

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ ПИД УПРАВЛЕНИИ. ЧАСТЬ 1

**А. М. Шубладзе**

*(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
РАН, г. Москва)*

[shub@ipu.rssi.ru](mailto:shub@ipu.rssi.ru)

**В. Е. Попадько, А. А. Якушева**

*(Российский государственный университет нефти и газа  
им. И.М. Губкина, г. Москва)*

[yakusheva\\_a@mail.ru](mailto:yakusheva_a@mail.ru)

**С. И. Кузнецов**

*(ОАО НИИТЕПЛОПРИБОР, г. Москва)*

*В работе рассматривается синтез систем управления по критерию максимальной степени устойчивости для ПИД – закона управления. Проводится исследование основных оптимальных по степени устойчивости решений, что позволило наметить дальнейший путь развития метода машинным способом.*

Ключевые слова: синтез систем максимальной степени устойчивости, исследование оптимальных по степени устойчивости решений.

## **Введение**

Работа продолжает ряд публикаций [1-7] по синтезу систем максимальной степени устойчивости. В [1] предлагался способ синтеза указанных систем, который применим только для определенного, достаточно узкого класса объектов управления. В [2-5] рассмотрена возможность синтеза систем максимальной степени устойчивости на основе метода D-разбиений, который позволяет определить значение максимальной степени устойчи-

ности и соответствующие ей настроечные параметры ПИД регулятора. Однако этот метод не дает возможности находить значения крайних правых корней оптимального характеристического полинома замкнутой системы, определяющих значение максимальной степени устойчивости. В [6,7] для объектов произвольного вида решались задачи по синтезу систем максимальной степени устойчивости, где были получены достаточные условия оптимальности, сводящиеся к решению систем нелинейных алгебраических уравнений. И если для объектов низких порядков (до 6-го порядка включительно) эти уравнения еще можно решать, то для высоких порядков объекта управления нахождение оптимальных решений связано со значительными вычислительными трудностями. Поэтому в работе [8] для практически важного случая ПИ управления было проведено исследование оптимальных по степени устойчивости решений, которое наглядно продемонстрировало специфику оптимальных решений и позволило наметить путь машинного способа их нахождения.

В настоящей работе будет проведено исследование 4 из возможных 9 оптимальных по степени устойчивости решений для ПИД закона управления, представляющих практический интерес у широкого круга разработчиков систем управления технологическими процессами. Оставшиеся 5 решений предполагается исследовать в следующей статье.

При решении указанных задач считается, что связь между выходным сигналом объекта и сигналом управления задается дифференциальным уравнением

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i x^{(i-1)}(t) = k_0 u(t),$$

где,  $x^{(i)}(t) (i = 0, \dots, n)$ ,  $n \geq 3$  - фазовые координаты,  $a_i$  и  $k_0$  - параметры,  $u(t)$  – ПИД управление

$$(2) \quad u(t) = u_{\text{ПИ}}(t) = k_{\text{П}} \varepsilon(t) + k_{\text{И}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + k_{\text{Д}} \dot{\varepsilon}(t),$$

$$(3) \quad \varepsilon(t) = g(t) - x(t), \quad g(t) - \text{задающее воздействие.}$$

Оптимизируемыми являются параметры  $k_{\Pi}$ ,  $k_{\Pi}$  и  $k_{\mathcal{D}}$ . Указанные параметры выбираются так, чтобы выполнялось условие максимальной степени устойчивости [6]

$$(4) \quad I_{\text{оп}} = -\min \max \operatorname{Re} \lambda_j(k_{\Pi}, k_{\Pi}, k_{\mathcal{D}}),$$

где  $\lambda_j$  - корни характеристического полинома

$$(5) \quad D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i \lambda^i + k_0(k_{\Pi} \lambda + k_{\Pi} + \lambda^2 k_{\mathcal{D}}).$$

