

УДК 519.6+004.94

ББК 22.193

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Черных Н. В.¹, Пакшин П. В.²

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического универ-
ситета им Р.Е. Алексеева)*

Рассматриваются математические модели сложных систем в виде стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Предлагается обобщение известных численных схем Тейлора для аппроксимации решения таких уравнений. Представлены результаты численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, диффузионные процессы, марковские переключения, схемы Тейлора, сходимость, устойчивость.

Введение

В последнее время математические модели в виде стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) со скачкообразными изменениями диффузионной составляющей привлекают большое внимание исследователей. Они получили название моделей с переключаемой диффузией и описывают сложные системы, которые могут испытывать резкие изменения структуры и параметров, вызванные возможными отказами, перерывами в поступлении информации и воздействиями внешней среды.

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка (nadezdacher@mail.ru).

² Павел Владимирович Пакшин, доктор физико-математических наук, профессор (pakshinpv@gmail.com).

Такие модели получают все более широкое распространение в современной теории управления и информации. Как правило, рассматриваются переключения диффузии по закону марковской цепи с конечным числом состояний – марковские переключения.

При компьютерном моделировании таких систем возникает необходимость численного решения СДУ с марковскими переключениями. Основы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений без переключений были заложены в монографиях [10], [4], [7], которые обобщили известные результаты по данной проблеме, полученные в основном авторами этих книг в 70-90 годах.

Один из известных и перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито основан на стохастических аналогах формулы Тейлора для решения данных уравнений. Как отмечается в [5] со ссылкой на [10] вычислительные затраты при этом растут полиномиально с увеличением размерности задачи, что позволяет говорить о вычислительных резервах данного подхода.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решения стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса. [5]

В данной работе рассматривается возможность применения данного подхода к решению стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями. Теоретические результаты подтверждаются проведенными компьютерными экспериментами в среде SCILAB.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $(\omega_r(t), F_t)$, $r = 1, \dots, q$ – независимые винеровские процессы.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$(1) \quad dX = a(t, X)dt + \sum_{r=1}^q \sigma_r(t, X)d\omega_r(t),$$

где X , a , σ_r – векторы размерности n .

Предполагается, что функции $a(t, x)$ и $\sigma_r(t, x)$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$:

$$(2) \quad |\alpha(t, x) - \alpha(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

Здесь и ниже $|x|$ означает евклидову норму вектора x , xu – скалярное произведение векторов x и u .

Пусть $(X(t), F(t))$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – некоторое решение системы (1), с начальным условием, удовлетворяющим неравенству $E|X(t_0)|^2 < \infty$.

Определим одношаговую аппроксимацию $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, $t_0 \leq t \leq t+h \leq t_0 + T$, которая формируется в зависимости от x , t , h , и $\{\omega_1(\mathcal{G}) - \omega_1(t), \dots, \omega_q(\mathcal{G}) - \omega_q(t) : t \leq \mathcal{G} \leq t+h\}$:

$$(3) \quad \bar{X}_{t,x}(t+h) = x + \Lambda(t, x, h; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t), i = 1, \dots, q, t \leq \mathcal{G} \leq t+h).$$

На основании одношаговой аппроксимации рекуррентно построим приближение (\bar{X}_k, F_{t_k}) , $k=0, \dots, N$, $t_{k+1} - t_k = h_{k+1}$, $t_N = t_0 + T$:

$$(4) \quad \bar{X}_0 = X_0 = X(t_0), \quad \bar{X}_{k+1} = X_{t_k, \bar{X}_k}(t_{k+1}) = \\ = \bar{X}_k + \Lambda(t_k, \bar{X}_k, h_{k+1}; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t_k), i = 1, \dots, q, t_k \leq \mathcal{G} \leq t_{k+1}).$$

Для простоты считаем, что $t_{k+1} - t_k = h = T/N$.

Для дальнейшего будем использовать теорему, доказанную в [7].

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности ρ_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности ρ_2 для среднеквадратичного отклонения, т.е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$(5) \quad \left| E\left(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right) \right| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_1}$$

$$(6) \quad \left[E\left|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right|^2 \right]^{1/2} \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_2}$$

и пусть

$$(7) \quad \rho_2 \geq 1/2, \quad \rho_1 \geq \rho_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$(8) \quad \left[E\left|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)\right|^2 \right]^{1/2} \leq K \left(1 + E|X_0|^2\right)^{1/2} h^{\rho_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\rho = \rho_2 - \frac{1}{2}$.

Постоянные K не зависят от X_0 и N .

2. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $\omega_r(\cdot)$, $r = 1, \dots, q$ – независимые винеровские процессы. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(9) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sum_{r=1}^q \sigma_r(\beta(t), X(t))d\omega_r(t)$$

$$X(0) = x_0, \beta(0) = \beta_0 \text{ и}$$

$$(10) \quad P(\beta(t + \Delta t) = j | \beta(t) = i, \alpha(s), s \leq t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Q(x) = (q_{ij}(x)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ удовлетворяет условию, что для каждого x $q_{ij}(x) \geq 0$ при $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m q_{ij}(x) = 0$ для каждого $i \in M$.

Предполагается, что функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$, $i \in M$:

$$(11) \quad |a(i, x) - a(i, y)| + |\sigma(i, x) - \sigma(i, y)| \leq K|x - y|.$$

Рассмотрим разложение Платена решения стохастического дифференциального уравнения, представляющего собой стохастический аналог разложения Тейлора, только в нашем случае заменяем функцию $f(t, x)$ стандартного разложения функцией $f(\beta, x)$ с переключаемой компонентой. Схема разложения при этом не меняется.

