ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ ПИД УПРАВЛЕНИИ. ЧАСТЬ 2

А. М. Шубладзе
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)
shub@ipu.rssi.ru
В. Е. Попадько, , А. А. Якушева
(Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва)
yakusheva_a@mail.ru
С. И. Кузнецов
(ОАО НИИТЕПЛОПРИБОР, г. Москва)

В работе рассматривается синтез систем управления по критерию максимальной степени устойчивости для ПИД – закона управления. Проводится исследование основных оптимальных по степени устойчивости решений, что позволило наметить дальнейший путь развития метода машинным способом.

Ключевые слова: синтез систем максимальной степени устойчивости, исследование оптимальных по степени устойчивости решений.

Введение

Работа продолжает исследования по синтезу систем максимальной степени устойчивости, проведенные в [1]. В цитированной работе был рассмотрен ряд оптимальных по степени устойчивости решений для ПИД закона управления которые касались следующих четырех случаев:

1. Случай действительных корней оптимального решения;

2. Случай трех действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;

3. Случай двух действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;

4. Случай двух действительных и двух пар комплексно-сопряженных корней;

Всего при ПИД законе управления, как указывалось в [2], возможны 9 случаев оптимальных по степени устойчивости решений. В настоящей работе будут исследованы оставшиеся 5 случаев. При этом постановка самой задачи оптимального по степени устойчивости управления и все используемые обозначения будут те же самые, что и в работе [1]. С целью более понятного и удобного восприятия материала статьи повторим некоторые из этих обозначений.

Максимальная степень устойчивости

(1) $$I_{\text{оп}} = -\min\max \operatorname{Re}\lambda_j(k_П, k_И, k_Д),$$

где λ_j - корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i\lambda^i + k_0(k_П\lambda + k_И + \lambda^2 k_Д)$$

который после замены λ на $\lambda - I_{\text{оп}}$ при $k_П = k_{Поп}$, $k_И = k_{Иоп}$ и $k_Д = k_{Доп}$ превращается в

(2)

$$D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \lambda_1^{n_q}\prod_{i=1}^{n_{k1}}(\lambda_1{}^2 + \omega_i{}^2)^{\gamma_i}\, D_{1[(n+1-n_q-2n_k]}(\lambda_1) =$$

$$= \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=3}^{n} a_i^*\lambda_1^{i-1} + \sum_{i=1}^{2} a_i^*(k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})\lambda_1^{i-1},$$

где

(3) $$a_i^* = \frac{1}{(i-1)!}\frac{\partial^{i-1}D_{(n+1)}(\lambda, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})}{\partial\lambda^{i-1}},$$

i – ая производная $D_{n+1}(\lambda)$ (1) при $\lambda = -I_{\text{оп}}$, $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1)$ - полином, не имеющий корней в правой полуплоскости. В процессе исследований будет использован следующий модифицированный годограф характеристического полинома (3), в котором $\lambda_1 = i\omega, i^2 = -1$,

(4)

$$Z_{n0}(i\omega) = \operatorname{Re} D_{1(n+1)}(i\omega) + i\omega^{-1} \operatorname{Im} D_{1(n+1)}(i\omega) = \operatorname{Re}_0(\omega^2) + i \operatorname{Im}_0(\omega^2)$$

Проведем рассмотрение следующих 5 случаев, которые не были рассмотрены в [1].

1. Случай одного действительного корня и трех пар комплексно-сопряженных корней

В этом случае справедливы условия

(5) $n_g = 1$, $n_k = 3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и три пары комплексно-сопряженных корней. Условие (5) может быть при

(6) $a_1^*(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0$, $\Delta^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) =$
$= \Delta^{(1)}{}_{n\text{-}5}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta^{(2)}{}_{n\text{-}5}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0$,
$\Delta^{(0)}{}_j(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0$,

где $1<j<n\text{-}5$, $\Delta^{(0)}{}_{n\text{-}5}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$, $\Delta^{(1)}{}_{n\text{-}5}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$, $\Delta^{(2)}{}_{n\text{-}5}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ – основной и побочные определители Гурвица, a_1^*- определяется (2). Из четырех уравнений (6) можно найти оптимальные значения $I_{оп}$, $k_{Поп}$, $k_{Иоп}$, и $k_{Доп}$. Но эти условия являются необходимыми условиями оптимальности (1). На рис. 1 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (6), но который не является годографом оптимальной системы. Из этого годографа видно, что увеличение $k_{Доп}$, полученного из (6), приводит к появлению области, размещение в которой начала координат делает полином (2) устойчивым.