В (5) после замены  $\lambda$  на  $\lambda_1 - I_{\text{оп}}$  при  $k_{\Pi} = k_{\Pi_{\text{оп}}}$ ,  $k_{\Pi} = k_{\Pi_{\text{оп}}}$  и  $k_{\mathcal{D}} = k_{\mathcal{D}_{\text{оп}}}$  характеристический полином при выполнении (4) на основании [6] принимает вид

$$(6) \quad D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\mathcal{D}_{\text{оп}}}) = \lambda_1^{n_g} \prod_{i=1}^{n_k} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[(n+1-n_g-2n_k)]}(\lambda_1) = \\ = \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=3}^n a_i^* \lambda_1^{i-1} + \sum_{i=1}^2 a_i^* (k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\mathcal{D}_{\text{оп}}}) \lambda_1^{i-1},$$

где

$$(7) \quad a_i^* = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} D_{(n+1)}(\lambda, k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\Pi_{\text{оп}}}, k_{\mathcal{D}_{\text{оп}}})}{\partial \lambda^{i-1}},$$

$i$ -ая производная  $D_{n+1}(\lambda)$  (5) при  $\lambda = -I_{\text{оп}}$ ,  $D_{1[(n+1-n_g-2n_k)]}(\lambda_1)$  - полином, не имеющий корней в правой полуплоскости,  $n_g$  и  $n_k$  - кратности нулевого корня и комплексно-сопряженных пар корней оптимального решения, расположенных на мнимой оси. Число пар комплексно-сопряженных корней определяется равенством

$$(8) \quad n_k = \sum_{i=1}^{n_k} \gamma_i$$

Рассматриваемая задача исследования решается на основе результатов, полученных в [6,7], и их геометрический смысл поясняется с помощью машинных методов оценивания устойчи-

ности систем управления. При этом используется модифицированный годограф Михайлова вида

(9)

$$Z_{n0}(i\omega) = \operatorname{Re} D_{l(n+1)}(i\omega) + i\omega^1 \operatorname{Im} D_{l(n+1)}(i\omega) = \operatorname{Re}_0(\omega^2) + i \operatorname{Im}_0(\omega^2)$$

Как следует из работ [6,7], при ПИД управлении в системе (1), (2) может иметь место одно из пяти оптимальных решений, при которых крайними правыми корнями характеристического полинома (5) может быть от четырех до шести корней. Исследуем каждое из них.

### **1. Случай действительных корней оптимального решения**

В этом случае имеют место условия

$$(10) \quad n_g = 4, n_k = 0,$$

при которых крайним правым корнем (5), (6) является один действительный корень кратности 3. Согласно [4] условие (10) может быть только при

$$(11) \quad a_i^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0, \Delta_f(0)(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0, (1 < j < n-3),$$

где,  $a_i^*$  - из (7),  $i = 1; 2; 3; 4$ ,  $\Delta_f(0)(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$  - определители Гурвица полинома (6). При выполнении (11) достаточность условия оптимальности следует из того, что значение крайнего правого корня полинома  $D_{l(n+1)}$  (6) равно значению крайнего правого корня его второй производной, т.е.  $\max \operatorname{Re} \lambda_{ii}(k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \max \operatorname{Re} \lambda_{ii,3}, i = 1, \dots, n$ , где  $\lambda_{ii}$  - корни  $D_{ln}(\lambda_i, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0$ , а  $\lambda_{ii,3}$  - корни третьей производной полинома (6)

$$(12) \quad \frac{\partial^3 D_{l(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})}{\partial \lambda_1^3} = 0$$

Любой отличающийся от (11) выбор  $k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}$  (2) приводит к уменьшению степени устойчивости  $I_{\text{оп}}$  (4), так как при этом в полиноме  $D_{l(n+1)}$  (6)  $a_4^*(I_{\text{оп}}) = 0$ ,  $a_i^*(I, k_{\text{П}}, k_{\text{И}}, k_{\text{Д}}) \neq 0$  хотя бы для одного  $a_i^*$  ( $i = 1; 2; 3$ ), что и нарушает необходимое условие устойчивости полинома  $D_{l(n+1)}$  (6).