Пусть $X_{t,x}(s) = X(s)$ - решение уравнения (1), $f(\beta, x)$ - достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq \vartheta \leq t_0 + T$

$$(12) \quad f(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) = f(\beta, x) + \sum_{r=1}^q \int_t^{\vartheta} \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_r(\vartheta_1) + \int_t^{\vartheta} Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1,$$

где операторы Λ_r , $r = 1, \dots, q$ и L определены как:

$$(13) \quad \Lambda_r = \left(\sigma_r, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(14) \quad L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_r^i \sigma_r^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Применим формулу (12) к функциям $\Lambda_r f$ и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda_r f(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ и $Lf(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ подставим в (12). Имеем

$$\begin{aligned}
 (15) \quad f(\beta(s), x(s)) = & f + \sum_{r=1}^q \Lambda_r f \int_t^s d\omega_r(\mathcal{G}) + Lf \int_t^s d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^s \left(\sum_{s=1}^q \int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_s \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega_s(\mathcal{G}_1) d\omega_r(\mathcal{G}) + \right. \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^s \left(\int_t^{\mathcal{G}} L \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^s \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\
 & \left. + \int_t^s \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 f(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G},
 \end{aligned}$$

где, например, $\Lambda_r f$ вычисляется в точке (β, x) .

Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, которые в детерминированном случае являются разложениями Тейлора по степеням h с остаточным членом интегрального типа. В стохастическом случае роль степеней выполняют случайные величины вида (которые не зависят от F_t)

$$(16) \quad I_{i_1, \dots, i_j}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_{i_{j-1}}(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_{i_{j-2}}(\mathcal{G}_2) \dots \int_t^{\mathcal{G}_{j-2}} d\omega_{i_1}(\mathcal{G}_{j-1}),$$

где i_1, \dots, i_j принимают значения из множества чисел $0, 1, \dots, q$ и под $d\omega_0(\mathcal{G}_r)$ понимается $d\mathcal{G}_r$.

Очевидно, что $E I_{i_1, \dots, i_j} = 0$, если хотя бы одно из $i_k \neq 0, k = 1, \dots, j$, и $E I_{i_1, \dots, i_j} = O(h^j)$, если все $i_k = 0, k = 1, \dots, j$.

В [7] доказаны леммы, которые справедливы и для рассматриваемого случая.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$(17) \quad \left(E \left(I_{i_1, \dots, i_j} \right)^2 \right)^{1/2} = O \left(h^{\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2}} \right).$$

Другими словами, при подсчете порядка малости интеграла (16) нужно руководствоваться правилом: $d\mathcal{G}$ вносит в порядок малости единицу, а $d\omega_r(\mathcal{G})$, $r = 1, \dots, q$ – одну вторую.

Для того, чтобы выяснить общее правило составления разложений вида (15) по интегралам (16), выпишем формулу, которая получается путем ряда непосредственных подстановок:

$$(18) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) = f + \sum_{r=1}^q \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_s(\mathcal{G}_2) + \\ + \sum_{r=1}^q \Lambda_r Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_r(\mathcal{G}_1) + \sum_{r=1}^q L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \\ + L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \rho,$$

$$(19) \quad \rho = \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \sum_{j=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \times \right. \right. \right. \\ \times (\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i \Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L\Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times d\omega_i(\mathcal{G}_1) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \int_t^{\mathcal{G}_1} L \Lambda_r L f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_r L^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G} + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \int_t^{\mathcal{G}_1} L^3 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Первая часть формулы (18) состоит из слагаемого нулевого порядка малости (f), из слагаемых порядка малости $\frac{1}{2}$, которые составляют сумму всех возможных интегралов вида (16) порядка $\frac{1}{2}$ с соответствующими коэффициентами (каждое такое слагаемое - это $\Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G})$), из слагаемых порядка малости 1,

которые составляют сумму всех возможных интегралов вида (16) порядка 1 с соответствующими коэффициентами (здесь слагаемые двух видов - это $L f \int_t^{t+h} d\mathcal{G}$ и

$\Lambda_s \Lambda_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_s(\mathcal{G}_1)$), из всех возможных слагаемых порядка малости $\frac{3}{2}$, из одного слагаемого порядка малости 2 ($L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1$) и из остатка ρ . Нетрудно видеть, что коэффициент при интеграле I_{i_1, \dots, i_j} (его порядок малости согласно лемме 1 есть $\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2}$) равен $\Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_j}$, где под Λ_0 понимается L .

Таким образом, можно получить как разложения, содержащие

все члены включительно до какого-то полужелого порядка малости, так и до какого-то целого порядка.

В [7] доказана также следующая лемма.

Лемма 2. Пусть

$$(20) \quad \left| \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(t, x) \right| \leq K \left(1 + |x|^2 \right)^{\frac{\rho}{2}}.$$

Тогда величина

$$(21) \quad I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = \\ = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_{i_{j-1}}(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} \dots \int_t^{\mathcal{G}_{j-2}} \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\mathcal{G}_{j-1}, X(\mathcal{G}_{j-1})) d\omega_{i_1}(\mathcal{G}_{j-1})$$

удовлетворяет неравенству

$$(22) \quad E \left| I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) \right|^2 \leq K \left(1 + E|X(t)|^2 \right) h^{\sum_{k=1}^j (2-i_k)},$$

т.е., в частности, ее порядок малости тот же, что и у величины $I_{i_1, \dots, i_j}(h)$. Далее, если хотя бы один из индексов $i_k, k = 1, \dots, j$ отличен от нуля, то

$$(23) \quad EI_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = 0, \quad \sum_{k=1}^j i_k^2 \neq 0.$$

Из этой леммы вытекает, что каждое слагаемое, составляющее ρ , имеет не более чем второй порядок малости. Более того, математическое ожидание всех членов второго порядка малости и порядка малости 2.5 и ρ равно нулю согласно (23). Поэтому $|E\rho| = O(h^3)$. Разумеется, это верно, если для всех подынтегральных функций из ρ выполняется, например, (20).