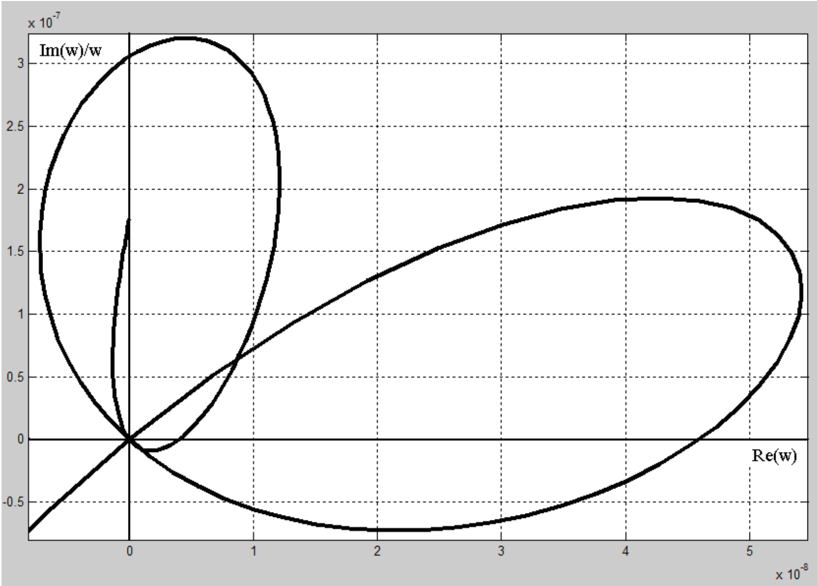

Рис. 1 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 1 получен для полинома (6), в котором
$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40}$,
$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0{,}03, \omega_2 = 0{,}1, \omega_3 = 0{,}14.$

Оптимальность в рассматриваемом случае можно гарантировать следующими соображениями. Рассмотрим векторы кривизн годографа

(7) $\quad Z^*_{n0}(i\omega)=(Re_0(\omega^2),Im_0(\omega^2),-\omega^2 Re_0(\omega^2))$,

в точках ω = ω1, ω = ω2, ω = ω3 пересечения им начала координат трехмерного пространства (Re0(ω2),Im0(ω2),-ω2Re0(ω2)). Такими векторами являются

$(Re_2(\omega_1^2), Im_2(\omega_1^2), -\omega_1^2 Re_2(\omega_1^2) - 2Re_1(\omega_1^2))$,

$(Re_2(\omega_2^2), Im_2(\omega_2^2), -\omega_2^2 Re_2(\omega_2^2) - 2Re_1(\omega_2^2))$ и

$(Re_2(\omega_3^2), Im_2(\omega_3^2), -\omega_2^2 Re_2(\omega_3^2) - 2Re_1(\omega_3^2))$,

где $\quad Re_1(\omega^2) = \dfrac{\partial \operatorname{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad Re_2(\omega^2) = \dfrac{\partial^2 \operatorname{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2(\omega^2)}$,

$$Im_2(\omega^2) = \frac{\partial^2 \omega^{-1} \operatorname{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2(\omega^2)}.$$

В рассматриваемом случае эти векторы линейно независимыми, поэтому образуемая ими матрица

$$A = \begin{pmatrix} Re_2(\omega_1^2) & Im_2(\omega_1^2) & -\omega_1^2 Re_2(\omega_1^2) - 2Re_1(\omega_1^2) \\ Re_2(\omega_2^2) & Im_2(\omega_2^2) & -\omega_2^2 Re_2(\omega_2^2) - 2Re_1(\omega_2^2) \\ Re_2(\omega_3^2) & Im_2(\omega_3^2) & -\omega_3^2 Re_2(\omega_3^2) - 2Re_1(\omega_3^2) \end{pmatrix} \tag{8}$$

невырождена, т.е. $|A| \neq 0$.