Как следует из (6) и (11), минимальная степень при  $\omega$  в  $\text{Re}_0(\omega^2)$  и в  $\text{Im}_0(\omega^2)$  (9) равна четырем, поэтому годограф (9), изображенный на рис. 1, в рассматриваемом случае имеет вид

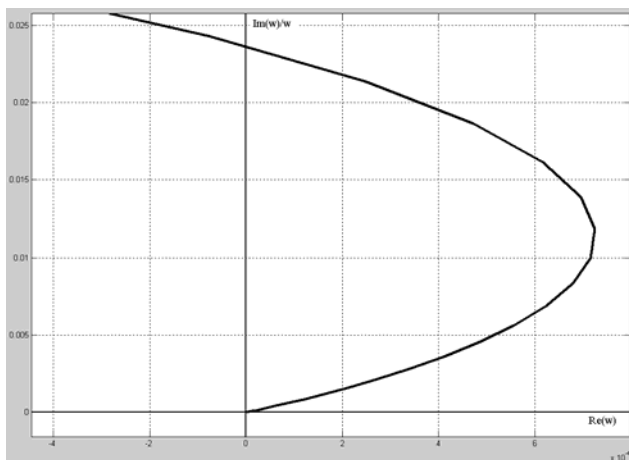


Рис. 1 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 1 получен для полинома (6), в котором  $D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20}$ ,  $n = 23, n_g = 4, n_k = 0$ .

Из годографа рис. 1 следует, что любое изменение  $k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{Иоп}}$  или  $k_{\text{Доп}}$  приводит к появлению корней полинома (6) в правой полуплоскости, т.е. к уменьшению степени устойчивости  $I$  системы (1), (2). Таким образом, вычисленные по формулам (7) и (11)  $k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{Иоп}}$  или  $k_{\text{Доп}}$  гарантируют в рассматриваемом случае максимальную степень устойчивости системы (1), (2).

## **2. Случай трех действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней.**

В этом случае имеют место условия

$$(13) \quad n_g=3, n_k=1, \gamma_1 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (5), (6) являются один действительный корень кратности 3 и одна комплексно-сопряженная пара корней. Согласно [6] условие (10) может быть только при

$$(14) \quad a_i^* (I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \Delta_{n-3}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0, (1 < j < n-4),$$

где  $a_i^*$  - из (7),  $i=1; 2; 3$ ,  $\Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$  - определители Гурвица размерности  $j$  ( $1 < j < n-3$ ) полинома (6). Четыре уравнения, из которых находятся  $I_{оп}$ ,  $k_{Поп}$ ,  $k_{Иоп}$ ,  $k_{Доп}$ , и  $(n-4)$  неравенства в (14) являются необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). Подтверждением этому является годограф (9), изображенный на рис. 2 и соответствующий уравнениям (14). Такой годограф не может иметь система максимальной степени устойчивости, т.к. очевидно, что вариацией параметров  $k_{П}$ ,  $k_{И}$  и  $k_{Д}$  в (2) его можно изменить таким образом, что он будет отвечать устойчивому полиному (6).

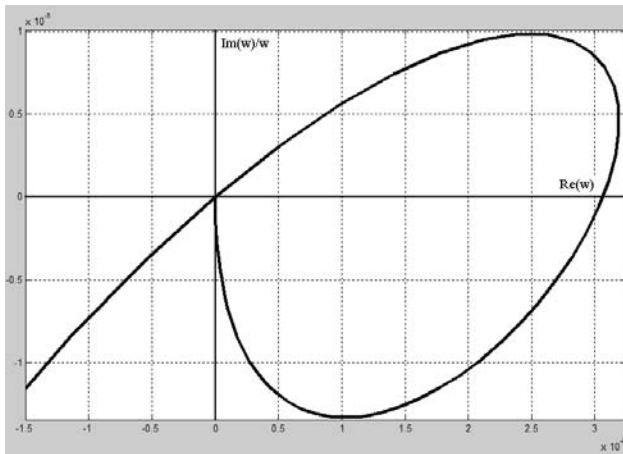


Рис. 2 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 2 получен для полинома (6), в котором

$$D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 3, n_k = 1, \gamma_1 = 1, \omega_1 = 0, 11.$$

$$D(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20}, n_g = 3, n_k = 1, \omega = 0, 3$$

Для получения достаточных условий оптимальности нужно к (14) добавить условие на направления годографа в точках пересечения им начала координат. В этом случае достаточными условиями оптимальности наряду с (14) будет условие на знак производной модифицированной мнимой части

$$(15) \quad \text{Im}_I(\omega_1^2) > 0$$

$$\text{где } \text{Im}_I(\omega^2) = \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im} D_{I(n+I)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad \omega_1 - \text{частота, на которой}$$

годограф  $Z_{n0}(i\omega)$  (9) пересекает начало координат.