Возьмем теперь в (18), (19) в качестве $f(\beta, x)$ вектор x . В этом случае $\Lambda_r f = \sigma_r, Lf = a$. Поэтому

$$(24) \quad X_{t,x}(t+h) = x + \sum_{r=1}^q \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + ah + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q L\sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^q \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} +$$

$$+ \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + \rho.$$

В формуле (24) все коэффициенты σ_r , a , $\Lambda_i \sigma_r$, $L\sigma_r$, $\Lambda_r a$, $\Lambda_s \Lambda_i \sigma_r$, La вычисляются в точке (β, x) , а остаток ρ равен

$$(25) \quad \rho = \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \sum_{j=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) \times \right. \right. \right. \\ \times d\omega_j(\mathcal{G}_3) d\omega_s(\mathcal{G}_2) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \Big) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L\Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) \times \right. \\ \times d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) + \\ + \sum_{r=1}^q \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_r La(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \\ \left. + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} \right)$$

В связи с формулами (24), (25) рассмотрим следующую одношаговую аппроксимацию:

$$(26) \quad \bar{X}_{t,x}^{(1)}(t+h) = x + \sum_{r=1}^q \sigma_r(\omega_r(t+h) - \omega_r(t)),$$

$$(27) \quad \bar{X}_{t,x}^{(2)}(t+h) = \bar{X}_{t,x}^{(1)}(t+h) + ah,$$

$$(28) \quad \bar{X}_{t,x}^{(3)}(t+h) = \bar{X}_{t,x}^{(2)}(t+h) + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}),$$

$$(29) \quad \bar{X}_{t,x}^{(4)}(t+h) = \bar{X}_{t,x}^{(3)}(t+h) + \sum_{r=1}^q L \sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ + \sum_{r=1}^q \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\ + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^q \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}),$$

$$(30) \quad \bar{X}_{t,x}^{(5)}(t+h) = \bar{X}_{t,x}^{(4)}(t+h) + La \frac{h^2}{2},$$

Каждая из этих аппроксимаций имеет свою погрешность $\rho^{(i)}$, $i = 1, \dots, 5$. Пользуясь леммами 1 и 2, нетрудно установить (при выполнении условия (20) для соответствующих функций), что

$$|E\rho^{(1)}| = O(h), \quad E|\rho^{(1)}|^2 = O(h^2),$$

т.е. $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, поэтому в качестве ρ_2 такого, чтобы удовлетворялись условия теоремы 1, следует взять $\rho_2 = \frac{1}{2}$, и метод (26), очевидно, не сходится.

$$|E\rho^{(2)}| = O(h^2), \quad E|\rho^{(2)}|^2 = O(h^2),$$

т.е. $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 2$, и второй метод (метод Эйлера) имеет порядок сходимости $1/2$.

$$|E\rho^{(3)}| = O(h^2), \quad E|\rho^{(3)}|^2 = O(h^3),$$

т.е. $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 2$, и третий метод имеет порядок сходимости 1.

$$|E\rho^{(4)}| = O(h^2), \quad E|\rho^{(4)}|^2 = O(h^4),$$

т.е. $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$, но для того, чтобы удовлетворялись условия теоремы 1, следует положить $\rho_2 = 3/2$. В итоге четвертый метод, как и третий, также имеет порядок сходимости 1.

$$|E\rho^{(5)}| = O(h^3), \quad E|\rho^{(5)}|^2 = O(h^4),$$

т.е. $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$, и пятый метод имеет порядок сходимости равный $3/2$.

Эти примеры позволяют обосновать и сформулировать общий результат, который приведен в [7].

Пусть в разложении удержаны все члены целого порядка m . Тогда остаток ρ содержит члены полуцелого порядка $m + \frac{1}{2}$ и члены порядка m . Так как математическое ожидание любого члена полуцелого порядка равно нулю, то $|E\rho| = O(h^{m+1})$, т.е.

$$\rho_1 = m+1. \quad \text{В то же время } E\rho^2 = O(h^{2m+1}), \quad \text{т.е. } \rho_2 = m + \frac{1}{2}.$$

Согласно теореме 1, порядок точности такого метода равен m . Если же в разложении удержаны лишь все члены полуцелого порядка $m + \frac{1}{2}$, то в остатке среди членов целого порядка $m+1$, присутствует один член порядка $m+1$, математическое ожидание которого не равно нулю

$$\left(\int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 \dots \int_t^{\mathcal{G}_{m-1}} L^m a(\mathcal{G}_m, X(\mathcal{G}_m)) d\mathcal{G}_m \right).$$

Поэтому $|E\rho| = O(h^{m+1})$,

$$|E\rho^2|^{1/2} = O(h^{m+1}), \quad \text{и теорема 1 применима лишь с } \rho_2 = m + \frac{1}{2}.$$

Порядок точности такого метода снова равен m . Таким образом, если ко всем членам до порядка m включительно добавить все члены порядка $m + \frac{1}{2}$, то порядок точности метода не улучшится. Но если помимо всех членов до порядка $m + \frac{1}{2}$ включительно добавить лишь один упомянутый член порядка $m+1$, то порядок точности метода станет на $\frac{1}{2}$ больше. Действительно, математическое ожидание всех остальных членов порядка $m+1$ равно нулю и поэтому $|E\rho| = O(h^{m+2})$, т.е. $\rho_1 = m + 2$, $\rho_2 = m + 1$ и $\rho = m + \frac{1}{2}$.

Ранее уже подчеркивалась, что в разложениях для $f(t, x)$ (которые в детерминированном случае являются разложениями Тейлора по степеням h с остаточным членом интегрального типа) в стохастическом случае роль степеней выполняют случайные величины вида (которые не зависят от F_t)

$$(31) \quad I_{i_1, \dots, i_j}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_{i_{j-1}}(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} \dots \int_t^{\mathcal{G}_{j-2}} d\omega_{i_1}(\mathcal{G}_{j-1}),$$

где i_1, \dots, i_j принимают значения из множества чисел $0, 1, \dots, q$ и под $d\omega_0(\mathcal{G}_r)$ понимается $d\mathcal{G}_r$.

Все многократные интегралы Ито вида (31) имеют множителем $\Delta\omega(h)$, т.е. величины, способные принимать сколь угодно большие значения. Тем не менее, это не влияет на сходимость этих методов и большую точность, что подтверждается компьютерными экспериментами, например в [10].

Рассматриваемая далее теорема Платена явно показывает, что на сходимость схем Тейлора не влияют интегралы Ито. Для достижения сходимости этих схем достаточно лишь наложение условия ограничения (20) на функции $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(t, x)$, которое к тому же в большинстве случаев можно ослабить (что показано в [7]).