В силу этого существует единственное решение линейного уравнения

$$A \begin{pmatrix} \Delta k_и \\ \Delta k_п \\ \Delta k_д \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\delta > 0$, $\Delta k_и, \Delta k_п, \Delta k_д$ - вариации параметров ПИД управления, которые годограф (7) на частоте ω_1 сдвигают в направлении, обратном направлению вектора кривизны, обеспечивая на этой частоте устойчивость, а на частотах ω_2 и ω_3 сдвигают этот годограф в направлениях, перпендикулярных направлениям векторов кривизн, сохраняя на этих частотах систему на границе устойчивости. В этом случае достаточным условием оптимальности наряду с (6) будет условие

$$(10) \qquad |A|\begin{vmatrix} Im_2(\omega_2^2) & -\omega_2^2 Re_2(\omega_2^2) - 2Re_1(\omega_2^2) \\ Im_2(\omega_3^2) & -\omega_3^2 Re_2(\omega_3^2) - 2Re_1(\omega_3^2) \end{vmatrix} > 0,$$

где $|A|$ - определитель матрицы (8). При выполнении (10) свободный член полинома (6) становится отрицательным, что противоречит необходимому условию устойчивости этого полинома. Следовательно, условия (6) и (10) являются достаточными условиями оптимальности в случае (5).

На рис. 11 изображен годограф полинома (6) оптимальной системы, для которой выполнено условие (10). Из этого годографа следует, что любое изменение $k_{Доп}$, полученного из (6), приводит к появлению областей, размещение в которых начала координат делает полином (2) неустойчивым.

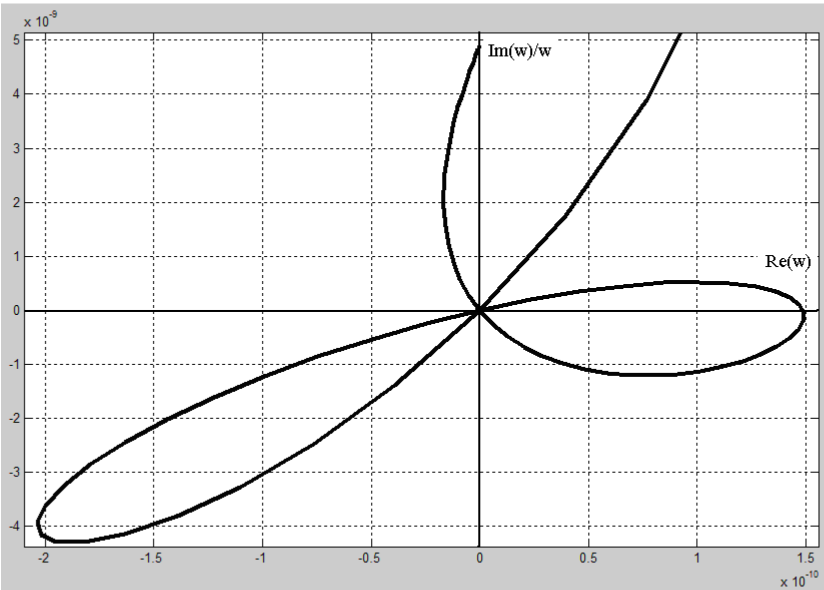

Рис. 2 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 2 получен для полинома (2), в котором

$$D_{I[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[40]}(\lambda_I) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$
$$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_I = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,05, \omega_3 = 0,07.$$

2. Случай одного действительного корня и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

(11) $n_g = 1$, $n_k = 1$, $\gamma_I = 2$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (11) может быть при

(12) $a_1^*(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп}) = 0, \Delta^{(0)}{}_{n\text{-}3}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп}) =$
$= \Delta^{(1)}{}_{n\text{-}3}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп}) = 0$, $\Delta^{(0)}{}_j(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп}) > 0$,

где $1<j<n$-3, a_1^*- из (3), $\Delta^{(0)}{}_{n\text{-}4}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп})$, $\Delta^{(1)}{}_{n\text{-}3}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп,} k_{Доп})$ – основной и побочный определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров $I_{оп}$, $k_{Поп}$, $k_{Иоп}$ и $k_{Доп}$ введем полином

(13) $D_{1(n\text{-}1)}{}^{(1)}(I_{оп}) = \mathrm{Re}_1(\omega^2) + i\omega \mathrm{Im}_1(\omega^2)$,

где $Re_I(\omega^2) = \dfrac{\partial \operatorname{Re} D_{I(n+I)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}$, $Im_I(\omega^2) = \dfrac{\partial \omega^{-1} \operatorname{Im} D_{I(n+I)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}$

Полином (13) имеет корень на той же частоте, что и полином (2), поэтому справедливо условие

(14) $\Delta_{1(n\text{-}2)}(I_{оп}, k_{Доп}) = 0$,

где $\Delta_{1(n\text{-}2)}(\mathrm{I}_{оп}, \mathrm{k}_{Доп})$ - основной определитель Гурвица полинома (13). Условия (12) и (14) являются необходимыми условиями оптимальности. Поэтому найденные из них четыре неизвестных $I_{оп}$, $k_П$, $k_{И,}$ $k_Д$ могут и не быть оптимальными. На рис. 3 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (12), (14), но который не является годографом оптимальной системы, т.к. при увеличении $k_Д$ «носик» преобразуется в петлю и сдвигается влево, образуя соответствующим выбором $k_П$, и $k_И$ область «устойчивых» корней.