Из годографа рис. 2 следует, что для него условие (15) не выполняется, т.к. рассматриваемая производная отрицательна. На рис. 3 изображен годограф (9), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (14), (15).

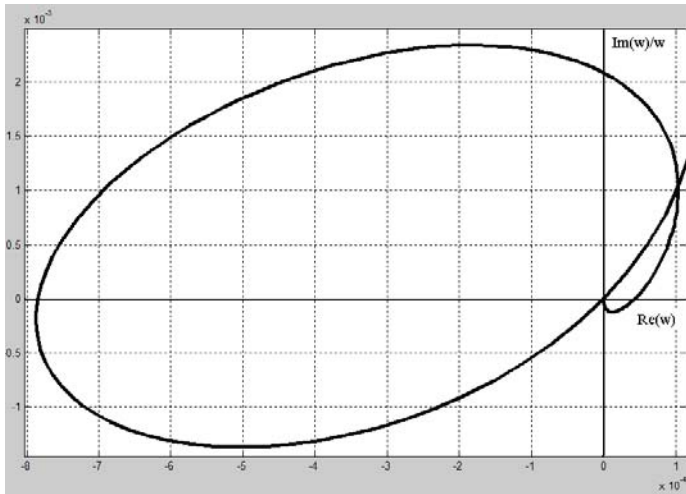


Рис. 3 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 3 получен для полинома (6), в котором

$$D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 3, n_k = 1, \gamma_1 = 1, \omega_1 = 0, 3.$$

Из годографа рис. 3 следует, любое изменение  $k_{\Pi}$ ,  $k_{\text{И}}$  или  $k_{\text{Д}}$  в рассматриваемом случае приводит к неустойчивости полинома (6). Таким образом, выполнение условий (14) и (15) обеспечивает в рассматриваемом случае максимальную степень устойчивости системы (1), (2).

### 3 Случай двух действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае имеют место условия

$$(16) \quad n_g=2, n_k=1, \gamma_1 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (5), (6) являются два действительных корня и одна комплексно-сопряженная пара корней. Согласно [6] условие (16) может быть только при



$$(17) \quad a_i^* (I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0 \quad (i = 1; 2), \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0, (1 < j < n-2),$$

где  $a_i^*$  - из (7),  $\Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$  - определители Гурвица размерности  $j$  ( $1 < j < n-2$ ) полинома (6). Из трех уравнений (17) невозможно найти четыре неизвестных  $I_{оп}$ ,  $k_{Поп}$ ,  $k_{Иоп}$  и  $k_{Доп}$ . Четвертое недостающее уравнение может быть получено из условия о том, что в рассматриваемом случае годограф (9) полинома (6) касается в начале координат действительной оси. Такой факт имеет место при выполнении условия

$$(18) \quad Im_l(\omega^2) = 0$$

где  $Im_l(\omega^2)$  из (15). Из (18) следует, что полином

$$(19) \quad D_{n_l}^*(\omega^2) = Im_0(\omega^2) + i\omega Im_l(\omega^2),$$

где  $n_l = 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1$ ,  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  - целая часть числа  $\frac{n+1}{2}$ , имеет

ту же комплексно-сопряженную пару корней, что и исходный полином (6). Поэтому в оптимальном случае справедливо уравнение

$$(20) \quad \Delta_{n_l-1}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}) = 0,$$

где  $\Delta_{n_l-1}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп})$  - определитель Гурвица размерности  $n_l-1$  полинома (19).