Теорема 2 (Е. Платен). Пусть $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до целого порядка t включительно. Пусть все функции $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(t, x)$, где $f \equiv x$,

$\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq t+1$, удовлетворяют неравенству (20). Тогда сред-
неквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен t .

Пусть $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до полуцелого порядка $t + \frac{1}{2}$ вклю-

чительно и слагаемое $L^m a \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 \dots \int_t^{\mathcal{G}_{m-1}} d\mathcal{G}_m = L^m a \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}$.

Пусть все функции $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(t, x)$, где $f \equiv x$, $\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq m+2$, удовлетворяют неравенству (20). Тогда среднеквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен $m + \frac{1}{2}$.

3. Пример

Рассмотрим следующую диффузионную систему

$$(32) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X(s), \beta(s)) ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t b^j(X(s), \beta(s)) d\omega_s^j.$$

Будем использовать строгую схему Тейлора порядка 1.5 решения уравнения (31), представленную в [10].

$$(33) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta\omega_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\} + \\ + a'b\Delta Z_n + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)\Delta_n^2 + \\ + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)\{\Delta\omega_n\Delta_n - \Delta Z_n\} + \\ + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2)\left\{\frac{1}{3}(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\right\}\Delta\omega_n,$$

где $\Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} d\omega_{s_1} ds_2$.

Эта схема построена на основе одношаговой аппроксимации (30).

Перепишем (32) в виде

$$(34) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + bI_{(1)} + \frac{1}{2}bb'I_{(1,1)} + a'bI_{(1,0)} + \\ + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)I_{(0,0)} + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)I_{(0,1)} + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2)I_{(1,1,1)},$$

где $I_{(1)} = \Delta\omega_n$; $I_{(1,1)} = \frac{1}{2}(\Delta\omega_n^2 - \Delta_n)$; $I_{(0,0)} = \frac{1}{2}\Delta_n^2$;

$I_{(1,0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_n} \Delta_n \cdot \left(G_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} G_2 \right)$; где G_1, G_2 - гауссовские случайные величины;

$$I_{(0,1)} = \Delta \omega_n \Delta_n - I_{(1,0)}; \quad I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \Delta \omega_n^2 - \Delta_n \right) \Delta \omega_n;$$

Введем обозначения

$$(35) \quad \begin{aligned} a &= aa; & b &= bb; \\ bb' &= l_1 b_{11}; & a'b &= l_1 a_{11}; \\ aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' &= l_0 a_{11}; \\ ab' + \frac{1}{2} b^2 b'' &= l_0 b_{11}; & b(bb'' + (b')^2) &= l_1 l_1 b_{11}; \end{aligned}$$

Тогда схема (33) будет представлена в виде

$$(36) \quad \begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + aah + bbI_{(1)} + l_1 b_{11} I_{(1,1)} + l_1 a_{11} I_{(1,0)} + l_0 b_{11} I_{(0,1)} + \\ &+ l_0 a_{11} I_{00} + l_1 l_1 b_{11} I_{(1,1,1)}; \quad h = \Delta. \end{aligned}$$

Рассмотрим процесс Ито $X = \{X_t, t \geq 0\}$, удовлетворяющий линейному стохастическому уравнению

$$(37) \quad dX_t = aX_t dt + bX_t d\omega_t$$

на временном интервале $[0, T]$ при $T=1, X_0 = 1, a=1.5, b=0.1$.

$$(38) \quad X_t = X_0 \exp\left(a - \frac{1}{2} b^2\right)t + b\omega_t.$$

есть решение уравнения для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$.

Чтобы смоделировать линейно интерполированную траекторию аппроксимации Тейлора порядка 1.5, зададим начальное значение $Y_0 = X_0$ и будем рекурсивно генерировать значения с равным значением шага Δ согласно (36), где $\Delta \omega_n$ - есть $N(0, \Delta)$ гауссовски распределенных приращений винеровского процесса ω на подынтервалах $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$.

Для сравнения мы можем использовать (38), чтобы определить соответствующие значения явного решения, используя ту же самую траекторию винеровского процесса

$$X_t = X_0 \exp\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\tau_n + b \sum_{i=1}^n \Delta\omega_{i-1} [10].$$

Коэффициенты a и b меняют свои значения в соответствии с матрицей переходов Q . $M = \{1, 2\}$.

Будем рассматривать разные случаи изменения матрицы переходов, изменения коэффициентов в уравнении (37) и выбора шага.