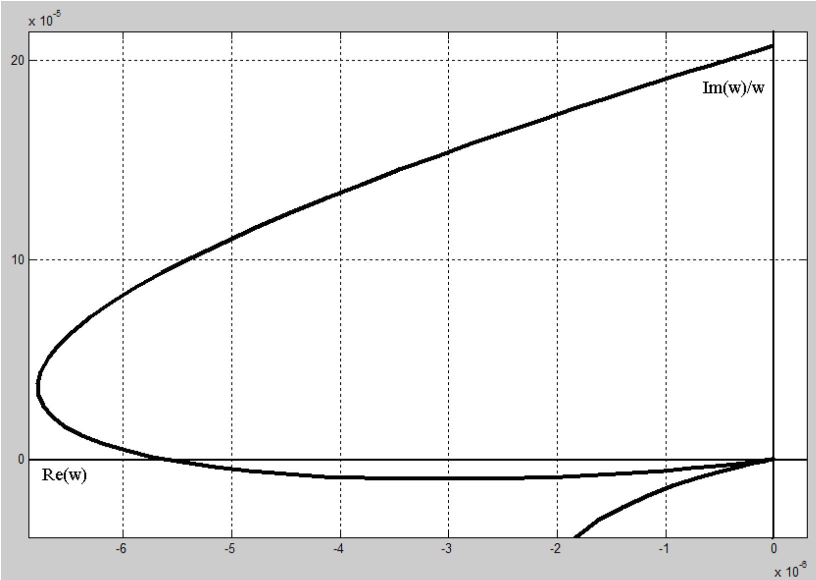

Рис. 3 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 3 получен для полинома (2), в котором

$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20}$,

$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2, \omega_1 = 0{,}12.$

Для оптимальности системы (2), (12) и (14) достаточно выполнение условия на знак второй производной мнимой части

(15) $\quad Im_2(\omega_1^2) > 0$,

где $Im_2(\omega^2) = \dfrac{\partial^2 \omega^{-1} ImD_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2 (\omega^2)}$ при ω =ω₁, ω₁- частота, на которой годограф (4) «касается» начала координат. На рис. 4 изображен годограф (4) полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (15).

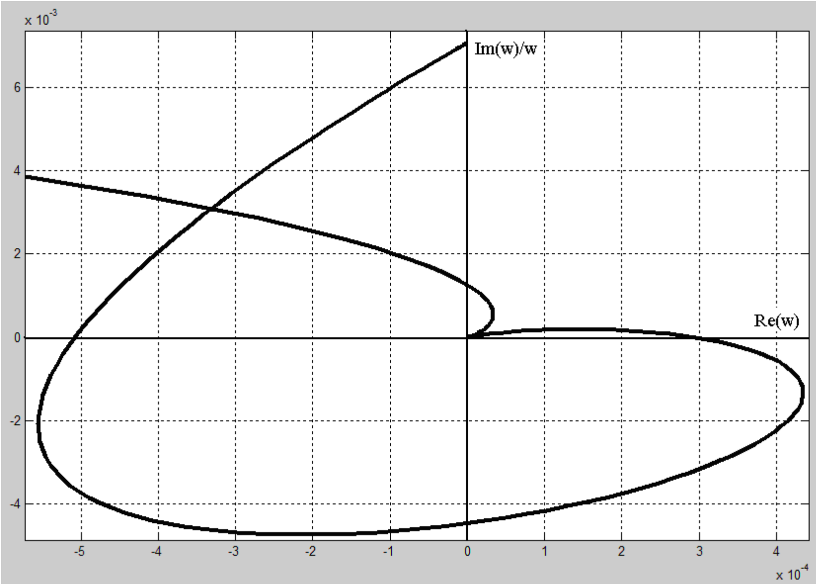

Рис. 4 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 4 получен для полинома (2), в котором $D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[20]}(\lambda_I) = (\lambda_1+1)^{20}$,
$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_I = 2, \omega_1 = 0,29.$

3. Случай одной комплексно-сопряженной пары и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