Из четырех уравнений (17) и (19) можно определить четыре неизвестных  $I_{оп}$ ,  $k_{Поп}$ ,  $k_{Иоп}$  и  $k_{Доп}$ . Но условия (17) и (19) являются необходимыми условиями оптимальности. Это подтверждается годографом (9) полинома (6), изображенным на рис. 4, для которого условия (17) и (20) выполнены, но очевидно, что увеличением параметров  $k_{Поп}$  и  $k_{Иоп}$  полином (6) может быть сделан устойчивым.

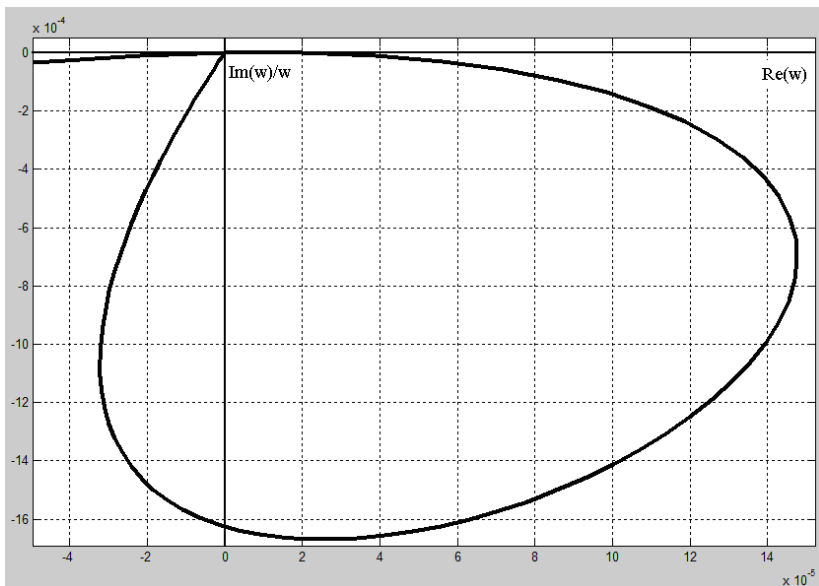


Рис. 4 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 4 получен для полинома (6), в котором  
 $D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20}$ ,  
 $n = 23, n_g = 2, n_k = 1, \omega_1 = 0,16$ .

Достаточные условия оптимальности можно получить добавлением к (17), (20) условия на направление годографа в точке пересечения им на частоте  $\omega_l$  начала координат. Это направление должно совпадать с направлением действительной оси, что имеет место при выполнении неравенства

$$(21) \quad \text{Re}_l(\omega_l^2) > 0,$$

где  $\text{Re}_l(\omega^2) = \frac{\partial \text{Re} D_{I(n+1)}(i\omega)}{\partial (\omega^2)}$ ,  $D_{I(n+1)}(i\omega)$  из (6).

Условия (17), (20) и (21) являются достаточными условиями оптимальности в рассматриваемом случае. На рис. 5 изображен годограф (9), соответствующий оптимальному по степени ус-

тойчивости решению и удовлетворяющий условиям (17), (20) и (21).

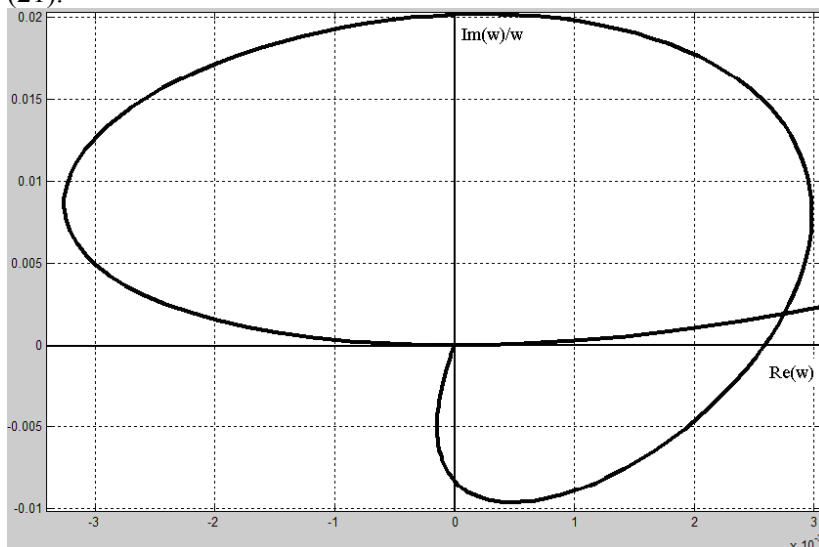


Рис. 5 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 5 получен для полинома (6), в котором  
 $D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20}$ ,  
 $n = 23, n_g = 2, n_k = 1, \omega_1 = 0,325$ .