- $$Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix};$$

$$a(1) = 1.5; \quad a(2) = 20;$$

$$b(1) = 0.1; \quad b(2) = 30;$$

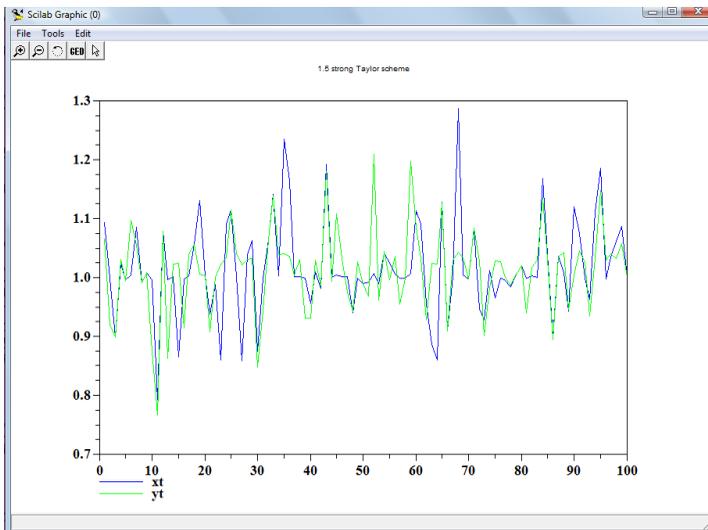


Рис. 1. $\Delta=0.01$

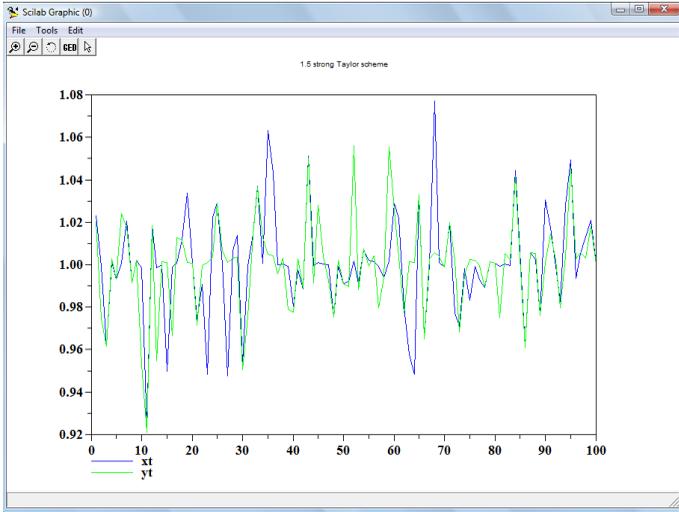


Рис. 2. $\Delta=0.0001$

В данном случае значения коэффициентов меняются незначительно, поэтому уменьшение шага практически ничего не дает.

$$2. \quad Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix};$$

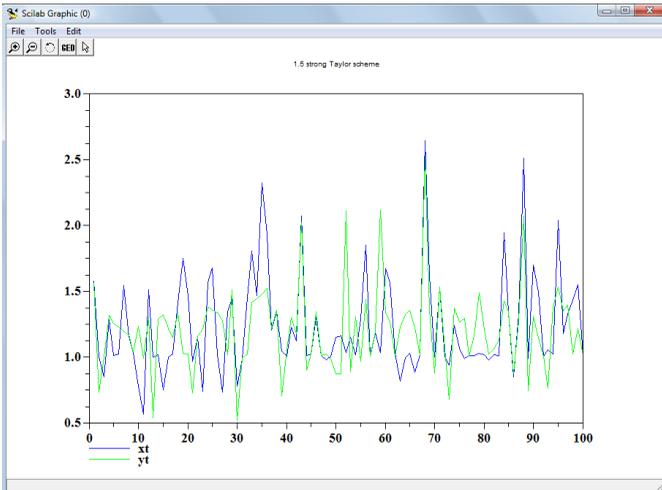


Рис.3. $\Delta=0.01$

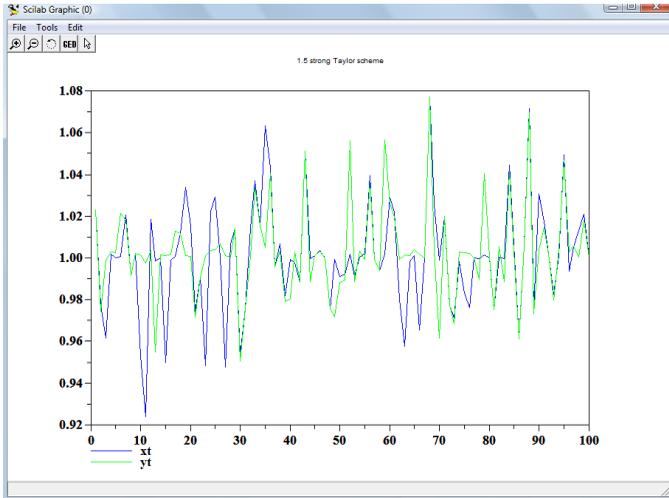


Рис. 4. $\Delta=0.0001$

Такой же пример, только с другой матрицей переходов подтверждает выводы случая 1.