(16) $n_g = 0,\ n_{k1} = 2,\ \gamma_I = I, \gamma_2 = 2$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются пара комплексно-сопряженных корней и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (16) может быть при

(17) $\Delta^{(0)}{}_{n\text{-}4}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(1)}{}_{n\text{-}4}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) =$
$=\Delta^{(2)}{}_{n\text{-}4}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,\ \Delta^{(0)}{}_j(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})>0,$

где $1<j<n-4$, $\Delta^{(0)}_{n-4}$, $\Delta^{(1)}_{n-4}$ и $\Delta^{(2)}_{n-4}$– основной и побочные определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$, $k_{\text{Доп}}$, как и в предыдущем случае, введем полином

(18) $\quad D_{1(n-1)}{}^{(1)}(I_{on})=\mathrm{Re}_1(\omega^2)+i\omega\mathrm{Im}_1(\omega^2)$,

где функции $Re_1(\omega^2)$ и $Im_1(\omega^2)$ определены в (13). Полином (18) имеет корень на той же частоте, что и полином (2). Поэтому справедливо условие

(19) $\quad \Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}}) = 0$,

где $\Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}},k_{\text{Доп}})$ - основной определитель Гурвица полинома (18). Условия (17) и (19) являются необходимыми условиями оптимальности. Найденные из них четыре неизвестных $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$, $k_{\text{Доп}}$ не всегда оптимальны. На рис. 5 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (17), (19), но который не является годографом оптимальной системы, потому что его, как и в предыдущем случае 7, вариациями $k_{\text{П}}$, $k_{\text{И}}$ и $k_{\text{Д}}$ можно сделать годографом устойчивой системы.

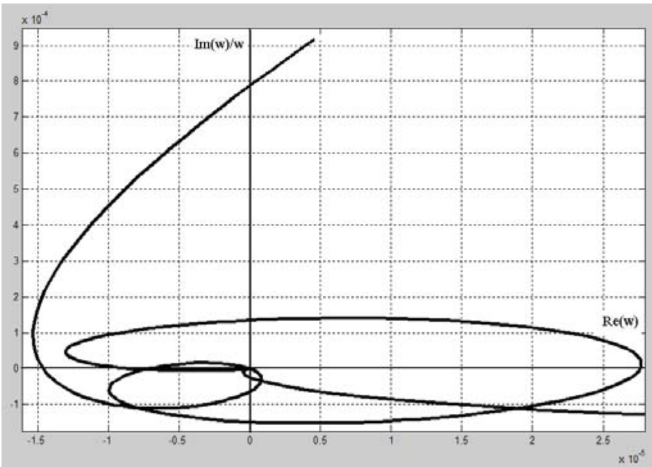

Рис. 5 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 5 получен для полинома (2), в котором

$$D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[40]}(\lambda_I) = (\lambda_1+1)^{60},$$
$$n = 65, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_I = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0,09, \omega_2 = 0,23.$$

Для оптимальности системы (2), (17) и (19) достаточно выполнение условия на знак произведения мнимых частей

(20) $\quad Im_I(\omega_I^2) Im_2(\omega_2^2) > 0$,

где $Im_I(\omega_I^2)$ - мнимая часть направляющего вектора годографа (4) при пересечении им на частоте ω_1 начала координат (что соответствует некратной паре корней (46)), $Im_2(\omega^2) = \dfrac{\partial^2 \omega^{-1} ImD_{I(n+I)}(i\omega)}{\partial^2(\omega^2)}$ при $\omega = \omega_2$, ω_2- частота, на которой годограф (9) «касается» начала координат. На рис. 6 изображен годограф (4)полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (20).

