x \neq r_i$ отображение $F(x) = p(s(x))$ непрерывно в силу того, что непрерывны функции $p(\cdot)$ и $s_i(\cdot)$ (последняя функция непрерывна, если множество A – строго выпуклый компакт).

Рассмотрим точку $x = r_j$ и сходящуюся к ней последовательность x_k . Пусть $x_k \neq x, \forall k$ (для упрощения доказательства без потери общности). Для всех экспертов $i \neq j: s_i(x_k) \rightarrow s_i(x)$. Для эксперта $j: s_j(x_k)$ принадлежит границе $\mathbb{A}$ множества A . Согласно определению [3, т.4, с.569], верхним топологическим пределом называется множество точек, каждая окрестность которых пересекается с бесконечным числом множеств $F(x_k)$. Таковыми множествами (по предположению $x_k \neq x$) являются единичные точки. Рассмотрим любую сходящуюся подпоследовательность $s_j(x_k) \rightarrow s_j \in \mathbb{A}$ последовательности $s_j(x_k)$. По построению, множество диктаторства S_j связано отношением подобия с множеством A . Обозначим как $s_j \in S_j$ точку, в которую переходит точка s_j по этому отношению подобия. Последовательность $F(x_k)$ сходится к точке s_j . Для любой не сходящейся последовательности $s_i(x_k)$ соответствующая последовательность $F(x_k)$ также не будет сходиться. Из

этого следует, что $\overline{\lim} F(x_k) \subseteq \partial S_j \subset S_j = F(x)$. Таким образом, все условия теоремы Какутани выполнены, и неподвижная точка отображения $F(x)$ существует.

Единственность. Рассмотрим неподвижную точку $x^* = F(x^*)$, $x \neq r_i, \forall i$, Некоторую точку $x^* + d$ и ее образ $F(x^* + d)$ относительно гиперплоскости $x d > x^*$. Точка $x^* + d$ находится в полупространстве $x d > x^*$. По построению функции $F(x)$ точка $F(x^* + d)$ находится в области $x d \leq x^*$. То есть $x^* + d \neq F(x^* + d)$.

Пусть теперь $x = r_j$. Обозначим на границе ∂S_j точку $x' = \arg \max_{s \in S_j} (-ds)$. Точка $x^* + d$ находится в области $x d > x^*$. Точка $F(x^* + d)$ находится в области $x d \leq x'$. То есть $x^* + d \neq F(x^* + d)$. •

Следствие 2. Механизм $h(r)$ является единственным соответствующим прямым механизмом для задачи активной экспертизы (1), (2).

4. Несуществование эквивалентного прямого механизма

При рассмотрении соответствующих прямых механизмов наиболее интересным является вопрос о том, имеется ли среди них эквивалентный исходному механизму (неманипулируемый). В следующем утверждении приводится пример, в котором для рассматриваемой задачи построенный единственный соответствующий механизм является манипулируемым.

Утверждение 3. В задаче активной экспертизы на многомерном выпуклом компакте с целевыми

функциями экспертов $K_i(x(s_1, \dots, s_n)) = -d(x, r_i) = -\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - r_{ki})^2}$ соответствующий механизму

$p(\cdot) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i$ прямой механизм $h(r)$ не является эквивалентным прямым (неманипулируемым) механизмом.

Доказательство. Рассмотрим пример: $A = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}; n = 4$; первые два игрока имеют при голосовании одинаковый вес близкий к 0,5 и точки предпочтения $r_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), r_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, третий и четвертый игроки с одинаковым малым весом имеют точки предпочтения $r_3 = (0, 1), r_4 = (0, -1)$. Предположим, что игроки сообщают правду, $s_i = r_i$. Тогда в предполагаемой точке равновесия результатом экспертизы будет точка $x = (0, 0)$. При таких условиях третий игрок может изменить свое сообщение на $\tilde{s}_3 = (d, \sqrt{1-d^2})$, где d мало, то есть немного сдвинуть свое сообщение по часовой стрелке по окружности. Тогда результат механизма неподвижной точки $h(\cdot)$ окажется расположенным в квадранте $y_1 > 0, y_2 > 0$. Второй игрок, отклоняясь от правдивого сообщения, получает увеличение своей функции полезности. То есть имеет место манипуляция. •

Следствие 3. Для задачи активной экспертизы (1), (2) в общем случае не существует эквивалентных прямых механизмов.

Отсутствие решения в классе эквивалентных механизмов ставит новую задачу поиска механизмов «с минимальной манипуляцией». Такая задача (для случая одномерного множества M) сформулирована в [1, с. 77] следующим образом (с точностью до обозначений). Максимальную погрешность механизма $h(r)$ в ситуации равновесия $s^*(r)$

$$(6) \quad \Delta_h = \max_{r \in A} |h(s^*(r)) - h(r)|$$

примем в качестве оценки эффективности механизма $h(r)$. Поставим задачу определить оптимальный механизм $h^0(r)$, имеющий минимальную погрешность Δ_h .

Заключение

В предложенной статье была решена задача построения соответствующего прямого механизма для многокритериальной активной экспертизы на строго выпуклом компактном множестве. В ходе исследования были использованы методы нелинейной оптимизации, полунепрерывных отображений и неподвижной точки. Для наиболее часто рассматриваемых условий задачи активной экспертизы –

механизма усреднения и функций предпочтения экспертов пропорциональных евклидовому расстоянию между точкой пика эксперта и результатом экспертизы – доказано существование и единственность равновесия. Построен соответствующий прямой механизм. Приведен пример игры экспертов с манипуляцией при применении полученного механизма, чем доказано несуществование эквивалентного прямого механизма в общем случае. Указаны подходы к дальнейшему исследованию подобных задач – построение неманипулируемых механизмов наиболее близких к исходному.

Литература

1. *Большие системы: моделирование организационных механизмов* / В.Н. БУРКОВ, Б. ДАНЕВ, А.К. ЕНАЛЕЕВ и др. М.: Наука, 1989. – 246 с.
2. НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
3. ИВАЩЕНКО А.А., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Модели и методы оценки эффективности портфеля проектов*. // Системы управления и информационные технологии, 2005, № 3(20), с. 92-98
4. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями*. М.: Синтег, 2004. – 400 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 584 с.
6. KAKUTANI S., "Duke Math. J.", 1941, v. 8, N 3, p. 457–459.
7. Математическая энциклопедия: гл. ред. И.М. Виноградов, М., «Советская энциклопедия», 1977–1984, статьи: Какутани теорема, полунепрерывное отображение, предел.