$$3. \quad Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix};$$

$$a(1) = 1.5; \quad a(2) = 50; \quad b(1) = 0.1; \quad b(2) = 100;$$

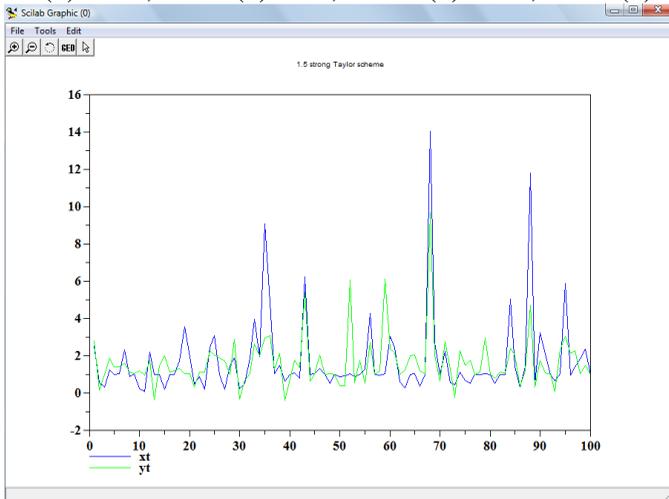


Рис. 5. $\Delta=0.01$

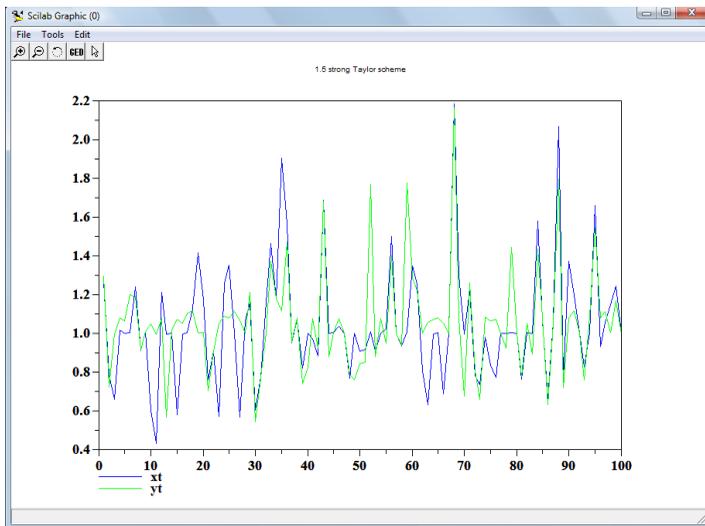


Рис. 6. $\Delta=0.001$

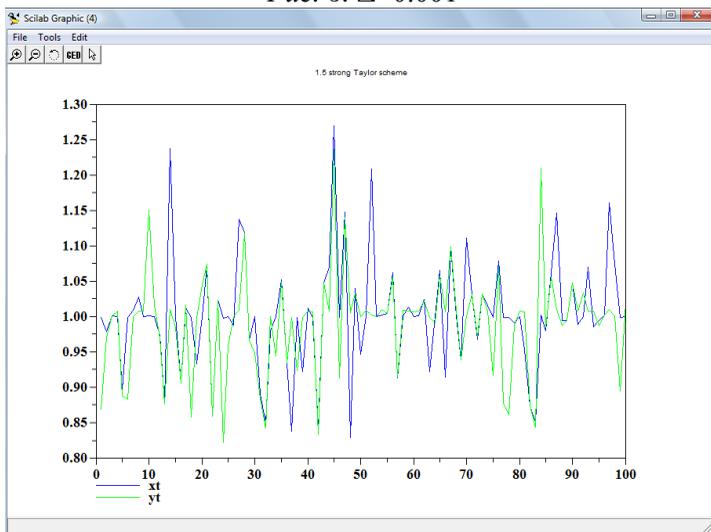


Рис. 7. $\Delta=0.0001$

В данном случае увеличение коэффициентов более заметно, при этом уменьшение шага с $\Delta=0.01$ до $\Delta=0.0001$ приводит к уменьшению погрешности, но дальнейшее уменьшение ничего не дает, даже немного ухудшает результат.

4. $Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix};$

$a(1) = 1.5; \quad a(2) = 100; \quad b(1) = 0.1; \quad b(2) = 200;$

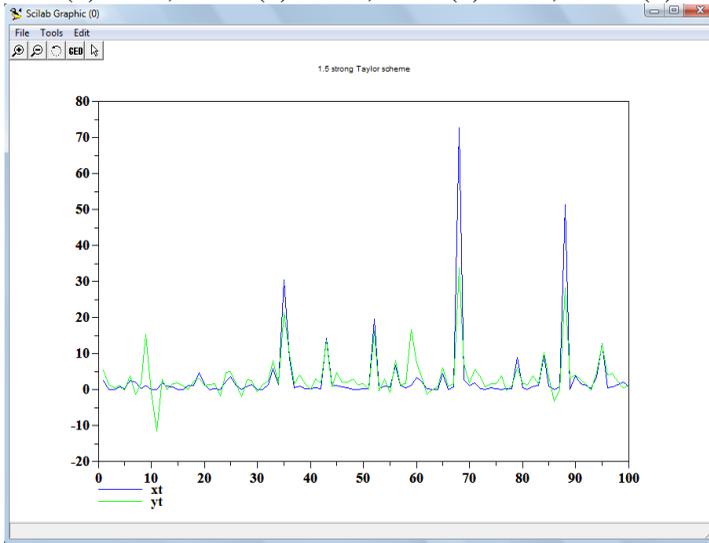


Рис. 8. $\Delta=0.01$

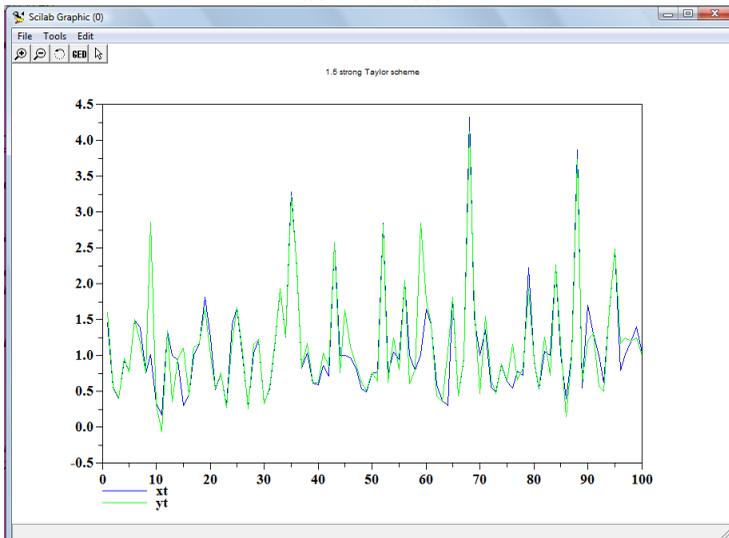


Рис. 9. $\Delta=0.001$

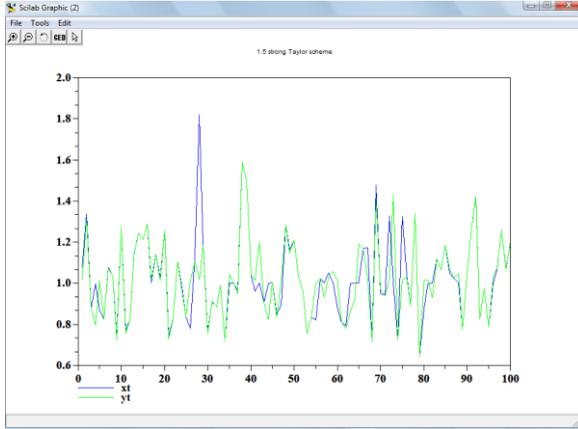


Рис. 10. $\Delta=0.0001$

В данном примере оба коэффициента увеличиваются значительно (в 100 и 200 раз), но даже при шаге $\Delta=0.01$ наблюдается достаточно устойчивая аппроксимация решения, хотя выбор меньшего шага действительно повышает точность.