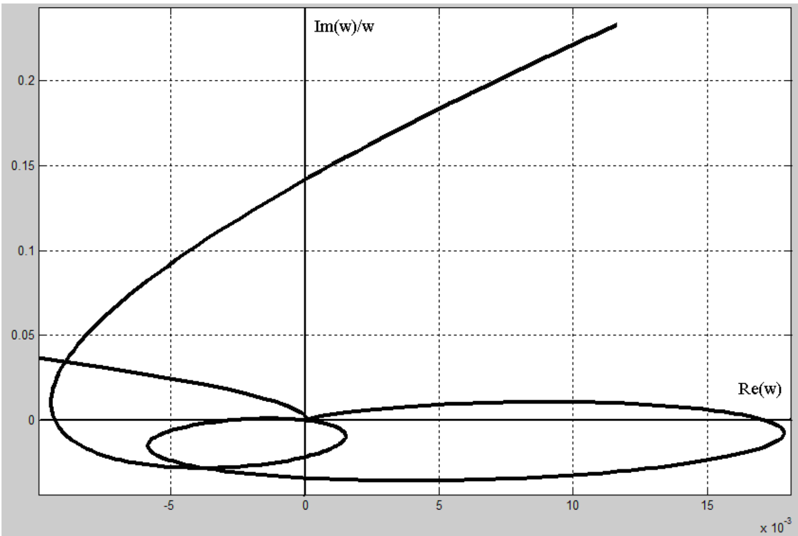

Рис. 6 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 6 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$
$$n = 25, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0{,}3, \omega_2 = 0{,}6.$$

4. Случай двух комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия

(21) $n_g = 0$, $n_{k1} = 2$, $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются две пары комплексно-сопряженных корней с касанием годографом (4) при пересечении им начала координат на частотах ω_1 и ω_2 действительной оси. Условию (21) соответствуют уравнения

(22) $\Delta^{(0)}_{n\text{-}2}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(1)}_{n\text{-}2}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0$,

$\Delta^{(0)}_{j}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0$,

где $1 < j < n\text{-}3$ $\Delta^{(0)}_{n\text{-}2}$ и $\Delta^{(1)}_{n\text{-}2}$ – основной и побочный определители Гурвица. Для получения двух дополнительных уравнений введем полином, учитывающий факт касания годографом (4) действительной оси. Такой факт имеет место при выполнении условия

(23) $Im_1(\omega_1^2) = Im_1(\omega_2^2) = 0$,

где $Im_1(\omega^2)$ из (15). Из (23) следует, что полином

(24) $D_{1n_1}(\omega^2) = Im_0(\omega^2) + i\omega Im_1(\omega^2)$,

где $n_1 = 2\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ - целая часть числа $\dfrac{n}{2}$, имеет те же комплексно-сопряженные пары корней, что и исходный полином (2). Поэтому в оптимальном случае справедливо уравнение

(25) $\Delta^{(0)}_{n_1-3}(I_{on}, k_{\text{Пon}}) = \Delta^{(1)}_{n_1-3}(I_{on}, k_{\text{Пon}}) = 0$,

где $\Delta^{(0)}_{n_1-3}(I_{on}, k_{\text{Пon}}), \Delta^{(1)}_{n_1-3}(I_{on}, k_{\text{Пon}})$ - определители Гурвица размерности $n_1 - 3$ полинома (24).

Из (22) и (25) можно определить четыре неизвестных параметра $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$, $k_{\text{Доп}}$. Но условия (22) и (25) являются необходимыми условиями оптимальности. Подтверждается это годографом (4) полинома (2), изображенном на рис. 7, для которого условия (22) и (25) выполнены, но очевидно, что изменением только параметров $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ полином (2) может быть сделан устойчивым.

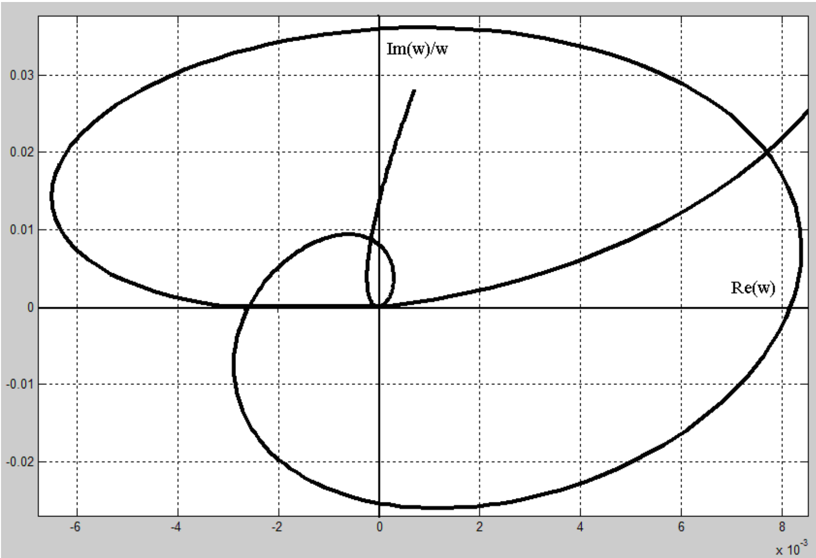

Рис. 7 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 7 получен для полинома (2), в котором

$$D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[40]}(\lambda_I) = (\lambda_1+1)^{40},$$

$$n = 43, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_I = \gamma_2 = 1, \omega_1 = 0{,}08, \omega_2 = 0{,}331.$$

Достаточные условия оптимальности можно получить добавлением к (22), (25) условия на направления годографа в точке пересечения им на частотах ω_1 и ω_2 начала координат. Эти направления, лежащие на прямой $Im = 0$, должны быть противоположны друг другу, что имеет место при выполнении неравенства

(26) $\quad Re_I(\omega_I^2)Re_I(\omega_2^2) < 0,$

где $Re_1(\omega^2)$ из (13).