#### 4 Случай двух действительных и двух пар комплексно-сопряженных корней

В этом случае имеют место условия

$$(22) \quad n_g=2, n_k=2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (5), (6) являются два действительных корня и две комплексно-сопряженные пары корней. Согласно [6] условие (22) может быть только при

$$(23) \quad a_i^*(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0 \ (i=1;2), \Delta^{(0)}_{n-1}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta^{(1)}_{n-4}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \Delta^{(0)}_j(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0,$$

где  $1 < j < n-4$ ,  $\Delta^{(0)}_{n-4}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ ,  $\Delta^{(1)}_{n-4}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$  – основной и побочный определители Гурвица полинома (6), описанные в [9]. Четыре уравнения, из которых находятся  $I_{\text{оп}}$ ,  $k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{Иоп}}$ ,  $k_{\text{Доп}}$  и  $(n-4)$  неравенства в (23) являются, как и в рассмотренных случаях 2 и 3, необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). На рис. 6 изображен годограф полинома (6), построенного из условий (23), но который не является годографом оптимальной системы.

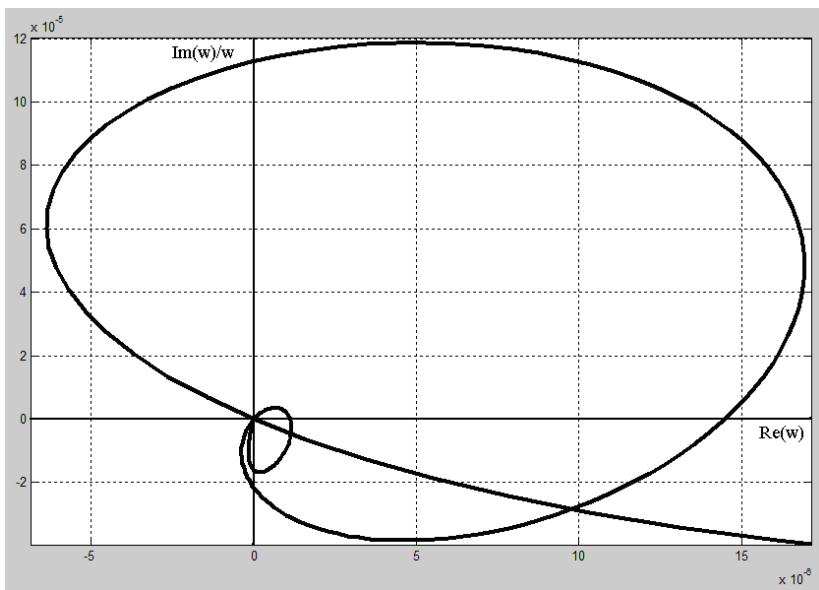


Рис. 6 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 6 получен для полинома (6), в котором  $D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40}$ ,  $n = 45, n_g = 2, n_k = 2, \omega_1 = 0, 1, \omega_2 = 0, 22$ .