Далее рассмотрим более сложный вариант переключений.

$$5. \quad Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix};$$

$$a(1) = \cos(x) + \sin(x); \quad a(2) = 1 + \cos(x); \quad b(1) = 0.5; \quad b(2) = 0.2;$$

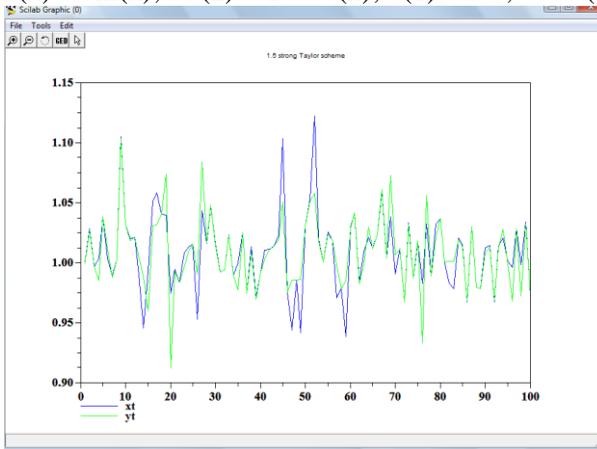


Рис. 11. $\Delta=0.01$

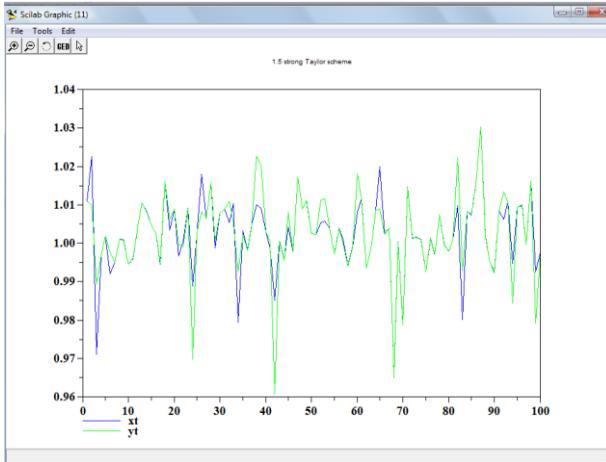


Рис. 12. $\Delta=0.001$

В данном случае коэффициент a изменяет свои значения в некоторой зависимости от x , а значения b меняются очень незначительно. Здесь выбор разного шага практически не повлиял на сходимость.

$$6. \quad Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix};$$

$$a(1) = \cos(x) + \sin(x); \quad a(2) = 1 + \cos(x);$$

$$b(1) = 0.5; \quad b(2) = 200;$$

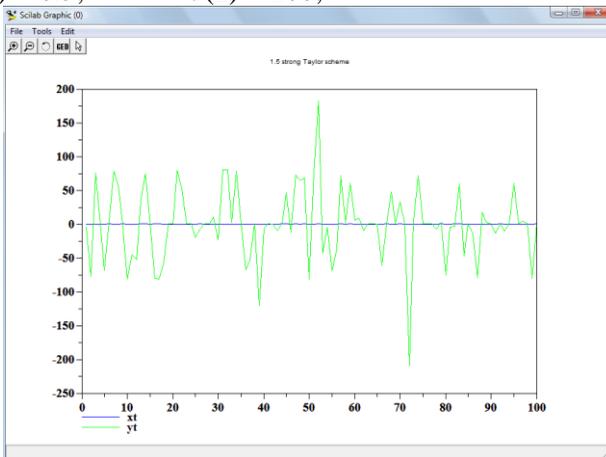


Рис. 13. $\Delta=0.001$

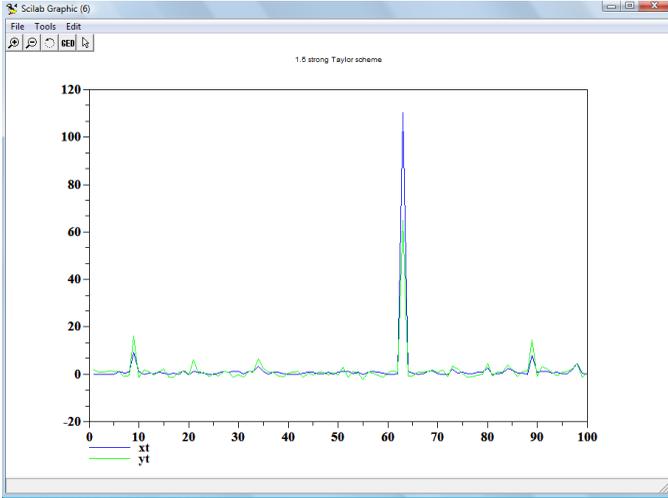


Рис. 14. $\Delta=0.0001$

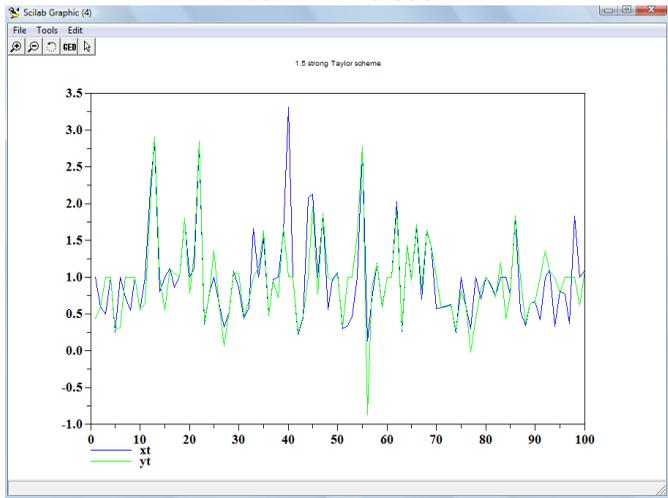


Рис. 15. 0.00001

В этом примере коэффициент b , в отличие от случая 5, резко меняет свое значение (в 200 раз). Эксперимент показывает, что в данном случае опять только выбор очень малого шага гарантирует устойчивость схемы.