Условия (22), (25) и (26) являются достаточными условиями оптимальности в рассматриваемом случае. На рис. 8 изображен годограф (4), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (22), (25) и (26).

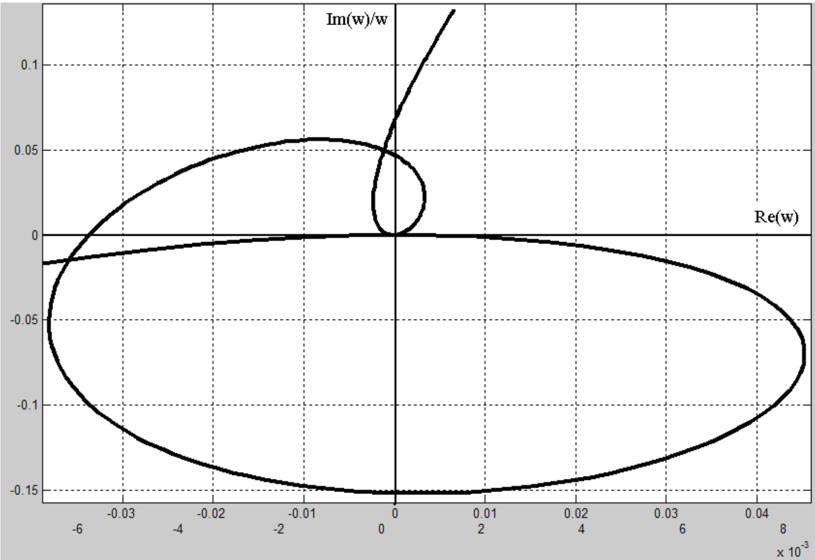

Рис. 8 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. 8 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 23, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \omega_1 = 0{,}16, \omega_2 = 0{,}51.$$

5. Случай четырех комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия

(27) $n_g = 0$, $n_k = 4$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются четыре пары комплексно-сопряженных корней. Условие (27) может быть при

(28) $\Delta^{(0)}{}_{n\text{-}6}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(1)}{}_{n\text{-}6}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})=$
$=\Delta^{(2)}{}_{n\text{-}6}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(3)}{}_{n\text{-}6}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$
$\Delta^{(0)}{}_{j}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})>0,$

где $1<j<n$-6, $\Delta^{(0)}{}_{n\text{-}5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$, $\Delta^{(1)}{}_{n\text{-}5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$, $\Delta^{(2)}{}_{\text{n-5}}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ и $\Delta^{(3)}{}_{\text{n-6}}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ – основной и побочные определители Гурвица. Из четырех уравнений (28) можно найти оптимальные значения $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$ и $k_{\text{Доп}}$. Эти условия - необходимые условияи оптимальности (1). На рис. 11 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (28), но который не является годографом оптимальной системы.

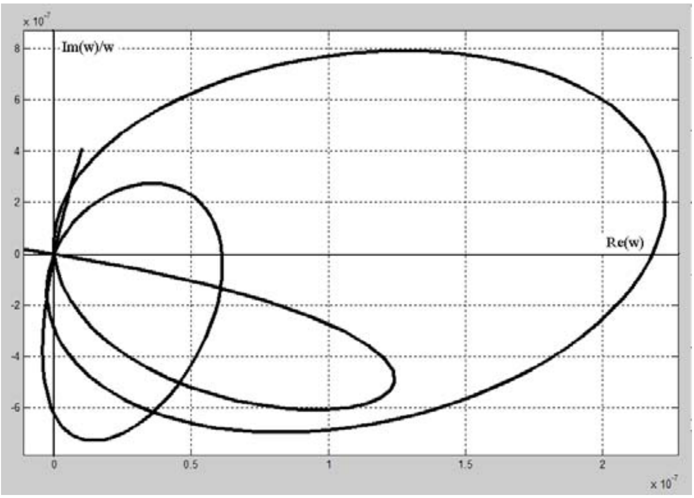

Рис. 9 Годограф неоптимальной системы

Годограф рис. 9 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$
$$n = 47, n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,11, \omega_3 = 0,2, \omega_4 = 0,23.$$