Оптимальность такой системы имеет место при добавлении следующих неравенств

$$(24) \quad \langle (Im_l(0), -Re_l(0)), (Re_l(\omega_1^2), Im_l(\omega_1^2)) \rangle < 0$$

$$(25) \quad \text{Im}_I(\omega_1^2) \text{Im}_I(\omega_2^2) < 0,$$

где  $(\text{Im}_I(0), -\text{Re}_I(0))$  - вектор, перпендикулярный направлению годографа  $Z_{n0}(i\omega)$  при  $\omega = 0$ ,  $(\text{Re}_I(\omega_1^2), \text{Im}_I(\omega_1^2))$  - вектор направления годографа  $Z_{n0}(i\omega)$  при  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega_1 < \omega_2$ , функции  $\text{Im}_I(\omega^2)$  и  $\text{Re}_I(\omega^2)$  определены в (15) и (21) соответственно. Обоснование достаточности условий (23)-(25) следует из того, что при любом изменении  $k_D$  одна из комплексных пар корней переходит в правую полуплоскость, и никакими вариациями  $k_{\Pi}$  и  $k_{\text{И}}$  избавиться от неустойчивости не представляется возможным. На рис. 7 изображен годограф полинома (6) оптимальной системы.

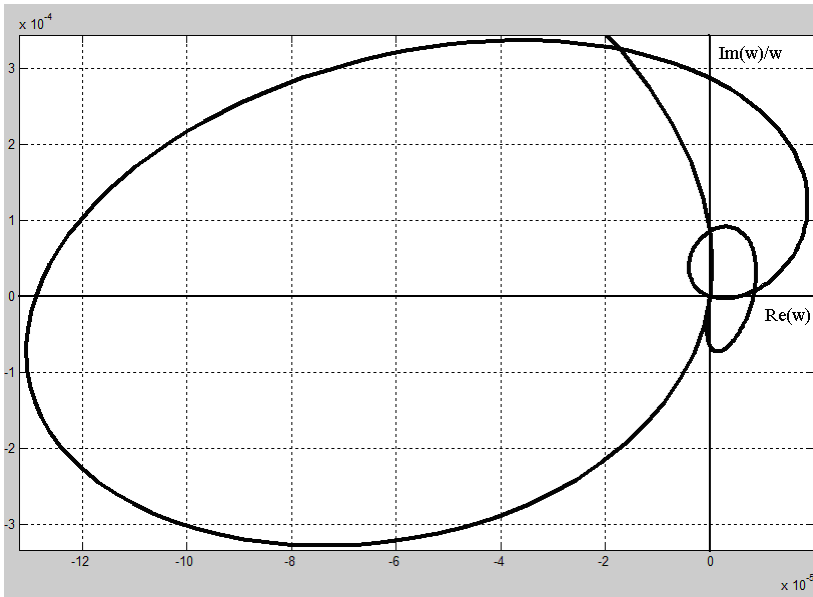


Рис. 7 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 7 получен для полинома (6), в котором  $D_{l[n+l-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{l[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40}$ ,

$$n = 45, n_g = 2, n_k = 2, \omega_1 = 0,15, \omega_2 = 0,28.$$

## **Заключение**

Таким образом проведено исследование пяти структур оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД законе управления. Получены достаточные условия оптимальности каждой из возможных оптимальных структур. С помощью машинных методов расчета построены годографы замкнутых систем управления, для которых в одном случае выполняются только необходимые условия оптимальности, в другом – достаточные условия. Вид построенных годографов оптимальных систем наглядно отражает геометрический смысл полученных решений.

## **Литература**

1. ГУРЕЦКИЙ Х. *Анализ и синтез систем управления с запаздыванием*. М.: Машиностроение, 1974.
2. НЕЙМАРК Ю.И. *Устойчивость линеаризованных систем* Л.:ЛКВВИА, 1949.
3. НЕЙМАРК Ю.И. *Динамические системы и управляемые процессы*. М. :Наука, 1978.
4. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление*. М. :Наука, 2002.
5. ГРЯЗИНА Е.Н. *К теории D-разбиения*. // АиТ. 2004 №12, С. 15-28.
6. ШУБЛАДЗЕ А.М. *Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I*. // АиТ. 1997 N 3. С. 93-105
7. ШУБЛАДЗЕ А.М. *Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II*. // АиТ. 1997 N 8. С. 67-79
8. ШУБЛАДЗЕ А.М., ПОПАДЬКО В.Е., КУЗНЕЦОВ С.И., ЯКУШЕВА А.А. *Исследование оптимальных по степени*

*устойчивости решений при ПИ управлении. // Проблемы управления 2008 №2. С12-21*

9. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1967.