Рассмотрим еще более сложный вариант решения той же задачи, когда матрица переходов также зависит от x .

$$7. P = \begin{pmatrix} \sin^2 x & -\sin^2 x \\ -2\cos^2 x & 2\cos^2 x \end{pmatrix}; Q = I + P * \Delta;$$

$$a(1) = \cos(x) + \sin(x); \quad a(2) = 1 + \cos(x); \quad b(1) = 0.5; \quad b(2) = 20;$$

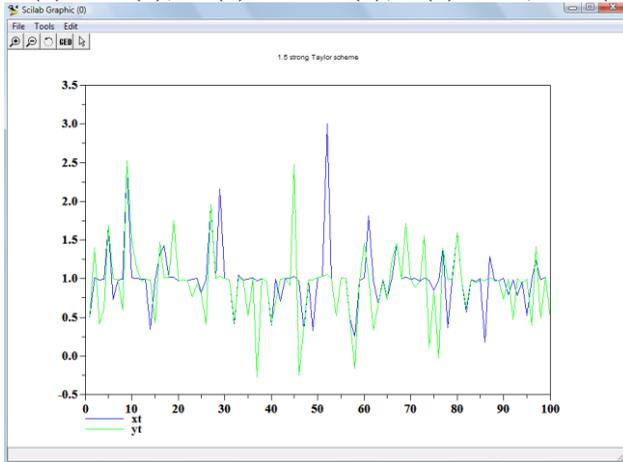


Рис. 16. $\Delta=0.001$

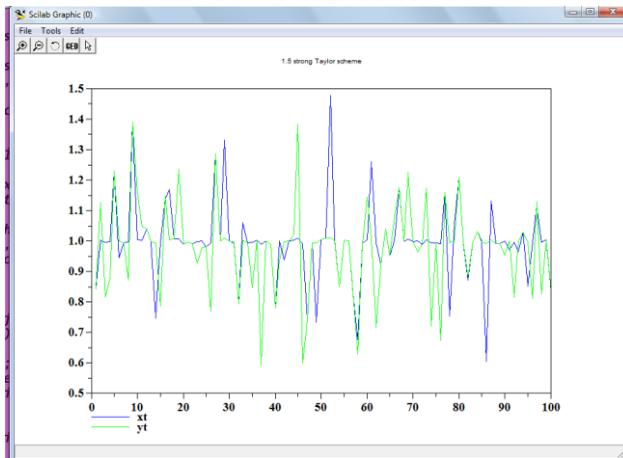


Рис. 17. $\Delta=0.0001$

Видно, что в данном случае схема Тейлора порядка 1.5 также аппроксимирует решение уравнения, но погрешность больше, чем в предыдущих случаях. А так как коэффициенты резко не меняют своих значений, то выбор шага мало влияет на точность результата.

4. Заключение

Учитывая рассуждения, проведенные во второй части статьи, теорема 2 (Платена) может быть обобщена на рассматриваемый случай диффузионной системы с марковскими переключениями, так как изменение значений функций $a(\beta(t), X(t))$ и $\sigma(\beta(t), X(t))$ имеет ограниченный характер (в соответствии с матрицей переходов $Q(x)$) в отличие от многократных интегралов Ито.

Если в теореме принять к рассмотрению функцию $f(\beta, x)$ вместо функции $f(t, x)$, то все выводы теоремы остаются в силе, но возникают вопросы устойчивости схем, так как в некоторые моменты будет возникать ситуация, когда одновременно будут резко увеличивать или уменьшать свои значения и $\Delta\omega(h)$, и функции $a(\beta(t), X(t))$ и $\sigma(\beta(t), X(t))$. Однако учитывая, что во все слагаемые в той или иной степени входит множителем h , при достаточно малом h устойчивость схем будет обеспечена. Эксперименты показали, что для многих случаев подходящим является шаг $h=0.01$, но для случаев резкого увеличения значений функций $a(\beta(t), X(t))$ и $\sigma(\beta(t), X(t))$ (в 100, 200 и более раз) устойчивость будет обеспечивать выбор более малого шага $h=0.001$, $h=0.0001$. Дальнейшее уменьшение шага не дает увеличение точности вычислений, предположительно потому, что необходимость выбирать шаг интегрирования очень малым влечет за собой не только увеличение объема вычислений, но и рост вычислительной погрешности.

Таким образом, схемы Тейлора (для стохастических систем) можно использовать в том же виде, без изменений и для случая диффузионных систем с марковскими переключениями.

Возникающие вопросы устойчивости можно решить путем выбора шага.

Вопросы нахождения области устойчивости применения схем Тейлора для стохастических систем с переключениями будут рассмотрены более подробно в следующих статьях.

Можно предположить, что более устойчивыми окажутся неявные схемы, но вопрос применения неявных схем к решению

стохастических дифференциальных уравнений со скачками требует подробного изучения и отдельного рассмотрения.

Литература

1. БУЛИНСКИЙ А.В., ШИРЯЕВ А.Н. *Теория случайных процессов*. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 400 с.
2. ВОЛКОВ И.К., ЗУЕВ С.М., ЦВЕТКОВА Г.М. *Случайные процессы: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко*. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 448 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVIII)
3. КЕМЕНИ ДЖОН ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. ЛОРИ, КНЕПП АНТОНИ У. *Счетные цепи Маркова: Пер. с англ.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит. – 1987. –416 с.
4. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Спб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с.
5. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения// Дифференциальные уравнения и процессы управления*. Электронный журнал.- 2008. - №1.
6. МИЛЛЕР Б.М., ПАНКОВ А.Р. *Теория случайных процессов в примерах и задачах*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
7. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений*. Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. 224 с.
8. ОКСЕНДАЛЬ Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ.* – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003.-408 с., ил.
9. G. GERORGE YIN, CHAO ZHU. *Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications*. Springer Science + Business Media, LLC 2010.

10. PETER E. KLOEDEN, ECKHARD PLATEN, HENRI SCHURZ. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Berlin: Springer – Verlag, 1994.

ARTICLE TITLE

Nadezda Chernykh, post-graduate student (nadezdacher@mail.ru).

Pavel Pakshin, Dr.Sci., professor, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (pakshinpv@gmail.ru)

Abstract: The paper considers mathematical models of hybrid systems in the form of stochastic differential equations with Markovian switchings of the diffusion component. An extension of Taylor schemes for numerical approximation of their solutions is proposed. Modelling results in SCILAB are presented to demonstrate the effectiveness of the obtained algorithms.

Keywords: stochastic systems, diffusion process, Markovian switching, Taylor schemes, convergence, stability.