Оптимальность в рассматриваемом случае гарантируется следующим образом. Рассмотрим векторы кривизн годографа $Z^*_{n0}(i\,\omega)$ (7) в точках $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$, пересечения им начала координат трехмерного пространства $(Re_0(\omega^2), Im_0(\omega^2), -\omega^2 Re_0(\omega^2))$. Такими векторами являются введенные при рассмотрении случая 1 векторы, используемые в матрице A (8). В силу линейной независимости этих векторов линейное уравнение (9),как было отмечено ранее, имеет единственное решение $\Delta k_u, \Delta k_n, \Delta k_\partial$, при котором годограф (7) на частоте ω_1 сдвигается в сторону устойчивости, а на частотах ω_2 и ω_3 этот годограф сохраняется на границе устойчивости. В этом случае достаточным условием оптимальности наряду с (39) будет условие на знак скалярного произведения вектора кривизны на частоте $\omega = \omega_4$ на вариацию вектора $\Delta k_u, \Delta k_n, \Delta k_\partial$ решения линейного уравнения (9)

(29)

$$\left\langle (Re_2(\omega_4^2), Im_2(\omega_4^2), -\omega_4^2 Re_2(\omega_4^2) - 2Re_1(\omega_4^2)), (\Delta k_u, \Delta k_n, \Delta k_\partial \right\rangle = -\delta_4 < 0$$

На рис. 10 изображен годограф полинома (2) оптимальной системы (1), для которой выполнены условия (28), (29).

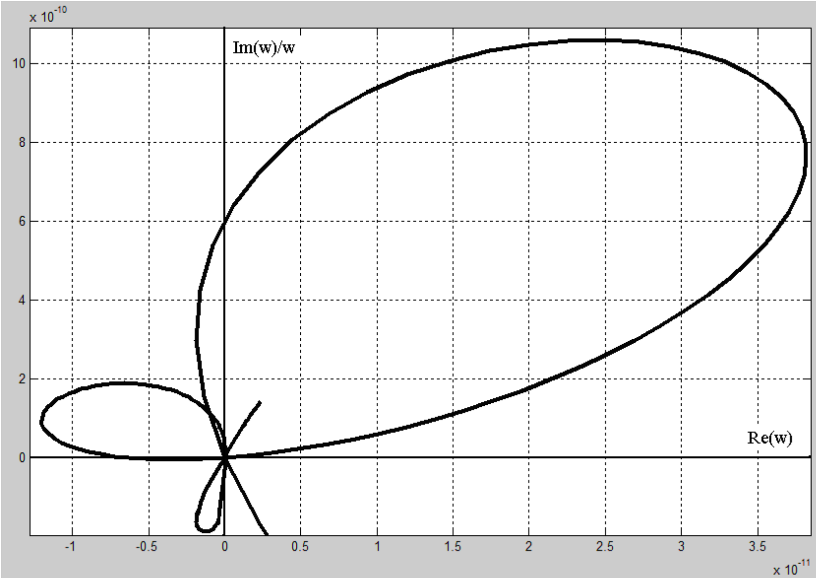

Рис. 9 Годограф оптимальной системы

Годограф рис. (10) получен для полинома (2), в котором

$$D_{I[n+I-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{I[40]}(\lambda_I) = (\lambda_1+1)^{40},$$

$$n=47, n_g=0, n_k=4, \gamma_I=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1, \omega_1=0{,}015, \omega_2=0{,}023, \omega_3=0{,}055, \omega_4=0{,}08$$

Заключение

Таким образом проведено исследование шести структур оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД законе управления. Получены достаточные условия оптимальности каждой из возможных оптимальных структур. С помощью машинных методов расчета построены годографы замкнутых систем управления, для которых в одном случае выполняются только необходимые условия оптимальности, в другом – достаточные условия. Вид построенных годографов оптимальных систем отражает геометрический смысл полученных решений.

Литература

1. А.М. ШУБЛАДЗЕ, В.Е. ПОПАДЬКО, С.И. КУЗНЕЦОВ, А.А. ЯКУШЕВА *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 1*.
2. ШУБЛАДЗЕ А.М. *Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости.II.* // АиТ. 1997 N 8. С. 67-79